П Р Е Д И С Л О В И Е

Автор методических указаний много лет читал лекции и вел семинарские занятия по курсу "Методы математической физики" на физико-техническом факультете Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.

В отличие от других университетских математических курсов, знакомящих студентов с отдельными вычислительными методами (дифференцирование, интегрирование и т.д.) в курсе математической физики учат ставить и решать задачи, описывающие реальные физические процессы – волновые, тепловые (диффузионные), задачи статистики.

Учебников по математической физики достаточно, задачников же, особенно с подробной разработкой методов решения задач, практически нет. Данные методические указания призваны восполнить этот пробел.

В первом разделе проводится классификация уровней в частных производных второго порядка для функции двух переменных, рассматриваются методы приведения их к канонической форме, обсуждается вопрос о типах краевых задач, их математической формулировке.

Второй раздел посвящен методу разделения переменных для решения краевых задач. Глава А раздела посвящена одномерным задачам. Эти задачи для изучения методов их решения самые простые, поскольку решаются хорошо известными студентам функциями, поэтому именно на этих задачах мы отрабатываем методы решений с постепенным усложнением в постановке задач. Сначала решаются первая и вторая краевые задачи с однородными граничными условиями, затем – с неоднородными граничными условиями, затем – с неоднородностью в уравнении.

По такой же схеме в главах В и С решаются пространственные задачи. В главе С решаются задачи с цилиндрической симметрией с такой же последовательностью усложнения. Однако здесь больше уделяется внимания свойствам новых – цилиндрических – функций, возникающих при решении этих задач, получены условия ортогональности и квадрат нормы набора функций, решающих первую и вторую краевые задачи.

Р а з д е л 1
Приведение уравнений к канонической форме: уравнение для функций 2-х переменных $u\ (x, y)$.

Глава 1.

Уравнение II-го порядка, линейное относительно старших производных:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + f(u_x, u_y, u, x, y) = 0 \qquad (1.1)$$

приводится к канонической форме относительно старших производных по схеме:

а) Определяем области гиперболичности, эллиптичности и параболичности (это линия - граница между двумя первыми областями). Для этого находятся области, где комбинация коэффициэнтов в уравнении (1.1) имеет знак:

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ - область гиперболичности,

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ - область эллиптичности,

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ - область (линия) параболичности.

в) Составим характеристическое уравнение по схеме: (это уравнение в обыкновенных производных):

$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}\ dydx + a_{22}(dx)^2 = 0.$

Находим интегральные кривые-характеристики этого уравнения:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = const. \\ \psi(x, y) = const. \end{cases}$$

В области гиперболичности характеристики вещественны и разные. Заменой переменных: $\xi = \varphi\ (x, y),\ \eta = \psi\ (x, y)$ уравнение (1.1) приводится к виду:

$$u_{\xi,\eta} + f_1\ (u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0. \qquad (1.2)$$

или заменой

$$\alpha = \frac{\varphi + \psi}{2}; \qquad \beta = \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

к виду:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + f_2(u_\alpha, u_\beta, u, \alpha, \beta) = 0. \qquad (1.3)$$

Уравнение (1.2) и (1.3) и есть каноническая форма уравнений гиперболического (волнового) типа.

В области эллиптичности – характеристики комплексные (комплексносопряженные) $\psi(x,y) = \varphi^{\star}(x,y)$. Заменой переменных $\xi = \frac{\varphi+\varphi^{\star}}{2}$, $\eta = \frac{\varphi-\varphi^{\star}}{2i}$ уравнение (1.1) приводится к канонической форме:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + f_3(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta) = 0.$$

В области (на линии) параболичности характеристики совпадают, $\varphi(x,y) = \psi(x,y)$ и заменой $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, где $\eta(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ - линейно не зависимы:

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \eta_x & \eta_y. \end{vmatrix} \neq 0.$$

уравнение (1.1) приводится к канонической форме:

$$u_{\xi\xi} + u_\eta + f(u_\xi, u, \xi, \eta) = 0. \tag{1.4}$$

Пример: 1-2

$$u_{xx} + x u_{yy} = 0.$$

Область гиперболичности:

$$D = -x > 0.$$

т.е. $x < 0$ - левая полуплоскость плоскости (xy).

Область эллиптичности:

$$D = -x < 0.$$

т.е. $x > 0$ - правая полуплоскость.

