Билеты на зачет по курсу

“Методы приближенных вычислений”. Модуль 1

Числа в скобочках – номера параграфов электронной версии конспекта текущей версии 0.63, соответствующих билетам. Номер 2.3.2.0 относится к части раздела 2.3.2 до начала подраздела 2.3.2.1.

Интерполяция

1. Теория интерполяции, постановка задачи. Интерполяция Лагранжа и феномен Рунге. (1.0, 1.2.4.3)
2. Линейная интерполяция. Системы Чебышева. (1.1)
3. Интерполяция полиномами. Интерполяционный многочлен Лагранжа, пример. (1.2.0-1)
4. Интерполяция. Алгоритм Невилла, пример. (1.2.2)
5. Разделенные разности, интерполяционная формула Ньютона. (1.2.3.0)
6. Интерполяционная формула Ньютона для эквидистантных узлов, пример. (1.2.3.1)
7. Погрешность интерполяционной формулы Лагранжа, распределение по отрезку. (1.2.4.1-2)
8. Феномен Рунге, многочлены Чебышёва I рода и выбор узлов интерполяции в формуле Лагранжа. (1.2.4.3-5)
9. Численное дифференцирование. (1.2.5)
10. Интерполяция Эрмита, погрешность (1.4)
11. Сплайн-интерполяция. Постановка задачи. Кубические сплайны (1.5.1-2)
12. Сплайн как решение вариационной задачи и кусочно-кубическая интерполяция со сглаживанием (1.5.3, 1.5.6)

Дифференциальные уравнения

13. ОДУ. Задача Коши и краевая задача. Методы решения, общие характеристики, выбор алгоритма. (2.1.0, 2.2.6, 2.3.3)

14. ОДУ. Задача Коши. Методы Эйлера и Адамса. (2.2.1)

15. ОДУ. Задача Коши. Методы Рунге-Кутта. (2.2.2-3)

16. Решение систем ОДУ. Формула Рунге для локальной погрешности. (3.2.4-5)

17. Задача Коши. Многошаговые методы, пример. (2.3.1)

18. Методы прогноза и коррекции. Методы Милна и Адамса-Башфорта. (3.3.2)

19. Краевые задачи. Методы стрельбы и конечно-разностные методы. (2.4.0-1)

20. Конечно-разностные методы решения ОДУ, пример (3.4.2)

21. *Методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, идея метода сеток. (2.5.0-2.5.2.1)

22. *Метод сеток. Задача Коши для уравнения гиперболического типа. (2.5.2.1-2)

23. *Метод сеток. Краевая задача для уравнения гиперболического типа. (2.5.2.1,3)

24. *Уравнения мат. физики. Метод неопределенных коэффициентов. Пример. (2.5.3.0-1)

25. *Уравнения мат. физики. Метод неопределенных коэффициентов. Повышение точности разностной схемы. (2.5.3.2)

/

Задания на доказательство

Дополнительные задания для самостоятельной работы. Красным написаны ориентировочные баллы. При необходимости можно пользоваться любой литературой и любыми источниками в интернете. Но не надо искать в интернете доказательство 2+2=4 и других заданий, стоящих меньше 20 баллов. Бездумное передирание из википедии также не оценивается. Исполнитель должен лично представить доказательство.

Каждое задание принимается только у одного человека. Во избежание недоразумений и огорчений, особенно в конце семестра, часто оказывается не лишним уточнить заранее у преподавателя постановку задачи и критерии оценивания.

Доказательство какого-либо утверждения не должно использовать другие неочевидные утверждения, которые не были доказаны на лекциях: все предпосылки должны быть доказаны. Пример: если приводите вывод рекуррентных соотношений для каких-либо ортогональных полиномов через производящую функцию, докажите, что определение через производящую функцию дает семейство ортогональных полиномов в том виде как оно было дано в курсе.

Часть I

Глава 1: интерполяция

1. Показать, что конечные разности Δ в пределе совпадающих узлов интерполяции переходят в производные соответствующей степени (5б);
2. Вывести формулы численного дифференцирования через центральные разности по трем, четырем и пяти точкам для равноотстоящих узлов (5+5+5б); получить оценки погрешности (5+5+5б);
3. Вывести формулы для второй производной через центральные, правые и левые разности по трем точкам с оценкой погрешности (15б);
4. Вывести рекуррентные соотношения для коэффициентов интерполяционных полиномов (п. 1.3.3 "Быстрое преобразование Фурье") (10б);
5. Доказать, что матрица системы (1.82) -- пятидиагональна, симметрична, и положительно определена, как утверждается (5+5+20б)
6. Доказать формулу для коэффициентов многочлена гладкого восполнения с $p = 1$ на стр. 54 (10б).
7. Верно ли утверждение: «если $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ образуют систему Чебышёва на промежутке $[a,b]$, то сужение $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ на набор точек $\{x_j \in [a,b]\}_{j=1}^{m}$ линейно-независимо если m<n»? (20б);
8. Пусть есть n функций, n+1 раз непрерывно дифференцируемых на промежутке [a,b]. Доказать, что если их определитель Вронского не обращается в ноль на этом промежутке, то функции образует систему Чебышёва (30б);

Глава 2: дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Выведите формулу коррекции метода Милна интегрированием соответствующей интерполяционной формулы (20б);
2. Выведите формулы прогноза и коррекции метода Адамса-Башфорта (А.-Башфорта и А.-Мултона 4 порядка) интегрированием соответствующих интерполяционных формул (15+15б);
3. Вывести формулу коррекции метода Хэмминга (30б); (см Butcher, Hamming).
4. Найдите погрешность трехдиагональной системы (2.28) (10б);

