

Программа курса ММФ1 (4 семестр, Тютюнник Д.) (Calculus. Complex variables.)

Список литературы в порядке «убывания» «употребимости» при изучении курса:

- I. Фукс, Шабат. **Функции комплексного переменного и некоторые их приложения.**
- II. Лаврентьев, Шабат. **Методы теории функций комплексного переменного (1 глава).**
- III. Гурвиц, Курант. Теория функций (в основном эллиптические функции).
- IV. Гильберт, Курант. Методы математической физики (интегральные преобразования).
- V. Морс, Фешбах. Методы теоретической физики.
- VI. Градштейн, Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (справочник).

1 Модуль. Введение и общая теория (20 баллов).

1. Введение: построение теории функций на основе рядов (Вейерштрасс) и геометрическая теория функций (диссертация Римана).
 - a. Комплексные числа (двойные, дуальные и кватернионы) и решение алгебраических уравнений. Задача о трисекции угла. Представление в декартовых координатах, тригонометрическое и показательное. Свойства операций. Геометрическое представление на плоскости. Неравенство треугольника.
 - b. Расширенная комплексная плоскость (Аргана) и ее геометрическая интерпретация (сфера Римана, комплексная проективная прямая). Компактность расширенной комплексной плоскости.
2.
 - a. Последовательности комплексных чисел, окрестности точек плоскости. Сходимость. Предел. Итерации и особенности квадратичных итераций (множество Мандельброта).
 - b. Алгебраические свойства пределов. Условия сходимости. Критерий Коши. Теорема Вейерштрасса.
3.
 - a. Непрерывные и гладкие кривые. Простые и замкнутые кривые.
 - b. Области, границы, ориентация границы, односвязные и многосвязные области (топология области и кривых на области). Теорема Жордана. Примеры.
4.
 - a. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность. Геометрическая интерпретация.
 - b. Расстояние между точками по области. Непрерывность вплоть до границы. Примеры.
5.
 - a. Голоморфные функции. Правила дифференцирования. Условия Коши-Римана в декартовых и полярных координатах. Гармонические функции.
 - b. Степенная, показательная, тригонометрические функции. Корень n -й степени и логарифм в комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной части вещественной оси.
6.
 - a. Функции комплексного переменного как отображения.

- b. Однолиственность. Обратная функция. Примеры.
- 7.
- a. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного, сохранение углов между кривыми и постоянство растяжений.
- b. Локальная и глобальная однолиственность. Конформные отображения. Обратная функция.
- 8.
- a. Дробно-линейная функция. Однолиственность в расширенной комплексной области. Угол между кривыми в бесконечно удаленной точке. Конформность в расширенной комплексной области.
- b. Групповое свойство дробно-линейных отображений. Круговое свойство. Сохранение симметрии. Неподвижные точки.
- 9.
- a. Дробно-линейное отображение, переводящее три различные точки в три различные. Его единственность. Инвариант отображения (двойное отношение 4-х точек). Общий вид дробно-линейного преобразования с двумя различными неподвижными точками. Группа Мебиуса. Однородные проективные координаты и трехмерный спинор.
- b. Общий вид отображения верхней полуплоскости на единичный круг. Общий вид отображения единичного круга на единичный круг (группа дробно-линейных автоморфизмов единичного круга).
- 10.
- a. Общие принципы теории конформных отображений.
- b. Принцип сохранения области голоморфным отображением. Теорема Римана (без доказательства). Принцип соответствия границ.

Основные вопросы для модуля (задание из 4х вопросов):

- Понятие комплексного числа, геометрическая интерпретация
- Кривые и области на комплексной плоскости
- Функция комплексного переменного, условия Коши-Римана
- Гармонические функции и уравнение Лапласа
- Многозначность, лист и риманова поверхность функции
- Конформные преобразования
- Дробно-линейное отображение

2 Модуль. Теория интегралов (20 баллов).

- 11.
- a. Интегрирование функции комплексного переменного. Связь с криволинейными интегралами от действительных функций.
- b. Свойства интеграла.
- 12.

- a. Интегральная теорема Коши для случая непрерывной производной. Обобщение теоремы на случай многосвязной области (интеграл по границе области). Непрерывная деформация кривой в области. Независимость интеграла от пути в односвязной области.
 - b. Интегральная формула Коши. Обобщение формулы для многосвязной области, случай кольца. Теорема о среднем. Теорема о среднем для гармонических функций.
- 13.
- a. Интеграл типа Коши. Теорема о голоморфности функции, представляемой интегралом типа Коши.
 - b. Бесконечная дифференцируемость голоморфной функции. Теорема Лиувилля.
- 14.
- a. Ряды функций комплексного переменного, сходимость, абсолютная и равномерная сходимость. Теорема о непрерывности суммы ряда. Признак равномерной сходимости Вейерштрасса.
 - b. Возможность почленного интегрирования равномерно сходящегося ряда непрерывных функций и первая теорема Вейерштрасса - возможность почленного дифференцирования равномерно сходящегося ряда голоморфных функций.
- 15.
- a. Степенные ряды. Теорема Абеля. Голоморфность суммы степенного ряда. Степенной ряд - ряд Тейлора своей суммы.
 - b. Однозначные аналитические (регулярные) функции. Аналитичность голоморфной функции. Радиус круга сходимости ряда голоморфной функции.
- 16.
- a. Аналитичность в бесконечности. Нули регулярной функции.
 - b. Порядок нуля. Изолированность нулей регулярной функции.
- 17.
- a. Ряд Лорана. Голоморфность суммы ряда Лорана в кольце.
 - b. Представимость функции, голоморфной в кольце, сходящимся рядом Лорана. Единственность такого разложения. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана.
- 18.
- a. Изолированные особые точки однозначного характера: устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка.
 - b. Связь между главной частью ряда Лорана и типом особой точки.
- 19.
- a. Определение вычета. Формула для вычисления вычета в полюсе. Вычет в бесконечно удаленной точке.
 - b. Основная теорема теории вычетов. Теорема о сумме всех вычетов.
- 20.
- Примеры вычисления интегралов с помощью вычетов.