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 + x(dx)^2 = 0,$$

$$(dy)_\pm = \pm\sqrt{-x}\, dx.$$

Характеристические интегралы:

$$\varphi\ (x,y) = y + \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} = const.$$

$$\psi\ (x,y) = y - \frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} = const.$$

В области гиперболичности $x < 0$ выбираем новые переменные ξ, η с помощью характеристик (характеристики вещественны). Например:

$$\xi = \frac{\varphi + \psi}{2} = y,$$

$$\eta = \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{2}{3}(-x)^{3/2}.$$

Запишем исходное уравнение в новых переменных ξ, η:

$$(\xi_x = 0; \xi_y = 1; \quad \eta_x = -\sqrt{-x}, \eta_y = 0),$$

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \eta_x = -\sqrt{-x} u_\eta,$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ \cdot \ u_\eta - \sqrt{-x} \cdot [(u_{\eta\xi})\ \xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x] = \frac{1}{2\sqrt{-x}}\ u_\eta + (-x) u_{\eta\eta},$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\eta} \cdot \eta_y + u_{\xi\xi} \cdot \xi_y = u_{\xi\xi},$$

$$u_{xx} + x u_{yy} = \frac{u_\eta}{2\sqrt{-x}} - x u_{\eta\eta} + x u_{\xi\xi} = 0.$$

Или:

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - \frac{1}{2(-x)\sqrt{-x}} u_\eta = 0.$$

Учтя, что $2(-x)^{3/2} = 3\eta$, имеем:

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - \frac{1}{3\eta} u_\eta = 0.$$

В области эллиптичности $(x > 0)$ характеристики:

$$\varphi(x, y) = y + \frac{2}{3}\ i\sqrt{x} = \psi^\star,$$

$$\psi(x, y) = y - \frac{2}{3}\ i\sqrt{x}$$

являются комплексными (комплексносопряженными).

Выбор новых переменных:

$$\xi = \frac{\varphi + \varphi^\star}{2} = y,$$

$$\eta = \frac{\varphi - \varphi^\star}{2i} = \frac{2}{3}(x)^{3/2},$$

$$\xi_x = 0; \quad \xi_y = 1; \eta_x = \sqrt{x}; \quad \eta_y = 0,$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = \sqrt{x} \cdot u_\eta,$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} u_\eta + \sqrt{x}\ (u_{\eta\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} u_\eta + x u_{\eta\eta},$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi; \quad u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta} \cdot \eta_y = u_{\xi\xi}.$$

Исходное уравнение в переменных ξ, η принимает вид:

$$u_{xx} + x y_{yy} = \frac{1}{2\sqrt{x}} u_\eta + x y_{\eta\eta} + x u_{\xi\xi} = 0.$$

Учтя, что $2x\sqrt{x} = 3\eta$, получим:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta} u_\eta = 0.$$

Глава 2.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Общий вид уравнения (коэффициенты $a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ b,\ c,\ d$ есть константы):

$$a_{11}\, u_{xx} + 2a_{12}\, u_{xy} + a_{22}\, u_{yy} + b\, u_x + c\, u_y + du + f(x, y) = 0. \tag{2.0}$$

Первый шаг - определить тип уравнения, т.е. знак комбинации $D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}$. Отметим, что знак комбинации D, а следовательно, и тип уравнения в силу постоянства коэффициентов $a_{12},\ a_{11},\ a_{22}$ сохраняется во всей плоскости (x, y).

Положим, $D > 0$, т.е. уравнение гиперболического типа (рассмотрим для примера этот вариант).

По приведенной ранее схеме приводим уравнение (2.0) к канонической форме относительно старших производных (при этом, естественно, изменятся и коэффициенты при первых производных в новых переменных ξ, η, u функция $f(x, y)$). Получим:

$$u_{\xi\eta} + b_1 u_\xi + c_1 u_\eta + d_1 u + f_1(\xi, \eta) = 0. \tag{2.1}$$

Это уравнение допускает дальнейшее упрощение слагаемых с первыми производными. Заменой искомой функции $u(\xi,\eta)$ на новую $v(\xi,\eta)$ по формуле:

$$u(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)\ e^{\mu\xi+\nu\eta}. \tag{2.2}$$

с соответствующим выбором пока еще не определенных параметров (констант) μ и ν это уравнение для функции v приводится к уравнению без первых производных. Действительно, подставим (2.2) в (2.1):

$$u_\xi = (v_\xi + \mu v)\ e^{\mu\xi+\nu\eta},$$

$$u_\eta = (v_\eta + \nu v)\ e^{\mu\xi+\nu\eta},$$

$$u_{\xi\eta} = [v_{\xi\eta} + \mu v_\eta + (v_\xi + \mu v)\cdot\nu]\ e^{\mu\xi+\nu\eta},$$

