

1. Дайте визначення внутрішньої операції на множині  $M$ .
2. Дайте визначення зовнішньої операції на множині  $M$  над множиною  $P$ .
3. Дайте визначення групи.
4. Скільки внутрішніх і скільки зовнішніх операцій визначено на елементах групи?
5. Яка властивість внутрішньої операції, що задається на елементах групи, називається асоціативністю?
6. Який елемент групи називається нейтральним або одиничним?
7. Який елемент групи називається протилежним або оберненим до заданого елемента  $x$ ?
8. Яка група називається абелевою?
9. Які з наступних множин елементів є групами за операцією додавання: а) множина усіх дійсних чисел; б) множина усіх додатніх дійсних чисел; в) множина усіх раціональних чисел; г) множина усіх невід'ємних дійсних чисел?
10. Які з наступних множин елементів є групами за операцією множення: а) множина усіх дійсних чисел; б) множина усіх ненульових дійсних чисел; в) множина усіх додатніх дійсних чисел; г) множина усіх від'ємних дійсних чисел?
11. Дайте визначення поля.
12. Скільки внутрішніх та скільки зовнішніх операцій визначається на елементах поля?
13. Яка властивість внутрішньої операції, що задається на елементах поля, називається комутативністю?
14. Яка властивість внутрішньої операції, що задається на елементах поля, називається асоціативністю?
15. Запишіть рівняння, яке презентує властивість дистрибутивності однієї внутрішньої операції, визначеної на елементах поля, по іншій.
16. Чи можна розглядати множину елементів поля як групу за кожною з внутрішніх операцій, які задані на елементах поля?
17. Які з наступних множин чисел є полями за операціями додавання та множення: а) множина дійсних чисел; б) множина цілих чисел; в) множина раціональних чисел; г) множина ірраціональних чисел?
18. Дайте визначення лінійного простору.
19. Скільки внутрішніх та зовнішніх операцій визначено на елементах лінійного простору?
20. Запишіть 4 властивості елементів лінійного простору, які стосуються тільки внутрішньої операції.
21. Запишіть 2 властивості елементів лінійного простору, які стосуються тільки зовнішньої операції.
22. Запишіть 2 властивості елементів лінійного простору, які стосуються як внутрішньої так і зовнішньої операцій.
23. Який лінійний простір називається дійсним?
24. Який лінійний простір називається комплексним?
25. Дайте визначення поняття "вектор".
26. Доведіть, що нейтральний елемент у лінійному просторі єдиний.
27. Доведіть, що будь-який елемент лінійного простору має єдиний протилежний.
28. Якщо  $0$  – число нуль,  $\theta$  – нейтральний елемент лінійного простору,  $x$  – довільний елемент лінійного простору,  $\oplus$  – позначення внутрішньої операції на елементах лінійного простору,  $\otimes$  – позначення зовнішньої операції на елементах лінійного простору, то коректним є наступний запис: а)  $0 \oplus x = 0$ ; б)  $0 \otimes x = \theta$ ; в)  $0 \oplus x = \theta$ ; г)  $0 \otimes x = 0$ .
29. Якщо  $0$  – число нуль,  $\theta$  – нейтральний елемент лінійного простору,  $\alpha$  – довільний елемент числового поля,  $\oplus$  – позначення внутрішньої операції на елементах лінійного простору,  $\otimes$  – позначення зовнішньої операції на елементах лінійного простору, то коректним є наступний запис: а)  $\alpha \otimes \theta = 0$ ; б)  $\alpha \oplus \theta = 0$ ; в)  $\alpha \otimes \theta = \theta$ ; г)  $\alpha \oplus \theta = \theta$ .
30. Якщо  $x$  – елемент лінійного простору,  $\alpha$  – елемент числового поля,  $\oplus$  – позначення внутрішньої операції на елементах лінійного простору,  $\otimes$  – позначення зовнішньої операції на елементах лінійного простору, то який з наступних записів не протиречить прийнятним позначенням: а)  $\alpha \oplus x = \alpha$ ; б)  $\alpha \otimes x = \alpha$ ; в)  $\alpha \oplus x = x$ ; г)  $\alpha \otimes x = x$ .

31. Чи утворюють лінійний простір усі поліноми від  $x$  степеня не вищого за 3, у яких коефіцієнт біля  $x^3$  дорівнює 3?
32. Чи утворюють лінійний простір усі поліноми від  $x$  степеня не вищого за 1, у яких коефіцієнт біля  $x$  дорівнює 0?
33. Чи утворюють лінійний простір усі неперервні функції, які дорівнюють 1 в точці  $x=0$ ?
34. Чи утворюють лінійний простір усі неперервні функції, які дорівнюють 0 в точці  $x=1$ ?
35. Чи утворює лінійний простір множина векторів  $n$ -вимірному арифметичного простору, сума координат яких дорівнює 1?
36. Чи утворює лінійний простір множина векторів  $n$ -вимірному арифметичного простору з цілими координатами?
37. Чи утворює лінійний простір множина векторів  $n$ -вимірному арифметичного простору, перша координата яких дорівнює 0?
38. Дайте визначення лінійного підпростору.
39. Чи завжди лінійний підпростір є також і лінійним простором?
40. Які підпростори називаються тривіальними?
41. Дайте визначення лінійної комбінації системи векторів  $\{e_i\}_1^n$ ?
42. Що називають тривіальною лінійною комбінацією системи векторів  $\{e_i\}_1^n$ ?
43. Дайте визначення лінійної оболонки системи векторів  $\{e_i\}_1^n$ .
44. Чи є лінійна оболонка системи векторів лінійним простором?
45. Дайте визначення повної системи векторів в  $V$ .
46. Який лінійний простір називається скінченно вимірним?
47. Який лінійний простір називається нескінченно вимірним?
48. Якщо до повної системи векторів додати будь-який вектор, то система буде обов'язково: а) лінійно незалежною; б) повною; в) лінійно залежною?
49. Якщо з повної системи векторів вилучити вектор, який є лінійною комбінацією інших векторів системи, то система векторів обов'язково буде: а) лінійно незалежною; б) повною; в) лінійно залежною.
50. Що називають методом "прополки"?
51. Яка система векторів називається лінійно незалежною?
52. Яка система векторів називається лінійно залежною?
53. Коли система векторів, що складається з одного вектора, є лінійно залежною?
54. Система векторів, яка включає нейтральний елемент, завжди є а) лінійно незалежною; б) повною; в) лінійно залежною.
55. Якщо один з векторів системи є лінійною комбінацією інших векторів системи, то система обов'язково є а) повною; б) лінійно залежною; в) лінійно незалежною.
56. Сформулюйте необхідну і достатню умову лінійної залежності системи векторів.
57. Будь-яка частина лінійно незалежної системи є а) лінійно залежною; б) лінійно незалежною; в) повною.
58. У якому лінійному просторі не існує лінійно незалежної системи векторів?
59. Що таке процес «посадки» та для чого він застосовується?
60. Якщо  $m$  - кількість векторів лінійно незалежної системи в  $V$ , а  $n$  - кількість векторів повної системи в  $V$ , то а)  $m \leq n$ ; б)  $m = n$ ; в)  $m \geq n$ .
61. Дайте визначення базису лінійного простору.
62. Базис - це а) максимальна повна система векторів; б) мінімальна повна система векторів.; в) мінімальна лінійно незалежна система векторів.
63. Базис - це а) максимальна лінійно незалежна система векторів; б) мінімальна лінійно незалежна система векторів; в) максимальна повна система векторів.
64. Який лінійний простір не має базису?
65. Скільки різних базисів можна побудувати для лінійного простору, що містить більше, ніж один вектор?

66. Дайте визначення розмірності лінійного простору.
67. Як позначається розмірність лінійного простору?
68. За якої кількісної умови повна система векторів лінійного простору розмірності  $n$  є базисом?
69. За якої кількісної умови лінійно незалежна система векторів лінійного простору розмірності  $n$  є базисом?
70. Яка розмірність лінійного простору поліномів степеня не вищого за  $n$ ?
71. У лінійному просторі поліномів степеня не вищого за  $n$  якою буде розмірність лінійного підпростору поліномів, які задовольняють  $m$  незалежним умовам?
72. Доведіть, що система векторів  $\{1, x, x^2\}$  є лінійно незалежною.
73. Доведіть, що система векторів  $\{1, e^x, e^{2x}\}$  є лінійно незалежною.
74. Доведіть, що система векторів  $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x\}$  є лінійно незалежною.
75. Дайте визначення координат вектора  $x$  лінійного простору  $V$  у деякому базисі  $\{e_i\}_1^n$ .
76. Чи залежать координати вектора лінійного простору від вибору базису?
77. Які два лінійні простори  $V$  та  $V'$  називаються ізоморфними?
78. Доведіть, що якщо два лінійні простори  $V$  та  $V'$  є ізоморфними, то нейтральному елементу  $\Theta$  лінійного простору  $V$  відповідає нейтральний елемент  $\Theta'$  лінійного простору  $V'$ .
79. Якщо два лінійні простори  $V$  та  $V'$  є ізоморфними, то лінійно незалежній системі векторів в  $V$  відповідає: а) лінійно залежна система векторів в  $V'$ , б) лінійно незалежна система векторів в  $V'$ , в) повна система векторів в  $V'$ .
80. Сформулюйте необхідну і достатню умову того, що два лінійні простори, які задано над одним числовим полем  $K$ , є ізоморфними.
81. Розмірність лінійного підпростору є: а) не меншою за розмірність лінійного простору; б) не більшою за розмірність лінійного простору; в) дорівнює розмірності лінійного простору.
82. Чи завжди базис лінійного підпростору можна доповнити до базису лінійного простору?
83. Чи завжди з базису лінійного простору можна виділити базис лінійного підпростору?
84. Дайте визначення лінійного многовиду.
85. Як позначається лінійний многовид?
86. Якщо  $L$ —лінійний підпростір, зсувом якого утворено лінійний многовид  $M$ , то кажуть, що лінійний многовид: а) є перпендикулярним до лінійного підпростору; б) співпадає з лінійним підпростором; в) є паралельним до лінійного підпростору.
87. Чи є лінійний многовид лінійним підпростором?
88. Коли лінійний многовид є лінійним підпростором?
89. Лінійний многовид утворюється зсувом лінійного підпростору. Скільки існує лінійних підпросторів, зсувом яких можна отримати заданий лінійний многовид?
90. Лінійний многовид утворюється зсувом лінійного підпростору на вектор. Скільки існує векторів лінійного простору, зсувом на які можна отримати заданий лінійний многовид?
91. Дайте визначення розмірності лінійного многовиду.
92. Як по-іншому називають 1-вимірний лінійний многовид?
93. Як по-іншому називають  $k$ -вимірний лінійний многовид?
94. Як по-іншому називають  $(n-1)$ -вимірний лінійний многовид у  $n$ -вимірному лінійному просторі?
95. Дайте визначення суми двох лінійних підпросторів.
96. Як позначається сума двох лінійних підпросторів?
97. Дайте визначення перетину двох лінійних підпросторів.
98. Як позначається перетин двох лінійних підпросторів?
99. Дайте визначення об'єднання двох лінійних підпросторів.
100. Як позначається об'єднання двох лінійних підпросторів?

101. Чи є лінійним підпростором сума двох лінійних підпросторів?
102. Чи є лінійним підпростором перетин двох лінійних підпросторів?
103. Чи є лінійним підпростором об'єднання двох лінійних підпросторів?
104. Запишіть та поясніть формулу Грасмана.
105. Яке з наступних співвідношень відображає формулу Грасмана: а)  $\dim(L_1+L_2) = \dim(L_1 \cap L_2) - \dim L_1 - \dim L_2$ ; б)  $\dim(L_1+L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cup L_2)$ ; в)  $\dim(L_1+L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$ ?
106. Яке з наступних співвідношень відображає формулу Грасмана: а)  $\dim(L_1+L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) - \dim L_1 - \dim L_2 = 0$ ; б)  $\dim(L_1+L_2) + \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) = 0$ ; в)  $\dim(L_1+L_2) + \dim L_1 + \dim L_2 + \dim(L_1 \cap L_2) = 0$ ?
107. Дайте визначення прямої суми двох лінійних підпросторів.
108. Як позначається пряма сума двох лінійних підпросторів?
109. У чому різниця (за визначенням) між сумою та прямою сумою двох лінійних підпросторів?
110. Якщо сума двох лінійних підпросторів є прямою, то що є перетином цих двох лінійних підпросторів?
111. Якщо розмірність лінійного простору  $V$  дорівнює сумі розмірностей лінійних підпросторів  $L_1$  та  $L_2$ , то: а)  $L_1 \cup L_2 = \theta$ ; б)  $L_1 + L_2 = \theta$ ; в)  $L_1 \cap L_2 = \theta$ .
112. Нехай  $V = L_1 \oplus L_2$  та  $x$ — довільний вектор лінійного простору  $V$ . Дайте визначення проєкції вектора  $x$  на лінійний підпростір  $L_1$  паралельно лінійному підпростору  $L_2$ .
113. Нехай  $V = L_1 \oplus L_2$  та  $x$ — довільний вектор лінійного простору  $V$ . Дайте визначення проєкції вектора  $x$  на лінійний підпростір  $L_2$  паралельно лінійному підпростору  $L_1$ .
114. Нехай  $V = L_1 \oplus L_2$ . Дайте визначення доповнення лінійного підпростору  $L_1$  до лінійного простору  $V$ .
115. Нехай  $V = L_1 \oplus L_2$ . Дайте визначення доповнення лінійного підпростору  $L_2$  до лінійного простору  $V$ .
116. Нехай  $L_1$ —лінійний підпростір лінійного простору  $V$ . За яких умов в  $V$  існує доповнення лінійного підпростору  $L_1$  до лінійного простору  $V$ ?
117. Дайте визначення матриці  $n \times m$ .
118. Як матриці записуються (позначаються)?
119. Що називається елементами матриці?
120. Як позначаються елементи матриці?
121. Якщо  $a_{ij}$ — елемент матриці, то індекси позначають: а)  $i$ — номер стовпчика,  $j$ — номер рядка; б)  $i$ — номер рядка,  $j$ — номер стовпчика; в)  $i$ — загальна кількість рядків у матриці,  $j$ — загальна кількість стовпчиків у матриці.
122. Якщо матриця позначається як  $A_{nm}$ , то: а)  $n$ —кількість стовпчиків матриці,  $m$ —кількість рядків матриці; б)  $n$ —кількість рядків матриці,  $m$ —кількість стовпчиків матриці; в)  $n$ —розмірність лінійного простору, у якому задано матриці порядку  $m$ .
123. Дайте визначення: які матриці називаються рівними?
124. Дайте визначення операції додавання матриць.
125. Дайте визначення операції множення матриці на число.
126. Дайте визначення лінійного простору матриць  $A_{nm}$  (внутрішня та зовнішня операції, нейтральний елемент, приклад базису).
127. Чому дорівнює розмірність лінійного простору матриць  $A_{nm}$ ?
128. Що є нейтральним елементом лінійного простору матриць  $A_{nm}$ ?
129. Наведіть приклад базису лінійного простору матриць  $A_{nm}$ .