Основные вопросы для модуля (задание из 4х вопросов):

- Криволинейный интеграл на плоскости
- Интегральная теорема Коши

- Интеграл типа Коши
- Степенной ряд
- Ряд Лорана
- Особые точки функции
- Вычет функции, основная теорема теории вычетов

3 Модуль. Приложения ТФКП (20 баллов).

21.
 - a. Теорема единственности. Аналитическое продолжение и его единственность.
 - b. Выделение однозначных непрерывных ветвей степенной функции. Ее точки ветвления.
22.
 - a. Гамма-функции Эйлера. Определение, интегральное представление, свойства и асимптотики.
 - b. Бета-функция Эйлера.
23.
 - a. Теорема о голоморфности интеграла, зависящего от параметра. Возможность дифференцирования под знаком интеграла.
 - b. Случай несобственных интегралов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов.
24.
 - a. Преобразования Лапласа (и Меллина) и их свойства.
 - b. Преобразование Фурье и Гильберта.
25.
 - a. Обращение аналитических функций. Обращение степенного ряда.
 - b. Ряд Бюрмана-Лагранжа.
26.
 - a. Одно - и двоякопериодические мероморфные функции. Множество периодов функции как группа. Параллелограмм периодов. Сумма вычетов в периоде.
 - b. Функция Вейерштрасса - пример эллиптической функции. Тета-функции.
27.
 - a. Эллиптические функции Якоби. Дифференциальные уравнения для этих функций.
 - b. Тригонометрические функции как предельный случай функций Якоби.
28.
 - a. Эллиптические модулярные функции. Модулярная группа. Алгебраические кривые, связанные с эллиптическими функциями (эллиптические кривые). Униформизация и автоморфные функции. Эллиптические интегралы. Использование автоморфных функций для решения алгебраических уравнений высших степеней (Клейн) и вклад в доказательство теоремы Ферма (алгебраическая геометрия).
29.
 - a. Заключительные замечания: приложения теории гармонических функций, конформных преобразований и эллиптических функций в математике и физике.

Основные вопросы для модуля (задание из 4х вопросов):

- Интегральные преобразования (Лапласа, Меллина, Фурье, Гильберта)
- Обращение аналитических функций
- Двоякопериодические функции, функция Вейерштрасса
- Гамма и бета-функции Эйлера
- Тета-функции и функции Якоби
- Эллиптические интегралы

Темы курсовых работ (одна работа 10 баллов):

1. Множество Мандельброта и фракталы.
2. История возникновения алгебраической геометрии.
3. Применение конформных отображений в физических задачах.
4. Гиперкомплексные числа: кватернионы и октанионы.
5. Эллиптические кривые и великая теорема Ферма.
6. Комплексные числа и трехмерные спиноры.
7. Своя тема.

Дополнительные главы квантовой механики

1. Группы симметрии и квантовая механика
 - a. Понятие групп, полугрупп, свойства и представления групп.
 - b. Группы Ли, связь симметрий и законов сохранения.
 - c. Примеры: $SO(2)$, $U(1)$, $SO(3)$, $SU(2)$, $SO(3,1)$, $SL(2, \mathbb{C})$, $GL(2, \mathbb{C})$.
 - d. Группы Лоренца и Пуанкаре.
 - e. Представление группы вращений и функции Вигнера.
2. Фейнмановская форма квантовой механики.
3. Интегралы по траекториям для свободной частицы и частицы в поле вектор-потенциала. Неэквивалентность лагранжева и гамильтонова подходов.
4. Топологические фазы. Эффект Ааронова-Бома и магнитный монополь.
5. Фазы Ааронова-Кэшера, Саньяка, Ишлинского, Панчаратнама, прецессия Томаса.
6. Квантование свободного электромагнитного поля.
7. Квантование электромагнитного поля с источниками, трудности теории и невозможность условия на вектор-потенциал. Отсутствие координатной волновой функции фотона.
8. Трудные вопросы квантовой механики (однозначность, непрерывность, нормируемость и комплексность ВФ, определение среднего - не по пространству, а по ансамблю состояний, проблема декогеренции и измерения в квантовой теории, нелокальность и ЭПР, зависимость от топологии траекторий). Замечания относительно постановки начальных и краевых задач для ВФ (2 пары).
9. Релятивистские волновые уравнения (Клейна-Гордона, Дирака, функции Грина).

Литература: