ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Задачи для практических занятий (4семестр)

1. Законы Ньютона. Принцип наименьшего действия.

1.1. Материальная точка массы m падает вертикально вниз без начальной скорости в среде, сопротивление которой пропорционально скорости. Найти путь, пройденный к моменту t.

1.2. Парашютист спускается на парашюте, имеющий форму полусферы радиуса $R = 4\,см$. Его масса вместе с массой парашюта равна 82 кг. Найти скорость v парашютиста через две секунды после начала спуска и путь, пройденный за время t. Считать, что сила сопротивления воздуха $F_1 = 0,00081 S v^2$, где S - площадь наибольшего сечения, перпендикулярного к направлению движения, v - скорость движения.

1.3. Известно, что $f = f\left(x, y(x), y'(x), y''(x)\right)$. Найти функцию $y(x)$, для которой интеграл $I = \int\limits_{x_0}^{x_1} f\left(x, y, y', y''\right) dx$ имел бы экстремум.

1.4. Доказать, что кратчайшим расстоянием между двумя точками пространства является длина отрезка прямой, соединяющей эти точки.

1.5. Найти кратчайшую кривую между двумя точками сферы (геодезическая линия сферы).

1.6. Определить кривую, соединяющую заданные точки A и B, при движении по которой материальная точка скатится из точки A в точку B в кратчайшее время. (трением и сопротивлением среды пренебречь)

2. Функция Лагранжа

2.1. Найти L двойного плоского маятника (длины маятников l_1, l_2 и массы m_1 и m_2), находящимся в однородном поле тяжести $\mathbf{g}$.

2.2. Найти L плоского маятника массой m, точка подвеса котрого совершает горзонтальные колебания по закону $a\cos\gamma t$.

2.3. Найти L плоского маятника массой m, точка подвеса котрого совершает вертикальные колебания по закону $a\cos\gamma t$.

2.4. Найти L материальной точки с массой m, находящейся в поле тяжести и двигающейся по гладкой сфере радиуса R.

2.5. Найти L материальной точки с массой m, находящейся в поле тяжести и двигающейся по гладкой поверхности конуса с углом 2α.

2.6. Построить L системы, состоящей из двух материальных точек, находящихся в поле тяжести и соединённых стержнем длины a и пренебрежимо малой массой. Точка m_1 может двигаться только по вертикали, а точка m_2 - по горизонтали.

2.7. Две точки с массами m_1 и m_2, соединённые стержнем a пренебрежимо малой массы перемещаются по сторонам неподвижного прямого угла, расположенного в вертикальной плоскости (стороны угла образуют углы $\frac{\pi}{4}$ с горизонтом). Найти L системы.

2.8. Найти L плоского маятника массы m, с длиной нити a, по нити котрого движется материальная точка m_2 с постоянной скоростью v.

2.9. Найти L системы точек m_1 и m_2, соединённых гладкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок пренебрежимой массы. Длина нити за вычетом половины длины окружности блока равна l. (Машина Атвуда)

2.10. Найти L плоского маятника с массой m, точка подвеса котрого равномерно движется по вертикальной окружности радиуса a с постоянной угловой скоростью ω.

3. Законы сохранения

3.1 Материальной точке, находящейся на поверхности Земли, сообщена скорость, достаточная для преодоления земного притяжения. Найти $v_{\min}$.

3.2 Частица с массой m, движущаяся со скоростью $\mathbf{v}_1$,переходит из полупространства, в котором её потенциальная энергия постоянна и равна U_1, в полупространство, где эта энергия тоже постоянна, но равна U_2. Определить изменение направления движения частицы.

3.3 Ядро, находящееся в покое, претерпевая радиоактивный распад, испускает электрон с импульсом $\mathbf{p}_e$ и под прямым углом к направлению движения электрона – нейтрино с импульсом $\mathbf{p}_\nu$ ($\mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{p}_e = p_\nu p_e$). Найти импульс ядра $\mathbf{p}_я$ и его кинетическую энергию $T_я$, если оставшаяся масса ядра равна $M_я$.