130. Яка матриця називається квадратною?
131. Що називається порядком квадратної матриці?
132. Дайте визначення діагональних елементів квадратної матриці.
133. Дайте визначення симетричної матриці.
134. Дайте визначення кососиметричної матриці.
135. У якому випадку квадратну матрицю можна представити у вигляді суми симетричної та кососиметричної матриць?
136. Запишіть формули, за якими квадратну матрицю можна представити у вигляді суми симетричної та кососиметричної матриць.
137. Множина симетричних матриць  $A_{nn}$  утворює лінійний простір. Яка розмірність цього лінійного простору?
138. Множина кососиметричних матриць  $A_{nn}$  утворює лінійний простір. Яка розмірність цього лінійного простору?
139. Дайте визначення операції множення двох матриць.
140. Які дві матриці можна перемножити?
141. Дві матриці можна перемножити, якщо: а) кількість рядків першої дорівнює кількості рядків другої; б) кількість рядків першої дорівнює кількості стовпчиків другої; в) кількість стовпчиків першої дорівнює кількості рядків другої; г) кількість стовпчиків першої дорівнює кількості стовпчиків другої.
142. Як «у народі» називається правило множення матриць?
143. Правило множення матриць «у народі» називають: а) рядок на стовпчик; б) рядок на рядок; в) стовпчик на рядок; г) стовпчик на стовпчик.
144. Якої розмірності буде матриця, що є результатом множення матриці  $A_{nm}$  на матрицю  $B_{mk}$ : а)  $n$  рядків та  $m$  стовпчиків; б)  $n$  рядків та  $k$  стовпчиків; в)  $m$  рядків та  $m$  стовпчиків; г)  $m$  рядків та  $k$  стовпчиків?
145. Нехай  $C_{nk}$ —матриця, що є результатом множення матриці  $A_{nm}$  на матрицю  $B_{mk}$  ( $C_{nk} = A_{nm}B_{mk}$ ). Запишіть формулу у дужках через елементи матриць.
146. Які з наступних матриць можна перемножити і якою буде розмірність результуючої матриці: а)  $A_{23}$  та  $B_{23}$ , б)  $A_{23}$  та  $B_{32}$ , в)  $A_{32}$  та  $B_{23}$ , г)  $A_{32}$  та  $B_{32}$  ?
147. Які дві матриці називаються комутуючими?
148. Операція множення двох матриць: а) є комутативною; б) не є комутативною; в) є комутативною тільки для квадратних матриць.
149. Яка з наступних формул для матриць є вірною: а)  $A(BC) = A(CB)$ ; б)  $A(BC) = (BA)C$ ; в)  $A(BC) = (AB)C$  ?
150. Яка з наступних формул для матриць є вірною: а)  $(A + B)C = (A + C)(B + C)$ ; б)  $(A + B)C = AC + BC$ ; в)  $(A + B)C = CA + BC$  ?
151. Яка з наступних формул для матриць є вірною: а)  $A(B+C) = AB+AC$ ; б)  $A(B+C) = BA+AC$ ; в)  $A(B+C) = AB+CA$  ?
152. Дайте визначення операції транспонування матриці.
153. Як позначається операція транспонування матриці?
154. Нехай  $A$ —матриця. Тоді яка операція над матрицею позначається як  $A^T$  ?
155. Якщо  $A$ —матриця, а  $\alpha$ —число, то чому дорівнює результат операції  $(\alpha A)^T$  ?
156. Якщо  $A$  та  $B$ —матриці, то чому дорівнює результат операції  $(A + B)^T$  ?
157. Якщо  $A$  та  $B$ —матриці, то чому дорівнює результат операції  $(AB)^T$  ?
158. Дайте визначення операції комплексного спряження матриці.
159. Як позначається операція комплексного спряження матриці?
160. Нехай  $A$ —матриця. Тоді яка операція над матрицею позначається як  $\bar{A}$  ?
161. Дайте визначення операції ермітового спряження матриці.

162. Як позначається операція ермітового спряження матриці?
163. Нехай  $A$  — матриця. Тоді яка операція над матрицею позначається як  $A^*$ ?
164. Нехай  $A$  — матриця. Тоді яка операція над матрицею позначається як  $A^+$ ?
165. Яка операція над матрицею еквівалентна двом операціям— комплексного спряження та транспонування?
166. Якщо  $A$  — матриця, а  $\alpha$  — комплексне число, то чому дорівнює результат операції  $(\alpha A)^*$ ?
167. Якщо  $A$  та  $B$  — матриці, то чому дорівнює результат операції  $(A + B)^*$ ?
168. Якщо  $A$  та  $B$  — матриці, то чому дорівнює результат операції  $(AB)^*$ ?
169. Якщо  $A$  — матриця, то чому дорівнює результат операції  $(A^*)^*$ ?
170. Дайте визначення скалярного добутку у лінійному просторі над полем дійсних чисел.
171. Запишіть властивість симетрії скалярного добутку в евклідовому просторі.
172. В евклідовому просторі запишіть властивість однорідності скалярного добутку за першим аргументом.
173. Запишіть розподільчу властивість скалярного добутку в евклідовому просторі.
174. Запишіть властивість додатної визначеності скалярного добутку в евклідовому просторі.
175. Чи може скалярний добуток вектора самого на себе бути меншим за 0?
176. Чи може скалярний добуток вектора самого на себе дорівнювати 0?
177. Коли скалярний добуток вектора самого на себе дорівнює 0?
178. Чи можна в  $n$ -вимірному дійсному лінійному просторі скалярний добуток задати формулами ( $\xi_i$  та  $\eta_i$  — координати векторів  $x$  та  $y$ ,  $\alpha_i$  — довільні дійсні числа): а)  $(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$ ; б)  $(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \eta_i^2$ ; в)  $(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \eta_i$ ; г)  $(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \xi_i \eta_i$ ?
179. Чи можна в лінійному просторі неперервних функцій, які задано на інтервалі  $[-1, 1]$ , скалярний добуток задати формулами: а)  $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ ; б)  $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} x dx$ ; в)  $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} x^2 dx$ ; г)  $(f, g) = \int_{-1}^1 f^2(x) g^2(x) dx$ .
180. Дайте визначення евклідового простору.
181. Яка з наступних формул є справедливою для скалярного добутку в евклідовому просторі: а)  $(\Theta, x) = x$ ; б)  $(\Theta, x) = \Theta$ ; в)  $(\Theta, x) = 0$ ?
182. Які з наступних формул є справедливими для скалярного добутку в евклідовому просторі: а)  $(x, \alpha y) = (\alpha x, y)$ ; б)  $(x, \alpha y) = \alpha(y, x)$ ; в)  $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$ ?
183. Які з наступних формул є справедливими для скалярного добутку в евклідовому просторі: а)  $(x, y + z) = (x + y, x + z)$ ; б)  $(x, y + z) = (x + y, z)$ ; в)  $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ ?
184. Дайте визначення матриці Грама.
185. Запишіть формулу, яка визначає чому дорівнюють елементи матриці Грама у базисі  $\{e_i\}$ .
186. Чи залежить матриця Грама від вибору базису лінійного простору?
187. Що задає матриця Грама: а) білінійну форму; б) лінійний оператор; в) скалярний добуток?
188. Запишіть нерівність Коши-Буняковського в евклідовому просторі.

