3. ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ
по курсу « ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА».

Смысловой модуль 1. Описание механических систем методами Ньютона и Лагранжа.

Тема 1. *Обобщенные координаты и связи.*

1. Законы Ньютона. Пределы применимости классической механики.

2. Описание положения материальной точки (частицы).
Обобщенные координаты. Степени свободы физической системы.
Описание положения системы N материальных точек.

3. Связи голономные и неголономные, склерономные и реномные.
Описание положения системы N материальных точек (частиц) без связей и со связями.

Тема 2. *Механические системы.*

1. Принцип причинности в физике. Начальные условия для материальной точки. Полный набор функций системы. Законы Ньютона.

2. Определение системы с n степенями свободы. Определение механической системы. Функция Лагранжа механической системы. Уравнение Лагранжа.

Тема 3. *Принцип наименьшего действия.*

1. Принцип наименьшего действия. Получить уравнение Лагранжа.

2. Эквивалентные функции Лагранжа.

3. Свойство аддитивности для функций Лагранжа невзаимодействующих механических систем.

4. Функция Лагранжа взаимодействующих механических систем. Функция Лагранжа механической системы во внешнем поле.

Тема 4. *Интегралы движения.*

1. Определение обобщенного импульса и обобщенной силы. Обобщенное уравнение Ньютона. Циклическая координата. Сохранение импульса, который отвечает циклической координате.
2. Определение интегралов движения механической системы. Число независимых интегралов движения для механической системы с n степенями свободы, когда время однородно.

3. Однородность времени. Обратимость эволюции (движения) механической системы, когда время однородно.

4. Определение энергии механической системы. Сохранение энергии при однородности времени. Условие аддитивности энергии.

Смысловой модуль 2. Применение общей теории Лагранжа для описания материальных точек.

Тема 5. *Инерциальные системы отсчета.*

1.Определение инерциальной системы отсчета. Преобразование и принцип относительности Галилея.

2. Функция Лагранжа , импульс и энергия свободной материальной точки.

Тема 6. *Функция Лагранжа системы материальных точек.*

1. Функция Лагранжа, импульс и энергия материальной точки во внешнем поле. Второй закон Ньютона для материальной точки во внешнем поле.

2. Функция Лагранжа, импульс и энергия материальной точки с голономными связями.

3. Функция Лагранжа математического маятника в поле силы тяжести. Малые колебания математического маятника.

4. Функция Лагранжа, импульс и энергия замкнутой системы материальных точек. Второй закон Ньютона.

5. Функция Лагранжа импульс и энергия взаимодействующей системы материальных точек во внешнем поле. Второй закон Ньютона.

6. Функция Лагранжа, импульс и энергия системы материальных точек с голономными связями.

Тема 7. *Законы сохранения.*

1. Сохранение полного импульса замкнутой системы материальных точек в однородном пространстве. Третий закон Ньютона.

2. Сохранение компоненты импульса в направлении пространственной однородности.

3. Сохранение момента импульса в изотропном пространстве.

4. Сохранение проекции момента импульса на ось симметрии пространства.

Тема 8. *Преобразования энергии, импульса и момента.*

1. Преобразование импульса при переходе от одной инерциальной системы к другой. Система центра инерции. Центр инерции.

2. Энергия системы материальных точек в различных инерциальных системах отсчета, которые движутся относительно друг друга. Внутренняя энергия.

3. Преобразование момента импульса при смещении и относительном движении инерциальных систем отсчета.

Тема 9. *Механическое подобие и вириальная теорема.*

1. Определение подобных движений механической системы. Свойства функции Лагранжа, при которых возможны подобные движения.

2. Механическое подобие, когда потенциальная энергия является однородной функцией координат. Третий закон Кеплера.

3. Соотношение между средними по времени значениями кинетической и потенциальной энергии, которая является однородной функцией координат, при движении в ограниченной области пространства (Вириальная теорема).

Смысловой модуль 3. Интегрирование уравнений движения.

Тема 10. *Одномерное движение и задача двух тел.*

1. Интегрирование уравнения движения механической системы с одной степенью свободы, когда время однородно.

2. Сведение задачи двух тел к движению одного тела с приведенной массой в центральном поле.

Тема 11. *Движение в центральном поле.*

1. Число степеней свободы при движении частицы в центральном поле. Получить функцию Лагранжа частицы в центральном поле.

2. Интегрирование уравнений движения частицы в центральном поле. Учесть, что функция Лагранжа частицы в центральном поле

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r).$$

3. Условие замкнутости траектории движения частицы в центральном поле. Учесть, что траектория движения частицы в центральном поле

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2 m}\frac{dr}{\dot{r}} \quad \text{где} \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right)}.$$

4.Симметрия траектории движения частицы в центральном поле. Учесть, что траектория движения частицы в центральном поле

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2 m}\frac{dr}{\dot{r}} \quad \text{где} \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right)}.$$

5. Условие проникновения частицы в центр поля. Учесть, что

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right)}.$$

Тема 12. *Задача Кеплера.*

1. Качественно рассмотреть возможные движение частицы в потенциальных полях $U = \pm\frac{\alpha}{r}$ при разных значениях энергии *E*. Учесть, что траектория движения частицы в центральном поле

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2 m}\frac{dr}{\dot{r}} \quad \text{где} \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right)}.$$

2. Рассмотреть возможные траектории движение частицы в потенциальных полях $U = \pm\frac{\alpha}{r}$ при разных значениях энергии *E*. Учесть, что траектория движения частицы в таких полях

$$\varphi = arc\cos\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r} \pm 1\right) \text{ где } p \text{ и } e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

соответственно параметр и эксцентриситет орбиты.

Смысловой модуль 4. Рассеяние, столкновение и распад частиц.

Тема 13. *Рассеяние частиц.*

1. Рассеяние частиц. Угол рассеяния и его зависимость от прицельного расстояния и скорости частицы до рассеяния.

2. Прицельное расстояние и эффективное сечение рассеяния.

3. Эффективное сечение рассеяния в полях $U = \pm\frac{\alpha}{r}$. (Формула Резерфорда). Учесть, что траектория движения частицы в таких полях

$$\varphi = arc\cos\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r} \pm 1\right) \text{ где } p \text{ и } e = \sqrt{1 + \left(\frac{m\rho v_\infty^2}{\alpha}\right)^2}$$

соответственно параметр и эксцентриситет орбиты.

Тема 14. *Упругие столкновения и распад частиц.*

1. Упругие столкновения частиц. Соотношение между конечными и начальными значениями скорости в системе центра инерции и в лабораторной системе координат.

2. Распад одной частицы на две. Импульсы и скорости образовавшихся частиц.

3. Распад одной частицы на *N>2* частиц. Верхний предел кинетической энергии, которую может иметь образовавшаяся при распаде частица.

Смысловой модуль 5. Малые колебания.

Тема 15. *Свободные одномерные колебания.*

1. Положение равновесия механической системы. Устойчивое и неустойчивое положение равновесия. Уравнения, определяющие положение устойчивого и неустойчивого равновесия механической системы с одной степенью свободы.

2. Функция Лагранжа и уравнение одномерного движения механической системы вблизи положения равновесия. Свободные одномерные колебания вблизи точки устойчивого равновесия и движение механической системы вблизи точки неустойчивого равновесия.

Тема 16. *Вынужденные колебания.*

1. Функция Лагранжа и уравнение одномерного движения механической системы вблизи положения устойчивого равновесия при наличии внешнего поля.

2. Получить бщее решение уравнения $m\ddot{x}+kx=F(t)$, которое описывает вынужденные колебания.

3. Исходя из общего решения уравнения, которое описывает вынужденные колебания

$$\xi=e^{i\omega t}\left(\int_0^t F(t')\,e^{-i\omega t'}\,dt'+\xi_0\right) \text{ где } \quad \xi=\dot{x}+i\,\omega x$$

найти $x(t)$, когда внешняя сила $F(t')=f\cos\gamma t$. Рассмотреть случаи $\gamma=\omega$ и $\gamma\neq\omega$.

4. Исходя из решения уравнения, которое описывает вынужденные колебания

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f\cos\gamma t}{m(\omega^2-\gamma^2)}$$

рассмотреть движения механической системы вблизи резонанса. Биение при вынужденных колебаниях.

Тема 17. *Колебания системы со многими степенями свободы.*

1. Уравнения, определяющие положения устойчивого и неустойчивого равновесия системы со многими степенями свободы.

2. Система уравнений, которая описывает малые колебания механической системы со многими степенями свободы вблизи положения равновесия.

3. Найти решения системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}\ddot{x}_j + k_{ij}x_j\right) = 0 \quad \text{где} \quad i = 1,2\ldots n,$$

которая описывает малые колебания механической системы с n степенями свободы вблизи положения устойчивого равновесия .

4. Исходя из решения системы уравнений, которая описывает малые колебания механической системы с n степенями свободы вблизи положения устойчивого равновесия

$$x_l = \sum_{\alpha=1}^{n} \Delta_l^{(\alpha)} a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)$$

ввести нормальные (главные) координаты. Получить функцию Лагранжа в нормальных координатах. Получить в нормальных координатах уравнение движения при наличии внешней силы.

Тема 18. *Затухающие колебания.*

1. Получить уравнение Лагранжа для системы с одной степенью свободы при наличии силы трения. Найти скорость изменения энергии системы за счет трения. Дать определение диссипативной функции.

2. Исходя из функции Лагранжа $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$, которая описывает малые колебания механической системы, получить уравнение движения при наличии силы трения. Найти его решения.

3. Получить уравнение Лагранжа для системы со многими степенями свободы при наличии силы трения. Найти скорость изменения энергии системы за счет трения. Дать определение диссипативной функции.

4. Исходя из функции Лагранжа $L = \frac{1}{2}\sum_{l,j=1}^{n}\left(m_{lj}\dot{x}_l\dot{x}_j - k_{lj}x_l x_j\right)$ получить уравнения малых колебаний системы со многими степенями свободы при наличии трения и обсудить их решение.

Тема 19. *Вынужденные колебания при наличии трения.*

1. Уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы при наличии трения и его решение для случая периодической внешней силы.

2. Исходя из решения уравнения вынужденных колебаний системы при наличии трения

$$x = \frac{f\cos(\gamma t + \delta)}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \gamma^2\right)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}$$

рассмотреть колебания вблизи резонанса, когда собственная частота близка к частоте внешней силы γ. Здесь $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ - декремент затухания, а сила трения $f_{тр} = -\alpha\dot{x}$. Найти поглощение энергии при установившихся колебаниях и дисперсионную зависимость поглощения от частоты.

Смысловой модуль 6. Твердое тело. Неинерциальные системы отсчета.

Тема 20. *Поступательное движение и угловая скорость твердого тела.*

1. Описание твердого тела в механике. Скорость движения точек твердого тела как функция скорости поступательного движения и угловой скорости. Скорость поступательного движения и угловая скорость в разных системах отсчета, жестко связанных с твердым телом.

Тема 21. *Функция Лагранжа и уравнения движения твердого тела.*

1. Функция Лагранжа твердого тела.

2. Определение тензора инерции. Тензор инерции тела вращения.

3. Момент импульса твердого тела.

4. Уравнения движения твердого тела.

Тема 22. *Углы Эйлера и симметричный волчок.*

1. Углы Эйлера. Угловая скорость как функция углов Эйлера и их производных по времени.