3.4 Показать, что проекция момента импульса на какую-либо ось (назовём её z) может бать найдена дифференцированием функции Лагранжа по формуле $M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}$, где координата φ есть угол поворота вокруг оси z.

3.5 Найти выражение для силы, под действием которой материальная точка массы m движется в плоскости $z = 0$ по закону $x = a\mathrm{ch}kt$, $y = b\mathrm{sh}kt$. Приведите значения сохраняющихся при таком движении динамических величин.

3.6 Найти выражения для декартовых компонент и абсолютной велечины момента импульса частицы в цилиндрических координатах r, φ, z.

3.7 Найти выражения для декартовых компонент M_x, M_y, M_z и абсолютной величины M^2 момента импульса частицы в сферических координатах r, θ, φ.

3.8 Какие компоненты импульса $\mathbf{p}$ и момента импульса $\mathbf{M}$ сохраняются при движении в следующих полях:
а) поле бесконечной однородной плоскости,
б) поле бесконечной однородной полуплоскости,
в) поле безконечного однородного циллиндра,
г) поле бесконечной однородной призмы,
д) поле однородного конуса,
е) центральное поле,
ж) суперпозиция двух центральних полей,
з) поле бесконечной однородной циллиндрической винтовой линии.

4. Механическое подобие

4.1 Показать, что если потенциальная энергия системы является однородной функцией k-й степени от координат (декартовых), то уравнения движения допускает геометрически подобные траектории причём все времена движения (между соответствующими точками траекторий) соотносятся как $\frac{t'}{t}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}$, где $\frac{l'}{l}$ - отношение линейных размеров двух траекторий.

4.2 Показать, какой степенью отношения $\frac{l'}{l}$ определяется зависимость отношения значений скорости, полных энергий и моментов импульсов в соответсвующие моменты времени.

4.3 Вывести изохорность колебаний маятника.

4.4 Показать, что при падении в поле сил тяжести квадраты времени падения тел относятся, как их начальные высоты.

4.5 Показать, что в центральном поле, в котором потенциальная энергия частицы обратно пропорциональна расстоянию частицы от центра (например, в гравитационном или кулоновском поле) квадраты времени обращения по орбитам пропорциональны кубам их размеров (3-й закон Кеплера)

4.6 Пусть $U=mf(\mathbf{r})$ (например, поле тяжести). Как относятся времена движения по одинаковым траекториям частиц с различными массами?

4.7 Как относятся времена движения по одинаковым траекториям частиц с различными массами при одинаковой потенциальной энергии?

4.8 Как относятся времена движения по одинаковым траекториям одной и той же частицы при изменении U на постоянный множитель?

4.9 Исходя из теоремы о вириале оценить температуру внутри Солнца.

5. Одномерное движение. Приведенная масса.

5.1 Найти ускорение системы машины Атвуда.(задача 2.10)

5.2 Определить период колебаний плоского математического маятника (точка m на конце нити длиной l в поле тяжести) в зависимости от их амплитуды.

5.3 Точка движется в поле с потенциальной энергией $U(x)=\begin{cases}-k_0x,\ x<0;\\ \frac{1}{2}k_1x^2,\ x>0.\end{cases}$, $k_0,k_1>0$.

Найти период колебаний точки.

5.4 Определить период колебаний в зависимости от энергии при движении частицы массы m в полях с потенциальной энергией $U=A|x|^n$.

5.5 Определить период колебаний в зависимости от энергии при движении частицы массы m в поле с потенциальной энергией $U=-\frac{U_0}{ch^2\alpha x}$, $-U_0<E<0$.

5.6 Определить период колебаний в зависимости от энергии при движении частицы массы m в поле с потенциальной энергией $U=U_0tg^2\alpha x$.

5.7 Система состоит из одной частицы с массой M и n частиц с одинаковыми массами m. Исключить движение центра инерции и свести задачу к задаче о движении n частиц.

6. Движение в центральном поле

6.1* Заданы начальные значения (например $\varphi(0)$, $\dot{\varphi}(0)$, $\theta(0)$ и $\dot{\theta}(0)$) сферического маятника в момент времени $t=0$. Найти $\varphi(t)$ и $\theta(t)$.