189. За яких умов для нерівності Коши-Буняковського в евклідовому просторі досягається рівність?
190. Дайте визначення довжини вектора.
191. Нерівність Коши-Буняковського в евклідовому просторі записується: а)  $(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$ ; б)  $(x,y)^2 \geq (x,x)(y,y)$ ; в)  $(x,y)^2 \leq (x,x)^2(y,y)^2$ ; г)  $(x,y) \leq (x,x)(y,y)$ .
192. Запишіть нерівність Коши-Буняковського в евклідовому просторі через довжини векторів.
193. Дайте визначення відстані між двома векторами.
194. Запишіть нерівність трикутника.
195. Нерівність трикутника записується: а)  $(x,y) \leq |x|+|y|$ ; б)  $|x+y| \leq |x||y|$ ; в)  $|x+y| \geq |x|+|y|$ ; г)  $|x+y| \leq |x|+|y|$ .
196. Дайте визначення кута між двома векторами евклідового простору.
197. Дайте визначення ортогональності двох векторів.
198. Який вектор лінійного простору є ортогональним до усіх інших векторів лінійного простору?
199. Дайте визначення ортогональної системи векторів.
200. Який вектор називається нормованим?
201. Дайте визначення ортонормованої системи векторів.
202. Дайте визначення символу Кронекера.
203. Як позначається символ Кронекера?
204. Ортонормова система векторів є завжди: а) лінійно незалежною; б) лінійно залежною; в) повною.
205. Коли скалярний добуток векторів, які задано координатами у певному базисі, дорівнює сумі добутків відповідних координат?
206. Що ми звикли називати «стандартним» визначенням скалярного добутку векторів?
207. Запишіть формулу обчислення скалярного добутку двох векторів, заданих своїми координатами в ортонормованому базисі.
208. Запишіть формулу для визначення довжини вектора через його координати в ортонормованому базисі.
209. За яких умов в евклідовому просторі існує ортонормований базис?
210. Опишіть метод ортогоналізації системи векторів.
211. Що називають методом Штурма і для чого він застосовується?
212. Як називається метод ортогоналізації системи векторів?
213. Метод Штурма застосовують для: а) приведення квадратичної форми до канонічного вигляду; б) ортогоналізації системи векторів; в) розв'язання неоднорідної системи лінійних рівнянь.
214. Яким чином з ортогональної системи векторів можна отримати ортонормовану систему векторів?
215. Дайте визначення ізоморфізма двох евклідових просторів.
216. Нехай  $V$  та  $V'$ —два евклідові простори. Евклідові простори  $V$  та  $V'$  будуть ізоморфними, якщо: а)  $V \cap V' = \Theta$ ; б)  $V \subset V'$ ; в)  $\dim V = \dim V'$ .
217. Дайте визначення скалярного добутку у лінійному просторі над полем комплексних чисел.
218. Запишіть першу властивість скалярного добутку в унітарному просторі (аналог властивості симетрії в евклідовому просторі).
219. В унітарному просторі запишіть властивість однорідності скалярного добутку за першим аргументом.
220. Запишіть розподільчу властивість скалярного добутку в унітарному просторі.
221. Запишіть властивість додатної визначеності скалярного добутку в унітарному просторі.
222. Коли в унітарному просторі скалярний добуток вектора самого на себе дорівнює нулю?
223. Дайте визначення унітарного простору.

224. Яка з наступних формул є справедливою для скалярного добутку в унітарному просторі: а)  $(\Theta, x) = 0$ ; б)  $(\Theta, x) = x$ ; в)  $(\Theta, x) = \Theta$ .
225. Які з наступних формул є справедливими для скалярного добутку в унітарному просторі: а)  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ ; б)  $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$ ; в)  $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$ ?
226. Які з наступних формул є справедливими для скалярного добутку в унітарному просторі: а)  $(x, y + z) = \overline{(x, y)} + \overline{(x, z)}$ ; б)  $(x, y + z) = (y + z, x)$ ; в)  $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ ?
227. Запишіть нерівність Коши-Буняковського в унітарному просторі.
228. Запишіть нерівність Коши-Буняковського в унітарному просторі через довжини векторів.
229. Поняття кута між векторами: а) вводиться і в евклідовому просторі, і в унітарному просторі; б) вводиться в унітарному просторі, але не вводиться в евклідовому; в) вводиться в евклідовому просторі, але не вводиться в унітарному; г) не вводиться ні в евклідовому просторі, ні в унітарному.
230. Який вектор називається перпендикулярним до лінійного підпростору?
231. Дайте визначення ортогонального доповнення до лінійного підпростору.
232. Як позначається ортогональне доповнення до лінійного підпростору?
233. Нехай  $L$ —лінійний підпростір та  $L^\perp$ —його ортогональне доповнення. Тоді найбільш точним є запис: а)  $V = L \oplus L^\perp$ ; б)  $V = L + L^\perp$ ; в)  $V = L \cap L^\perp$ .
234. Нехай  $L$ —лінійний підпростір та  $L^\perp$ —його ортогональне доповнення. Тоді: а)  $L \cap L^\perp = V$ ; б)  $L \cap L^\perp = \Theta$ ; в)  $L \cap L^\perp = L \cap L^\perp$ .
235. Нехай  $L$ —лінійний підпростір та  $L^\perp$ —його ортогональне доповнення. Тоді: а)  $\dim V = \dim L - \dim L^\perp$ ; б)  $\dim V = \dim L \cdot \dim L^\perp$ ; в)  $\dim V = \dim L + \dim L^\perp$ .
236. Дайте визначення ортогональної проєкції вектора  $x$  на лінійний підпростір  $L$ .
237. Як позначається ортогональна проєкція вектора  $x$  на лінійний підпростір  $L$ ?
238. Дайте визначення ортогональної складової вектора  $x$  до лінійного підпростору  $L$ .
239. Як позначається ортогональна складова вектора  $x$  до лінійного підпростору  $L$ ?
240. Ортогональна проєкція вектора на лінійний підпростір та ортогональна складова вектора до лінійного підпростору є: а) ортогональними векторами; б) паралельними векторами; в) колінеарними векторами?
241. Дайте визначення відстані між множинами  $M_1$  та  $M_2$ .
242. Відстань від вектора до лінійного підпростору дорівнює: а) ортогональній проєкції вектора; б) ортогональній складовій вектора; в) довжині ортогональної проєкції вектора; г) довжині ортогональної складової вектора?
243. Дайте визначення кута між вектором та лінійним підпростором.
244. У яких межах може приймати значення кут між вектором та лінійним підпростором?
245. Кут між вектором та лінійним підпростором дорівнює: а) відношенню довжини ортогональної проєкції до довжини вектора; б) відношенню ортогональної складової до вектора; в) відношенню довжини ортогональної проєкції до довжини вектора; г) відношенню ортогональної проєкції до вектора?
246. Опишіть метод, за яким вектор  $x$  можна розкласти на ортогональну проєкцію та ортогональну складову до лінійного підпростору  $L$ , якщо лінійний підпростір  $L$  задано базисними векторами  $\{e_i\}_1^n$ .



247. На основі властивостей ортогонального доповнення чому дорівнює наступний вираз:  $(L^\perp)^\perp$  ?
248. На основі властивостей ортогонального доповнення чому дорівнює наступний вираз:  $V^\perp$  ?
249. На основі властивостей ортогонального доповнення чому дорівнює наступний вираз:  $\Theta^\perp$  ?
250. На основі властивостей ортогонального доповнення чому дорівнює наступний вираз:  $(L_1 + L_2)^\perp$  ?
251. На основі властивостей ортогонального доповнення чому дорівнює наступний вираз:  $(L_1 \cap L_2)^\perp$  ?
252. На основі властивостей ортогонального доповнення, якщо  $L_1 \subset L_2$ , то має місце наступне співвідношення: а)  $L_1^\perp \subset L_2^\perp$ ; б)  $L_2^\perp \subset L_1^\perp$ ; в)  $L_1^\perp \cap L_2^\perp$ ; г)  $L_1^\perp \sqcup L_2^\perp$ .
253. Дайте визначення функціонала.
254. Дайте визначення лінійного функціонала.
255. Як прийнято позначати лінійний функціонал?
256. Запишіть властивість адитивності лінійного функціонала.
257. Запишіть властивість однорідності лінійного функціонала.
258. Чим відрізняються поняття лінійного функціонала та лінійної форми?
259. Дайте визначення коефіцієнтів лінійної форми.
260. Які два лінійних функціонали називаються рівними?
261. Як вводиться операція додавання двох лінійних функціоналів?
262. Як вводиться операція множення функціонала на число?
263. Що таке «лінійний простір лінійних функціоналів» (вказіть внутрішню та зовнішню операції, нейтральний елемент, протилежний елемент)?
264. Як називається лінійний простір лінійних функціоналів, які задано на лінійному просторі  $V_n$  ?
265. Як позначається лінійний простір, спряжений до  $V_n$  ?
266. Дайте визначення білінійного функціоналу.
267. Як прийнято позначати білінійний функціонал?
268. Запишіть формули, що визначають лінійність білінійного функціоналу за першим аргументом.
269. Запишіть формули, що визначають лінійність білінійного функціоналу за другим аргументом.
270. Чим відрізняються поняття білінійного функціоналу та білінійної форми?
271. Дайте визначення матриці білінійної форми.
272. Чи залежить матриця білінійної форми від вибору базису лінійного простору?
273. Дайте визначення симетричного білінійного функціоналу.
274. Дайте визначення антисиметричного білінійного функціоналу.
275. Дайте визначення квадратичної форми, що відповідає заданій білінійній формі  $\varphi(x, y)$ .
276. Запишіть формули, за якими довільний білінійний функціонал можна представити у вигляді суми симетричного та антисиметричного білінійних функціоналів.
277. Чи можна довільному білінійному функціоналу однозначно поставити у відповідність квадратичну форму?
278. Чи можна довільній квадратичній формі однозначно поставити у відповідність білінійний функціонал?
279. Який білінійний функціонал можна однозначно поставити у відповідність квадратичній формі?

280. Як називається симетричний білінійний функціонал, який можна однозначно поставити у відповідність квадратичній формі?
281. Яка квадратична форма відповідає антисиметричному білінійному функціоналу?
282. Дайте визначення полілінійного функціоналу.
283. Як прийнято позначати полілінійний функціонал?
284. Який полілінійний функціонал називається симетричним по парі індексів?
285. Який полілінійний функціонал називається антисиметричним по парі індексів?
286. Який полілінійний функціонал називається абсолютно симетричним?
287. Який полілінійний функціонал називається абсолютно антисиметричним?
288. Дайте визначення перестановки.
289. Наведіть приклад перестановки елементів числового ряду.
290. Дайте визначення непорядку у перестановці.
291. Як позначається і обчислюється кількість непорядків у перестановці?
292. Дайте визначення визначника квадратної матриці.
293. Як позначається визначник квадратної матриці?
294. На лекції поняття визначника було введено через: а) скалярний добуток; б) оператор; в) функціонал.
295. Поняття визначника вводиться через функціонал, який є: а) лінійним по кожному аргументу; б) лінійним по непарних аргументах; в) лінійним по парних аргументах.
296. Поняття визначника вводиться через функціонал, який є: а) абсолютно симетричним; б) абсолютно антисиметричним; в) додатно визначеним.
297. Поняття визначника вводиться через полілінійний функціонал. Запишіть умову нормування цього функціоналу.
298. Запишіть загальну формулу (через суму добутків елементів матриці), яка визначає значення визначника квадратної матриці.
299. Скільки доданків містить загальна формула (через суму добутків елементів матриці) визначення визначника квадратної матриці  $n$ -го порядку?
300. Для обчислення визначників якого порядку застосовують метод трикутників?
301. Для обчислення визначників якого порядку можна застосовувати метод розкриття визначника за елементами певного стовпчика (рядка) матриці?
302. Поясніть на прикладі як працює метод трикутників для розкриття визначника матриці третього порядку?
303. Поясніть на прикладі матриці третього порядку як працює метод розкриття визначника за елементами певного стовпчика (рядка) матриці?
304. На основі властивостей визначників запишіть чому дорівнює  $\det(A^T)$ ?
305. Визначник матриці обов'язково дорівнює 0, якщо: а) один із стовпчиків матриці містить усі 0; б) головна діагональ матриці містить усі 0; в) один із рядків матриці містить усі 0.
306. Визначник матриці обов'язково дорівнює 0, якщо: а) один із стовпчиків матриці є сумою двох інших; б) один з рядків матриці є різницею двох інших; в) один із стовпчиків матриці є добутком двох інших.
307. Чому дорівнює визначник матриці, коли один із стовпчиків (рядків) матриці містить загальний множник  $\alpha \neq 0$ ?
308. При зміні місцями двох стовпчиків матриці: а) визначник матриці міняє знак; б) визначник матриці не змінюється; в) визначник матриці множиться на коефіцієнт  $(-1)^{i+j}$ , де  $i$  та  $j$  – номери стовпчиків.
309. Дайте визначення мінору  $k$ -го порядку матриці  $A_{nm}$ .
310. Якщо з квадратної матриці  $n$ -го порядку викреслити  $i$ -ий рядок та  $j$ -ий стовпчик, то як називається визначник матриці, що залишилася?
311. Якщо з квадратної матриці  $n$ -го порядку викреслити  $i$ -ий рядок та  $j$ -ий стовпчик, то як позначається визначник матриці, що залишилася?

312. Дайте визначення алгебраїчного доповнення до елемента матриці  $a_{ij}$ .
313. Як позначається алгебраїчне доповнення до елемента матриці  $a_{ij}$ .
314. Запишіть формулу розкладання визначника матриці  $n$ -го порядку за  $i$ -им рядком (через алгебраїчні доповнення).
315. Запишіть формулу розкладання визначника матриці  $n$ -го порядку за  $j$ -им стовпчиком (через алгебраїчні доповнення).
316. На основі властивостей визначників запишіть чому дорівнює  $\det(\alpha A)$ , де  $\alpha$ —число,  $A$ —матриця.
317. На основі властивостей визначників запишіть чому дорівнює  $\det(A \cdot B)$ .
318. Який об'єкт у теорії визначників позначається як  $M_{\substack{i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k}}?$
319. Який об'єкт у теорії визначників позначається як  $\overline{M}_{\substack{i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k}}?$
320. Що називається алгебраїчним доповненням до мінору  $M_{\substack{i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k}}?$
321. Запишіть формулу та сформулюйте теорему Лапласа для визначника квадратної матриці.
322. Частинним випадком теореми Лапласа є наступний метод обчислення визначників: а) метод розкриття визначника за елементами певного рядка (стовпчика); б) метод трикутників; в) метод приведення матриці визначника до трикутного вигляду.
323. Поясніть сенс наступного методу обчислення визначників квадратної матриці: метод приведення до трикутного вигляду.
324. Поясніть сенс наступного методу обчислення визначників квадратної матриці: метод виділення лінійних множників.
325. Запишіть визначник Вандермонда.
326. Поясніть сенс наступного методу обчислення визначників квадратної матриці: метод представлення визначника у вигляді суми двох визначників.
327. Поясніть сенс наступного методу обчислення визначників квадратної матриці: метод рекурентних співвідношень.
328. Поясніть сенс наступного методу обчислення визначників квадратної матриці: метод зміни елементів матриці визначника.
329. Запишіть формулу, яка використовується при застосуванні методу зміни елементів матриці визначника для обчислення визначника квадратної матриці.
330. Запишіть загальний вигляд довільної системи лінійних рівнянь.
331. Дайте визначення матриці системи (системи лінійних рівнянь).
332. Дайте визначення вектора- стовпчика невідомих (системи лінійних рівнянь).
333. Дайте визначення вектора- стовпчика правих частин (системи лінійних рівнянь).
334. Запишіть як довільну систему лінійних рівнянь можна представити у матричному вигляді.
335. Дайте визначення однорідної системи лінійних рівнянь.
336. Дайте визначення неоднорідної системи лінійних рівнянь.
337. Дайте визначення розширеної матриці системи (системи лінійних рівнянь).
338. Дайте визначення сумісної системи лінійних рівнянь.
339. Дайте визначення визначеної системи лінійних рівнянь.
340. Якщо система лінійних рівнянь має розв'язки, то вона називається: а) правильною; б) простою; в) сумісною; г) визначеною?
341. Якщо система лінійних рівнянь має один єдиний розв'язок, то вона називається: а) правильною; б) простою; в) сумісною; г) визначеною?
342. Якщо система лінійних рівнянь не має розв'язків, то вона називається: а) несумісною; б) неправильною; в) сумісною; г) визначеною?

343. Однорідна система лінійних рівнянь завжди є: а) сумісною; б) визначеною; в) несумісною.
344. Який розв'язок завжди має довільна однорідна система лінійних рівнянь?
345. Сформулюйте теорему Крамера.
346. Коли можна застосовувати метод Крамера для отримання розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь?
347. Коли не можна застосовувати метод Крамера для отримання розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь?
348. Запишіть формули Крамера для отримання розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь.
349. Дайте визначення оберненої матриці.
350. Запишіть як позначається матриця, обернена до матриці  $A$ .
351. Доведіть, що матриця має тільки одну обернену (якщо існує).
352. На основі властивостей оберненої матриці запишіть чому дорівнює  $(A^{-1})^{-1}$ .
353. На основі властивостей оберненої матриці запишіть чому дорівнює  $(A \cdot B)^{-1}$ .
354. На основі властивостей оберненої матриці запишіть чому дорівнює  $\det(A^{-1})$ .
355. Яка необхідна і достатня умова того, щоб квадратна матриця мала обернену?
356. Опишіть спосіб побудови оберненої матриці (через алгебраїчні доповнення).
357. Яка матриця називається невивродженою?
358. Які ви знаєте способи побудови оберненої матриці?
359. Опишіть спосіб побудови оберненої матриці (через дописування одиничної матриці).
360. Грунтуючись на визначенні оберненої матриці, як можна записати розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь  $Ax = b$  у матричному вигляді?
361. Нехай  $A, B, C$ — невивроджені матриці, а  $X$ — невідома матриця. Запишіть у матричному вигляді розв'язок матричного рівняння:  $A \cdot X \cdot B = C$ .
362. Нехай  $A, B, C, P$ — невивроджені матриці, а  $X$ — невідома матриця. Запишіть у матричному вигляді розв'язок матричного рівняння:  $A \cdot X \cdot B \cdot C = P$ .
363. Нехай  $A, B, C, P$ — невивроджені матриці, а  $X$ — невідома матриця. Запишіть у матричному вигляді розв'язок матричного рівняння:  $A \cdot B \cdot X \cdot C = P$ .
364. Дайте визначення базисного мінору матриці.
365. Скільки базисних мінорів має довільна матриця: а) тільки один; б) не більше двох; в) на кількість базисних мінорів нема обмежень?
366. Дайте визначення базисних рядків матриці.
367. Дайте визначення базисних стовпчиків матриці.
368. Дайте визначення рангу матриці.
369. Як позначається ранг матриці?
370. Сформулюйте теорему про базисний мінор.
371. Рядки базисного мінору є: а) лінійно незалежними; б) лінійно залежними; в) лінійною комбінацією стовпчиків базисного мінору.
372. Стовпчики базисного мінору є: а) лінійною комбінацією рядків базисного мінору; б) лінійно незалежними; в) лінійно залежними.
373. Будь- який рядок матриці  $A$  є: а) лінійною комбінацією базисних стовпчиків матриці; б) лінійно незалежним від базисних рядків матриці; в) лінійною комбінацією базисних рядків матриці.
374. Будь- який стовпчик матриці  $A$  є: а) лінійною комбінацією базисних стовпчиків матриці; б) лінійною комбінацією базисних рядків матриці; в) лінійно незалежним від базисних стовпчиків матриці.
375. Яка умова є необхідною і достатньою, щоб визначник матриці дорівнював 0?
376. Як Ви будете проводити обчислення рангу матриці?
377. При транспонуванні матриці: а) її ранг не змінюється; б) її ранг збільшується на 1; в) її ранг зменшується на 1.

378. Коли поміняти місцями два рядки матриці, то її ранг: а) змінює знак; б) дорівнює 0; в) не змінюється.
379. Коли поміняти місцями два стовпчика матриці, то її ранг: а) змінює знак; б) дорівнює 0; в) не змінюється.
380. При множенні довільного рядка на константу, відмінну від 0, ранг матриці: а) збільшується на константу; б) зменшується на константу; в) не змінюється; г) дорівнює 0.
381. При множенні довільного стовпчика на константу, відмінну від 0, ранг матриці: а) збільшується на константу; б) зменшується на константу; в) не змінюється; г) дорівнює 0.
382. При множенні довільного рядка на 0 ранг матриці: а) не змінюється; б) зменшується на 1; в) можливі обидва попередні варіанти.
383. При множенні довільного стовпчика на 0 ранг матриці: а) не змінюється; б) зменшується на 1; в) можливі обидва попередні варіанти.
384. Коли до довільного рядка матриці додати лінійну комбінацію інших рядків, то: а) ранг матриці дорівнює 0; б) зменшується на 1; в) не змінюється; г) можливі усі попередні варіанти.
385. Коли до довільного стовпчика матриці додати лінійну комбінацію інших стовпчиків, то: а) ранг матриці дорівнює 0; б) зменшується на 1; в) не змінюється; г) можливі усі попередні варіанти.
386. Чи змінюється ранг матриці при множенні базисного рядка на 0 (прийняти до уваги, що базисний мінор матриці не є єдиним)?
387. За якої умови однорідна система лінійних рівнянь має тільки тривіальний розв'язок?
388. За якої умови однорідна система лінійних рівнянь має не тільки тривіальний розв'язок?
389. Сума двох розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь: а) є тривіальним розв'язком системи; б) не є розв'язком системи; в) також є розв'язком системи.
390. Що представляє собою множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь?
391. Чому дорівнює розмірність лінійного простору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь  $Ax = 0$  ?
392. Опишіть спосіб побудови базису лінійного простору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь  $Ax = 0$  (спираючись на формулу  $\dim L = n - \text{rang} A$ ).
393. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.
394. За якої умови неоднорідна система лінійних рівнянь є сумісною?
395. За якої умови неоднорідна система лінійних рівнянь є визначеною?
396. Сума двох розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь: а) також є розв'язком неоднорідної системи; б) є розв'язком відповідної однорідної системи; в) не є розв'язком неоднорідної системи.
397. Різниця двох розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь: а) не є розв'язком відповідної однорідної системи; б) також є розв'язком неоднорідної системи; в) є розв'язком відповідної однорідної системи.
398. Сума будь-якого розв'язку неоднорідної системи лінійних рівнянь та будь-якого розв'язку відповідної однорідної системи лінійних рівнянь: а) не є розв'язком неоднорідної системи; б) також є розв'язком неоднорідної системи; в) є розв'язком відповідної однорідної системи.
399. Сформулюйте теорему про загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь.
400. Зробіть аббревіатурний запис теореми про загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь.
401. Сформулюйте теорему, яка задається аббревіатурою:  
 $Z.P.H.C. = \check{C}.P.H.C. + Z.P.O.C.$

402. Як знайти розв'язки неоднорідної системи лінійних рівнянь, якщо  $\text{rang}A \neq \text{rang}\tilde{A}$  ?
403. Як знайти розв'язки неоднорідної системи лінійних рівнянь, якщо  $\text{rang}A = \text{rang}\tilde{A} = n$  ?
404. Як знайти розв'язки неоднорідної системи лінійних рівнянь, якщо  $\text{rang}A = \text{rang}\tilde{A} < n$  .
405. Яка система векторів називається фундаментальною системою розв'язків системи рівнянь  $Ax = 0$  ?
406. Що представляє собою множина розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь?
407. Опишіть метод Гауса для розв'язання системи лінійних рівнянь.
408. Опишіть метод виключення невідомих для розв'язання системи лінійних рівнянь.
409. Що називають методом Гауса: а) метод розв'язання системи лінійних рівнянь; б) метод ортогоналізації системи векторів; в) метод приведення квадратичної форми до канонічного вигляду?
410. Що називають «альтернативою Фредгольма»?
411. Нехай задано неоднорідну систему лінійних рівнянь  $Ax = b$  . Якщо відповідна однорідна система лінійних рівнянь має тільки тривіальний розв'язок, то неоднорідна система лінійних рівнянь (на основі «альтернативи Фредгольма»): а) не має розв'язків; б) має тільки один розв'язок; в) має більше одного розв'язку.
412. Нехай задано неоднорідну систему лінійних рівнянь  $Ax = b$  . Якщо відповідна однорідна система лінійних рівнянь має не тільки тривіальний розв'язок, то неоднорідна система лінійних рівнянь (на основі «альтернативи Фредгольма»): а) може не мати розв'язків; б) може мати тільки один розв'язок; в) може мати більше одного розв'язку.
413. Яка квадратична форма називається не виродженою?
414. Яка квадратична форма називається додатно визначеною?
415. Яка квадратична форма називається від'ємно визначеною?
416. Які квадратичні форми називаються знакопостійними?
417. Яка квадратична форма називається квазізнакопостійною?
418. Яка квадратична форма називається знаковмінною?
419. Яка з симетричних білінійних форм може задавати скалярний добуток у лінійному просторі: а) полярна до від'ємно визначеної квадратичної форми; б) полярна до додатно визначеної квадратичної форми; в) полярна до знаковмінної квадратичної форми?
420. Матриця квадратичної форми: а) не залежить від вибору базису; б) залежить від вибору базису; в) однакова в усіх ортонормованих базисах.
421. Дайте визначення канонічного базису квадратичної форми.
422. Дайте визначення канонічного вигляду квадратичної форми.
423. Дайте визначення нормального вигляду квадратичної форми.
424. Дайте визначення канонічних коефіцієнтів квадратичної форми.
425. Запишіть формулою вигляд квадратичної форми у канонічному базисі.
426. Який вигляд має матриця квадратичної форми у канонічному базисі?
427. У чому полягає метод Лагранжа для приведення квадратичної форми до канонічного вигляду?
428. У чому полягає метод виділення повних квадратів для приведення квадратичної форми до канонічного вигляду?
429. Що називають методом Лагранжа: а) метод приведення квадратичної форми до канонічного вигляду; б) метод розв'язання системи лінійних рівнянь; в) метод ортогоналізації системи векторів?
430. У чому полягає метод Якобі для приведення квадратичної форми до канонічного вигляду?

