Цилиндрическая симметрия

$$\Delta U=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}$$

$U_t=a^2\Delta U$ - тепловое

$U_{tt}=a^2\Delta U$ - колебательное

U(r, φ, Z, t)=v(r, φ, Z)T(t)

v(r, φ, Z)=R(r)Φ(φ)Z(z)

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0$$

$\frac{d}{dx}\left[x^n\Im_n(x)\right]$ = $x^n\Im_{n-1}(x)$ - рекуррентное соотношение

$\Im_{-n}(x)=(-1)^n\Im_n(x)$

$\|R_m\|^2=$ $\int_0^{r_0}\Im_n^2\left(\mu_m^{(n)}\right)rdr=\frac{r_0^2}{2}\left[\Im_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2$

if колебательное $\Rightarrow$ $T_m=D_m e^{-a^2\lambda_m t}$

$$\Im_\nu(x)=\sum_{k=0}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$ - круглый Бессель

$N_\nu(x)=\frac{\Im_\nu(x)\cos\pi\nu-\Im_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$ - функция Неймана

$H_\nu^{(1)}(x)=\Im_\nu(x)+iN_\nu(x)$ - функция Ханкеля 1-го рода

$H_\nu^{(2)}(x)=\Im_\nu(x)-iN_\nu(x)$ - функция Ханкеля 2-го рода

$$I_\lambda(x)=e^{-\lambda\pi i/2}\Im_\lambda(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k}$$

- модифицированный Бессель

Полиномы Лежандра – собственные функции лапласиана в сферических координатах, пример классического ортогонального полинома.

Для этих полиномов интервал конечен, а весовая функция имеет простейший вид:

a=-1; b=1; ω(x)=1, $a_{n,n}=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$;

Способ нормировки классических полиномов заключается в том, что указывают значения постоянных

$h_n=\int_a^b\omega(x)\{\varphi_n(x)\}^2dx$ и знаки $a_{n,n}$.

$$\int_{-1}^{1}\{P_n(x)\}^2dx=\frac{2}{2n+1}$$

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\left(1-x^2\right)^n\right\}$$

$P_n^{|m|}$ - присоединенные полиномы Лежандра

$$P_n^{(m)}(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

$xP_n(x)=$ $\frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)+\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x)$

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|^2=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{2}{2n+1}\delta_{nk}$$

$\left(1-z^2\right)\frac{d^2\omega}{dz^2}-2z\frac{d\omega}{dz}+n(n+1)\omega=0$ - *уравнение Лежандра*

$\left(1-z^2\right)\frac{d^2\omega}{dz^2}-2z\frac{d\omega}{dz}+\left\{\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right\}\omega=0$

- частный случай присоединенного уравнения Лежандра

Теорема о разложимости присоединенных полиномов – *f(x)* может быть разложена в такой ряд -

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{nm}P_n^m(x)$$