6.2* Проинтегрировать уравнения движения материальной точки, движущейся по поверхности конуса (с углом 2α при вершине), расположенном вертикально, вершиной вниз в поле тяж ести.

6.3 Найти зависимость координат частицы от времени при движении по траектории в поле притяжения $U=-\frac{\alpha}{r}, \alpha>0$.

6.4 Найти зависимость координат частицы от времени при движении по траектории в поле отталкивания $U=\frac{\alpha}{r}, \alpha>0$.

6.5 Показать, что при движении в поле $U=\frac{\alpha}{r}$ (с любым знаком α) имеется интеграл движения, специфический для этого поля: $[\mathbf{v},\mathbf{M}]+\frac{\alpha\mathbf{r}}{r}$.

6.6 Найти траекторию частицы в поле $U=-\frac{\alpha}{r}, \alpha>0$, используя интеграл движения $[\mathbf{v},\mathbf{M}]-\frac{\alpha\mathbf{r}}{r}=\mathbf{A}=\mathbf{Const}$.

6.7 Показать, что влияние несферичности Земли приводит к изменению со временем ориентации большой оси орбиты спутнка.

6.8 При добавлении к потенциальной энергии $U=-\frac{\alpha}{r}$ малой добавки $\delta U(\mathbf{r})$ траектории финитного движения перестают бать замкнутими и при каждом обороте перигелий орбиты смещается на малую угловую величину $\delta\varphi$. Определить $\delta\varphi$ для случаев $\delta U(\mathbf{r})=\frac{\beta}{r^2}$ и $\delta U(\mathbf{r})=\frac{\gamma}{r^3}$.

6.9* Описать качественно характер движения частицы в поле $U(r)=-\frac{\alpha}{r}-\frac{\gamma}{r^3}$ при различных значениях момента и энергии.

6.10* Частица падает в центр поля $U(r)=-\alpha r^{-n}$, $(n>0)$ с конечного расстояния. Будет ли число оборотов вокруг центра, сделанных при этом части цей конечным? Буде тли конечным время падения? Найти уравнение траектории при малом r.

6.11 Проинтегрировать уравнения движения материальной точки в центральном поле $U(r)=-\frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha>0$

6.12 Вычислить приближённое отношение масс Солнца и Земли, пользуясь только продолжительностью года и лунного месяца (27,3 суток), а также средними радиусами орбит Земли ($1{,}49\cdot10^8 \textit{км}$) и Луны ($3{,}8\cdot10^5 \textit{км}$).

7. Распад частиц. Упругие столкновения частиц. Рассеяние частиц.

7.1 Найти связь между углами вылета θ и θ_0 в л- и ц-системах при спонтанном распаде частицы на две составные части.

7.2 Найти распределение распадных частиц по кинетической энергии в л-системе при распаде многих одинакловых частиц на две части.

7.3 Найти связь между углами вылета θ_1, θ_2 (в л-системе) распадных частиц при распаде на две частицы.

7.4 Выразить скорости обеих частиц после столкновения движущейся частицы m_1 и неподвижной m_2 через их углы столкновения в л- системе.

7.5 Определить эффективнное сечение рассеяния частиц от абсолютно твёрдого шарика радиуса a. (т. е. при законе взаимодействия $U(r)=\begin{cases}\infty, r\le a\\ 0, r>a\end{cases}$)

7.6 Определить эффективное сечение для «падения» частиц в центр поля $U=-\frac{\alpha}{r^2}$.

7.7 Определить эффективное сечение для «падения» частиц в центр поля $U=-\frac{\alpha}{r^n}, \quad (n>2, \alpha>0)$.

7.8 Найти еффективное сечение рассеяния в поле $U=\frac{\alpha}{r^2}, (\alpha>0)$.

7.9 Вывести формулу для угла рассеяния (случай рассеяния под малыми углами) в поле $U(r)$ неподвижного силового центра из уравнения траектории частицы в центральном поле.