431. Запишіть формули для визначення діагональних елементів матриці квадратичної форми у канонічному базисі (за методом Якобі).
432. Що називають методом Якобі: а) метод приведення квадратичної форми до канонічного вигляду; б) метод розв'язання системи лінійних рівнянь; в) метод ортогоналізації системи векторів?
433. Сформулюйте критерій Сильвестра.
434. Критерій Сильвестра використовується для: а) приведення квадратичної форми до канонічного вигляду; б) розв'язання неоднорідної системи лінійних рівнянь; в) визначення додатної визначеності квадратичної форми; г) ортогоналізації системи векторів?
435. Яку власну назву має критерій додатної визначеності квадратичної форми?
436. Коли квадратична форма є додатно визначеною (за критерієм Сильвестра)?
437. Коли квадратична форма є від'ємно визначеною (за наслідком з критерію Сильвестра)?
438. Сформулюйте закон інерції квадратичних форм.
439. Дайте визначення оператора, який діє з  $V_1$  в  $V_2$ .
440. Дайте визначення лінійного оператора.
441. Що називають нульовим оператором?
442. Що називають одиничним оператором?
443. Що називають оператором подібності?
444. Що називають оператором диференціювання?
445. Які два лінійні оператори називаються рівними?
446. Дайте визначення суми двох лінійних операторів.
447. Дайте визначення операції множення лінійного оператора на число.
448. Визначте лінійний простір лінійних операторів, які задано на  $V$  (внутрішня та зовнішня операції, нейтральний елемент, протилежний елемент).
449. Дайте визначення операції множення двох лінійних операторів.
450. Як можна задати другу внутрішню операцію на лінійному просторі лінійних операторів?
451. Як вводиться поняття матриці лінійного оператора?
452. Запишіть формулу, яка визначає елементи матриці лінійного оператора.
453. Взаємнооднозначне співвідношення між лінійними операторами та квадратними матрицями можна ввести: а) незалежно від вибору базису; б) у заданому базисі; в) тільки в ортонормованому базисі.
454. Опишіть метод побудови матриці лінійного оператора у заданому базисі.
455. Дайте визначення образу лінійного оператора.
456. Як позначається образ лінійного оператора?
457. Дайте визначення ядра лінійного оператора.
458. Як позначається ядро лінійного оператора?
459. Як визначити розмірність образу лінійного оператора, коли лінійний оператор задано матрицею?
460. Як визначити розмірність ядра лінійного оператора, коли лінійний оператор задано матрицею?
461. Нехай  $V$  — лінійний простір, в якому діє лінійний оператор  $A$ . Яка з наступних формул є найбільш коректною: а)  $V = M(A) \cap N(A)$ ; б)  $V = M(A) + N(A)$ ; в)  $V = M(A) \oplus N(A)$  ?
462. Що називають дефектом лінійного оператора?
463. Дайте визначення невивродженого лінійного оператора.
464. Чому дорівнює ядро невивродженого лінійного оператора?
465. Як визначити розмірність образу невивродженого лінійного оператора, який задано квадратною матрицею?

466. Доведіть, що при дії лінійного оператора з  $V_1$  в  $V_2$  нейтральний елемент з  $V_1$  відображається в нейтральний елемент з  $V_2$ .
467. Якщо лінійний оператор  $A$  є невивороненим, то що можна сказати про визначник матриці лінійного оператора?
468. За якої умови лінійний оператор  $A$  має обернений?
469. Якщо лінійний оператор  $A$  має обернений, то що можна сказати про визначник матриці лінійного оператора?
470. Чому дорівнює дефект невивороненого оператора?
471. Доведіть, що невиворонений лінійний оператор, що діє з  $V_1$  в  $V_2$ , встановлює взаємнооднозначне співвідношення між векторами  $V_1$  та  $V_2$ .
472. Невиворонений лінійний оператор переводить лінійно незалежні вектори в: а) лінійно залежні вектори; б) лінійно незалежні вектори; в) ортогональні вектори.
473. Дайте визначення лінійного підпростору, інваріантного до лінійного оператора.
474. Відносно яких двох лінійних операторів є інваріантними будь-які лінійні підпростори лінійного простору, в якому ці оператори діють?
475. Які два лінійні підпростори довільного лінійного простору є інваріантними відносно будь-яких операторів, що діють в цьому просторі?
476. Якщо лінійний підпростір  $V_1$  є інваріантним відносно лінійного оператора  $A$  ( $\det A \neq 0$ ), то: а)  $V_1$  не є інваріантним підпростором оберненого лінійного оператора  $A^{-1}$ ; б)  $V_1$  є інваріантним підпростором оберненого лінійного оператора  $A^{-1}$ ; в)  $V_1$  є інваріантним підпростором оберненого лінійного оператора  $A^{-1}$ , якщо  $\det A > 0$ .
477. Дайте визначення власного вектора лінійного оператора.
478. Чи може власний вектор лінійного оператора бути нейтральним елементом?
479. Дайте визначення власного значення лінійного оператора.
480. Чи може власне значення лінійного оператора дорівнювати 0?
481. Нехай  $V_1$ —одновимірний інваріантний підпростір лінійного оператора  $A$ , тоді: а) серед векторів  $V_1$  існує один власний вектор лінійного оператора  $A$ ; б) серед векторів  $V_1$  не існує власних векторів лінійного оператора  $A$ ; в) усі вектори  $V_1$  (окрім  $\Theta$ ) є власними векторами лінійного оператора  $A$ .
482. Нехай  $e_1$ —власний вектор лінійного оператора  $A$ , тоді: а) усі вектори лінійної оболонки  $L(e_1)$  є власними векторами лінійного оператора  $A$ , але їм відповідають різні власні значення; б) усі вектори лінійної оболонки  $L(e_1)$  (окрім власне  $e_1$ ) не є власними векторами лінійного оператора  $A$ ; в) усі вектори лінійної оболонки  $L(e_1)$  (окрім  $\Theta$ ) є власними векторами лінійного оператора  $A$  і при цьому їм відповідає одне власне значення.
483. Опишіть метод знаходження власних векторів та власних значень лінійного оператора.
484. Дайте визначення характеристичного многочлена лінійного оператора  $A$ .
485. Як знайти власні значення лінійного оператора?
486. Як знайти власні вектори лінійного оператора?
487. Знайдіть власні вектори та власні значення лінійного оператора, заданого матрицею  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
488. Знайдіть власні вектори та власні значення лінійного оператора, заданого матрицею  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ .



489. Знайдіть власні вектори та власні значення лінійного оператора, заданого матрицею  $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .
490. Який вигляд має матриця лінійного оператора у базисі власних векторів?
491. Власні вектори лінійного оператора, які відповідають різним власним значенням  $\epsilon$ : а) лінійно залежними; б) лінійно незалежними; в) пропорційними один одному.
492. Дайте визначення спектру лінійного оператора.
493. Дайте визначення сліду матриці.
494. Для всякого лінійного оператора  $A$  у дійсному лінійному просторі розмірності  $n > 2$  існує: а) тільки один одновимірний інваріантний лінійний простір; б) тільки один двовимірний інваріантний лінійний простір; в) одновимірний або двовимірний інваріантний лінійний простір.
495. Якщо  $\{\lambda_i\}_1^n$  — власні значення лінійного оператора  $A$ , то чому дорівнюють власні значення оберненого лінійного оператора  $A^{-1}$  за умови його існування?