2. Рассмотреть свободное движение симметричного волчка. Учесть, что проекции угловой скорости как функции углов Эйлера и их производных по времени равны

$$\Omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi;\ \Omega_2 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi;\ \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}.$$

Тема 23. *Движение в неинерциальной системе отсчета.*

1. Функция Лагранжа и уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета, которая движется с ускорением относительно инерциальной системы отсчета.

2. .Функция Лагранжа и уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета, которая вращается относительно инерциальной системы отсчета.

3. Исходя из функции Лагранжа в неинерциальной системе отсчета

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2 - m\vec{W}\vec{r} - U$$

найти ускорение частицы в неинерциальной системе отсчета.

4. Исходя из функции Лагранжа во вращающейся системе отсчета

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2 - U$$

найти энергию, импульс и момент в неинерциальной системе отсчета.

Смысловой модуль 7. Основы механики Гамильтона.

Тема 24. *Уравнения Гамильтона.*

1. Отличие метода Гамильтона от метода Лагранжа. Преобразование Лежандра.

2. Переход от формализма Лагранжа к формализму Гамильтона с помощью преобразования Лежандра. Сохранение энергии.

Тема 25. *Функции Гамильтона, Лагранжа и Рауса.*

1. Функция Гамильтона математического маятника в поле силы тяжести и материальной точки во внешнем поле .

2. Переход от формализма Гамильтона к формализму Лагранжа с помощью преобразования Лежандра.

3. Переход от формализма Лагранжа к формализму Рауса с помощью преобразования Лежандра.

Тема 26. *Канонические преобразования.*

1. Преимущество метода Гамильтона при наличии циклических координат.

2. Получение канонических уравнений Гамильтона исходя из вариационного принципа.

3. Канонические преобразования. Производящие функции.

Тема 27. *Траектория в фазовом пространстве движения вблизи точки устойчивого равновесия.*

1. Определение фазового пространства механической системы с *n* степенями свободы.Уравнения, которые определяют точки равновесия механической системы в фазовом пространстве.

2. Движение механической системы с одной степенью свободы вблизи точки устойчивого равновесия. Траектория в фазовой плоскости этого движения.

Тема 28. *Теорема Лиувилля и скобки Пуассона.*

1. Сохранение фазового объема при канонических преобразованиях. (Общая теорема Лиувилля).

2. Сохранение фазового объема при эволюции (движении) механической Системыю. (Частная теорема Лиувилля).

3. Определение скобок Пуассона. Основные свойства скобок Пуассона. Скобки Пуассона для координат и импульсов. Запись полной производной по времени от функции координат, импульсов и времени с помощью скобок Пуассона. Запись канонических уравнений с помощью скобок Пуассона. Теорема Пуассона.

Смысловой модуль 8. Метод Гамильтона – Якоби.

Тема 29. *Уравнение Гамильтона – Якоби.*

1. Уравнение Гамильтона-Якоби. Производящая функция канонического преобразования к постоянным значениям координат и импульсов. Действие, как функция времени.

2. Укороченное уравнение Гамильтона – Якоби, когда время однородно. Производящая функция преобразования к циклическим координатам и постоянным импульсам.

3. Решение уравнения Гамильтона – Якоби для системы с одной степенью свободы, когда время однородно.

Тема 30. *Переменные «действие – угол» и адиабатические инварианты для системы с одной степенью свободы.*

1. Переменные «действие - угол» для системы с одной степенью свободы. Зависимость от времени переменных «действие - угол».

2. Адиабатические инварианты системы с одной степенью свободы.

3. Переменные «действие – угол» и адиабатические инварианты для малых одномерных колебаний.

Тема 31. *Переменные «действие – угол» и адиабатические инварианты для системы с произвольным числом степеней свободы.*

1. Разделение переменных в методе Гамильтона – Якоби. Периодическое и условно периодическое движение в фазовом $2n$ – мерном пространстве ($n > 1$). Переменные «действие – угол» для системы с произвольным числом степеней свободы ($n > 1$). Адиабатические инварианты.