7.10 Определить эффективное сечение рассеяния на малые углы в поле $U=\frac{\alpha}{r^n}, \quad (n>0)$.

8. Малые колебания.

8.1 Найти частоту колебаний точки массой m, способной двигаться по прямой и прикреплённой к пружине, другой конец которой закреплён в точке А на расстоянии l от прямой. Пружина, имея длину l, натянута с силой F.

8.2 Найти частоту колебаний шарика, способного двигаться по пазу, имеющему форму дуги окружности радиуса r и прикреплённого к пружине, другой конец которой закреплён в точке А на расстоянии l от дуги. Пружина, имея длину l, натянута с силой F.

8.3 Найти частоту колебаний математического маятника, точка подвеса которого (с массой m_1 на ней) способна совершать движение в горизонтальном направлении. Длина маятника l, маса m_2. Лагранжиан системы имеет вид $L=\frac{(m_1+m_2)}{2}\dot{x}^2+\frac{m_2}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2+2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)+m_2gl\cos\varphi$.

8.4 Определить вынужденные колебания системы, под влиянием силы $F(t)=F_0$, если в начальный момент времени система покотися в положении равновесия.

8.5 Определить вынужденные колебания системы, под влиянием силы $F(t)=at$, если в начальный момент времени система покотися в положении равновесия.

8.6 Определить вынужденные колебания системы, под влиянием силы $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$, если в начальный момент времени система покоится в положении равновесия.

8.7 Определить конечную амплитуду колебаний системы после действия постоянной силы, действующей в течение определённого времени T.

8.8 Определить конечную амплитуду колебаний системы после действия силы, действующей в течение определённого времени T по закону $F(t) = \dfrac{F_0}{T} t$.

8.9 Определить конечную амплитуду колебаний системы после действия силы, действующей в течение определённого времени $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ по закону $F(t) = F_0 \sin \omega t$.

8.10 Определить колебания системы с двумя степенями свободы, если её функция Лагранжа равна $L = \dfrac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \dfrac{\omega_0^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \alpha xy$. Рассматриваются две одинаковые системы с собственной частотой ω_0, связанные взаимодействием αxy.

8.11 Найти траекторию движения частицы в центральном поле $U = \dfrac{kr^2}{2}$ (пространственный осциллятор).

8.12 Определить вынужденные колебания под действием внешней силы $f = f_0 e^{\alpha t} \cos \gamma t$.

8.13* Выяснить условия возникновения параметрического резонанса в случае, когда функция $\omega(t)$ мало отличается от некоторой постоянной величины ω_0 и является простой периодической функцией $\omega^2(t) = \omega_0^2 (1 + h \cos \gamma t)$, где постоянная $h \ll 1$.

8.14* Найти условия параметрического резонанса для малых колебаний плоского маятника массы m и длины l с колеблющейся в вертикальном направлении по закону $a \cos \gamma t$ точкой подвеса.

8.15* Найти комбинационные колебания второго и третьего порядков в одномерной системе совершающей ангармонические колебания и имеющей функцию Лагранжа $L = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - \dfrac{m\omega_0^2}{2} x^2 - \dfrac{m\alpha}{3} x^3 - \dfrac{m\beta}{4} x^4$.

9. Уравнения Гамильтона.

9.1 Найти гамитльтониан материальной точки, находящейся во внешнем поле $U(\mathbf{r})$ и её канонические уравнения, пользуясь декартовыми координатами в качестве обобщённых.

9.2 Найти гамитльтониан материальной точки, находящейся во внешнем поле $U(\mathbf{r})$ и её канонические уравнения, пользуясь циллиндрическими координатами (r, φ, z) в качестве обобщённых.

9.3 Найти гамитльтониан материальной точки, находящейся во внешнем поле $U(\mathbf{r})$ и её канонические уравнения, пользуясь сферическими координатами (r, θ, φ) в качестве обобщённых.

9.4 Найти гамильтониан системы, состоящей из одной частицы с массой M и n частиц с массами m в системе отсчёта с началом в центре инерции.

9.5 Получить уравнения Гамильтона для сферического маятника. (материальная точка массы m, находящаяся в поле тяж ести и двигающаяся по гладкой сфере радиуса R)

9.6 Найти гамильтониан и уравнения Гамильтона для плоского маятника массы m и длины l, точка подвеса котрого совершает горизонтальне колебания по закону $a\cos\gamma t$.

9.7 Найти траекторию одномерного гармонического осциллятора в фазовом пространстве.

9.8 Показать, что уравнения Гамильтона можно записать в виде $\dot{q}_i = -\{q_i, H\}$, $\dot{p}_i = -\{p_i, H\}$, ($i = 1, \ldots, s$), симметричном относительно канонических переменных.

9.9 Используя скобки Пуассона, показать, что при движении частицы в поле $U(|\mathbf{r}|)$ сохраняется её момент импульса.

9.10 Определить скобки Пуассона, составленные из декартовых компонент импульса $\mathbf{p}$ и момента импульса $\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$ материальной точки.

9.11 Определить скобки Пуассона, составленные из декартовых компонент $\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$.

9.12. Показать, что $\{M_z, \varphi\} = 0$, где φ - любая скалярная функция координат и импульсов частицы.

9.13 Показать, что $\{M_z, \mathbf{f}\} = [\mathbf{n}, \mathbf{f}]$, $\mathbf{f}$ - векторная функция координат и импульсов частицы, $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении оси z.

9.14 Найти закон движения одномерного гармонического осциллятора, имеющего полную энергию E, массу m, собственную частоту ω, осуществив каноническое преобразование динамических переменных $(q, p) \to (Q, P)$, где $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$, $p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$.

9.15 Найти закон движения одномерного гармонического осциллятора, имеющего полную энергию E, массу m, собственную частоту ω, осуществив каноническое преобразование динамических переменных $(q, p) \to (Q, P)$ с помощью производящей функции $F = \frac{m}{2}\omega q^2 ctgQ$.

9.16 Найти закон движения одномерного гармонического осциллятора, имеющего полную энергию E, массу m, собственную частоту ω с помощью метода Гамильтона-Якоби. Показать, что $S(t) = \int L(t)dt$.

9.17* Получить закон движения $r(t)$ и уравнение орбиты $r(\varphi)$ методом разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби в случае плоского движения материальной точки под действием центральной силы.

10. Движение твёрдого тела

10.1 Определить главные моменты инерции тонкого стержня длиной l. Линейная плотность стержня равна $\rho = const$.

10.2 Определить момент инерции тонкой дуги полуокружности относительно диаметра. Диметр дуги равен $2a$, ρ - линейная плотность.

10.3 Определить главные моменты инерции прямолинейной пластинки с линейными размерами a и b, поверхностной плотностью ρ_s и массой μ.

10.4 Определить момент инерции треугольной пластинки относительно основания треугольника. Высота треугольной пластинки равна h, а масса μ.

10.5 Определять главные моменты инерции шара радиуса R.

10.6 Определить главные моменты инерции циллиндра радиуса R и высотой H.

10.7 Определить главные моменты инерции прямоугольного параллелипипеда с длинами рёбер a, b, c.

10.8 Определить главные моменты инерции кругового конуса высотой h и радиусом основания R.

10.9 Определить главные моменты инерции четырёхугольной пирамиды высотой и стороной основания $2a$.

10.10 Определить главные моменты инерции трёхатомной молекулы в виде равнобедренного треугольника, рассматриваемой как система частиц, находящихся на неизменных расстояниях друг от друга.

10.11 Определить частоту малих колебаний физического маятника. (твёрдое тело, качающееся в поле тяжести около неподвижной горизонтальной оси)

10.12 Найти отклонение свободо падающего тела от вертикали, обусловленное вращением Земли.(Угловую скорость вращение считать малой)

10.13* Определить влияние, оказываемое вращением Земли на малые колебания маятника.(Маятника Фуко)

Литература:

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. «Наука», М., 1965.
2. Голдстейн Г. - Классическая механика. «Наука», М., 1975.
3. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике.
4. Ольховский И.И., Павленко Ю.Г., Кузьменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. МГУ, Москва 1977.