

Программа курса ММФ(5 семестр, 2011)

1. Уравнения в частных производных второго порядка. Классификация уравнений в частных производных второго порядка линейных относительно старших производных. Уравнение характеристик. Характеристические поверхности (линии). Примеры.
2. Приведение к каноническому виду эллиптических, параболических и гиперболических уравнений для случая двух независимых переменных. Дальнейшее упрощение для линейных уравнений.
3. Постановки простейших задач математической физики, приводящих к уравнениям параболического, эллиптического и гиперболического типов. Типы краевых условий (1, 2 и 3 краевые задачи).
4. Одномерное волновое уравнение для всего пространства (бесконечная струна). Формула Даламбера. Интерпретация решения. Роль характеристик.
5. Решение неоднородного одномерного волнового уравнения для всего пространства (бесконечная струна, вынужденные колебания).
6. Первая и вторая краевые задачи для одномерного однородного волнового уравнения для полупространства (полубесконечная струна, метод продолжения).
7. Решение одномерного волнового уравнения для конечной струны методом разделения переменных для первой однородной краевой задачи. Интерпретация решения. Энергия струны.
8. Решение одномерного волнового уравнения для конечной струны методом разделения переменных для третьей однородной краевой задачи. Рассмотреть случай, когда один конец свободен, а другой упруго закреплен. Специфика второй краевой задачи.
9. Неоднородное одномерное волновое уравнение для конечной струны для случая первой однородной краевой задачи. Функция Грина первой краевой задачи, ее физический смысл, свойства.
10. Учет неоднородности в 1, 2 и 3-ей краевой задаче. Стационарная неоднородность в одномерном волновом уравнении и в граничных условиях для конечной струны.
11. Решение методом разделения переменных первой краевой задачи об остывании прямоугольного параллелепипеда.
12. Уравнение для цилиндрических функций. Функции Бесселя произвольного порядка. Их свойства. Рекуррентные формулы. Функции Бесселя полуцелого порядка. Асимптотические разложения для функций Бесселя. Производящая функция функций Бесселя целого порядка.
13. Функции Неймана. Их свойства. Функции Ханкеля 1 и 2 рода. Асимптотическое поведение.
14. Цилиндрические функции мнимого аргумента: модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда. Асимптотическое поведение.
15. Решение методом разделения переменных 1-ой краевой задачи о распространении тепла в бесконечном цилиндре. Условие ортогональности и квадрат нормы.

16. Уравнение Лапласа и полиномы Лежандра. Производящая функция для полиномов Лежандра. Уравнение для полиномов Лежандра. Формула Родрига. Свойства полиномов Лежандра. Рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра. Условие ортогональности и квадрат нормы для полиномов Лежандра. Условие полноты.
17. Присоединенные полиномы Лежандра. Ортогональность и квадрат нормы.
18. Сферические функции. Ортогональность и квадрат нормы.
19. Шаровые функции. Решение методом разделения переменных внутренней и внешней задачи Дирихле и Неймана для шара.
20. Решение задачи Дирихле для круга методом разделения переменных. Формула Пуассона. Комплексная запись формулы Пуассона, связь с аналитическими функциями.
21. Доказательство формулы Пуассона для задачи Дирихле для полуплоскости.
22. Общая схема применения метода конформных преобразований к решению задачи Дирихле для односвязной области на плоскости. Пример.