Уравнения мат. физики

5. Постройте дискретный аналог оператора Лапласа на треугольной решетке, 7 узлов (2.5.3.3) (15б);
6. Постройте дискретный аналог оператора $(\partial_x^4+2\partial_x^2\partial_y^2+\partial_y^4)$ на квадратной решетке, 13 узлов (2.5.3.3) (20б);

Глава 3: ортогональные полиномы

Функциональные пространства

1. Покажите, что пространство $C^2[a,b]$ вещественных непрерывных функций на промежутке с квадратичным скалярным произведением образует евклидово пространство (5б);
2. Покажите, что пространство вещественных непрерывных функций на промежутке с нормой $\|f\| = max|f(x)|$ является нормированным, но не евклидовым (10б);
3. Докажите непрерывность сложения и умножения на число в метрическом пространстве (10б);
4. Покажите, что если метрика удовлетворяет неравенству параллелограмма, то она индуцирует норму и скалярное произведение, и наоборот (5б);
5. Покажите, что равномерная метрика $\rho(f-g) = max|f-g|$ в пространстве непрерывных действительных функций, определенных на $[a,b]$, удовлетворяет аксиомам метрики и индуцирует норму (5б); что это пространство полно (15б);
6. Докажите, что множество полиномов с рациональными коэффициентами счетно (20б);
7. Покажите, что если множество А плотно в метрическом пространстве R, то оно плотно и в пополнении R^* (10б);
8. Покажите, что вторая аппроксимационная теорема Вейерштрасса следует из первой (40б)
9. Докажите, что последовательность функций φ_i параграфа 2.1.10 «Пространство L^2» фундаментальна в квадратичной метрике (20б);

Ортогональные полиномы

10. Докажите теорему Фаварда (40б);
11. Выведите выражение для полиномов второго рода через первого (30б);
12. Выведите коэффициенты уравнения для полиномов Якоби через α, β, n. (10б);
13. Выведите коэффициенты рекуррентных соотношений для полиномов Эрмита (20б); Лагерра (20б); Чебышева II рода (15б);

Численное интегрирование

14. Вывести формулы Ньютона-Котса для n=3,4,5 (5+10+15б);
15. Вывести погрешность формул Ньютона-Котса для n=3 и 5 интегрированием ошибки формулы Лагранжа (5+10б); для n=4 (10б).
16. Докажите формулы для узлов и весов квадратурной формулы Гаусса через матрицу Якоби (алгоритм Голуба-Уэлша) (25+25б);

Глава 4: интегральные уравнения и вариационные методы

Интегральные уравнения

17. Показать, что линейный оператор в бесконечномерном пространстве непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен (15б);
18. Показать, что гильбертов кирпич компактен (25б);
19. Показать, что произведение и линейная комбинация компактных операторов – компактны (20б);
20. Разобраться в доказательстве теоремы Гильберта-Шмидта о спектре компактного эрмитового оператора (3.3.5) (50б);
21. Доказать теорему о сходимости метода замены ядра на вырожденное п.4.3.7 (30б); (см. Березин Жидков)
22. Доказать теорему о сходимости метода последовательных приближений п. 4.4 (30б); (там же)
23. Доказать теоремы Фредгольма исходя из возможности представления компактного оператора как предела последовательности компактных (50б);

Задания на программирование

Все программы должны позволять просто менять входные данные и быстро получать результат – в понятном *графическом виде*, в том числе, когда это возможно. Результат должен быть просто проверяемым.

Предполагается, что задания выполняются в одном из существующих **пакетов символьной алгебры** – *Mathematica*, Maple, Matlab (платные), Maxima, Reduce (бесплатные) и пр. Можно писать программы самому, но только если вы в состоянии удовлетворить условиям эффективной проверяемости.

Существующие внутренние алгоритмы программных пакетов не должны используются при выполнении соответствующего задания (например, команда InterpolatingPolynomial в Mathematica при решении задач интерполяции); но можно их использовать для проверки правильности своего кода.

Для решения задач линейной алгебры, которые мы практически в курсе не затрагиваем, *можно и нужно* использовать подходящие встроенные функции программных пакетов или доступные в сети наборы библиотек (см. например http://ru.wikipedia.org/wiki/LAPACK). При этом желательно разбираться для чего они нужны, и различать, к примеру, *точные* алгоритмы решения систем линейных уравнений (Гаусса, Гаусса-Жордана, прогонки, etc), от итерационных (Якоби, Гаусса-Зейделя, etc) – см. http://ru.wikipedia.org/wiki/Категория:Методы решения СЛАУ.

Можно предлагать свои варианты постановки задач и обсуждать имеющиеся. Помните об ограничении на максимальное количество баллов, которое можно получить за дополнительные задания. Пробные входные данные подбираем самостоятельно, и проверяем работоспособность кода на разных вариантах.

Доп вопросы на зачет

1. Интерполяция

4+6

1. Общая постановка задача интерполяции
2. Что такое система Чебышева
3. **Явный вид интерполяционной формулы Лагранжа**
4. Алгоритм Невилла
5. Интерполяционная формула Ньютона через разделенные разности
6. **Интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов**
7. **Определение многочленов Чебышева I рода**
8. Постановка задачи интерполяции Эрмита
9. **Формула численного дифференцирования по трем точкам через центральные разности**
10. Постановка задачи кубической сплайн-интерполяции

2. Дифференциальные уравнения

4+4

1. Задача Коши и краевая задача
2. Метод Эйлера
3. **Идея методов Рунге-Кутта**
4. Отличие между одношаговыми и многошаговыми методами
5. **Идея методов прогноза и коррекции**
6. Идея конечно-разностных методов решения ОДУ
7. **Идея метода сеток**
8. **Идея метода неопределенных коэффициентов**