Получаем для функции $v\ (\xi,\eta)$ уравнение:

$$v_{\xi\eta} + (\nu + b_1)\ v_\xi + (\mu + c_1)\ v_\eta + (\mu\nu + b_1\mu + c_1\nu + d_1)\ v + f_2(\xi\eta) = 0.$$

где

$$f_2(\xi,\eta) = f_1(\xi,\eta)\ e^{-(\mu\xi+\nu\eta)}.$$

Выбирая еще до сих пор не определенные нами свободные константы ν и μ в виде:

$$\nu = -b_1,$$

$$\mu = -c_1.$$

получим каноническую форму линейного уравнения с постоянными коэффициентами в виде (для функции v).

$$v_{\xi\eta} + (d_1 - c_1 b_1)\ v + f_1(\xi,\eta)\ e^{(c_1\xi+b_1\eta)} = 0.$$

Отметим (подчеркнем), что уравнение для функции $v\ (\xi,\eta)$ приводится к форме с отсутствием первых производных.

: Привести к канонической форме уравнение:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_x + u = 0. \tag{2.3}$$

1) Тип уравнения $D = 1 > 0$ - гиперболическое уравнение.

2) Привести к канонической форме в отношении старших производных.

Характеристическое уравнение:

$$(dy)^2 - 2\ dydx = dy\ (dy - 2dx) = 0.$$

Характеристики: $y = const, \quad y - 2x = const.$

Новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = y & \xi_x = 0, \quad \xi_y = 1. \\ \eta = y - 2x & \eta_x = -2, \quad \eta_y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = -2u_\eta, \\ u_{xx} = 4u_{\eta\eta}, \\ u_{xy} = -2u_{\eta\xi} - 2u_{\eta\eta}. \end{cases}$$

Подстановка в (2.3.) дает:

$$4u_{\eta\xi} + 2u_\eta - u = 0 \to u_{\xi\eta} + \frac{1}{2}u_\eta - \frac{1}{4}u = 0. \tag{2.4}$$

Замена функции: $u = v\ e^{\mu\xi+\nu\eta}$.

$$u_\eta = (v_\eta + \nu v)\ e^{\mu\xi+\nu\eta},$$

$$u_{\eta\xi} \equiv u_{\xi\eta} = [v_{\eta\xi} + \nu v_\xi + (v_\eta + \nu v)\mu]\ e^{\mu\xi+\nu\eta}.$$

Подставляем в (2.4)

$$u_{\xi\eta} + u_\eta \left(\mu + \frac{1}{2}\right) + v_\xi \cdot \nu + \left(\nu\mu + \frac{1}{2}\ \nu - \frac{1}{4}\right)\ v = 0.$$

Доопределяем свободные параметры ν и μ :

$$v = 0, \quad \mu = -\frac{1}{2}.$$

Ответ - каноническая форма уравнения для функции $v(\xi\eta)$:

$$v_{\xi\eta} - \frac{1}{4}\ v = 0.$$

Глава 3

Постановка краевых задач.

Выяснить смысл исследуемой физической величины, обосновать выбор системы координат, записать уравнение, краевые и начальные условия.

Математическую постановку задач мы рассмотрим на примерах.

З а д а ч а II-1. Продольные колебания стержня.

Упругий прямоугольный стержень выведен из состояния покоя тем, что его поперечным сечениям в момент времени $t = 0$ сообщены малые продольные (вдоль оси стержня) смещения относительно равновесного положения и скорости. Предполагая, что поперечные сечения стержня все время остаются плоскими (и параллельными друг другу и начальному положению), поставить краевую задачу для определения смещений поперечных сечений стержня при $t > 0$.

Рассмотреть случаи:

а) Концы стержня закреплены жестко,

б) Концы стержня свободны.

1) Выбор системы координат. Система координат должна отображать симметрию задачи, что позволяет надеяться как на простейшую математическую формулировку задачи, так и на возможности ее решения. В данной задаче такой системой координат будет система с осью (например, x), направленной вдоль оси равновесного (покоящегося) стержня.

Пусть длина стержня равна l. Сопоставим левому торцу стержня координату $x = 0$, тогда правый имеет координату $x = l$.

2) Исследуемая физическая величина. В качестве такой величины выберем смещение поперечного сечения стержня вдоль оси x, обозначив смещение через u. При выбранной системе координат и в соответствии с условиями задачи смещение u будет функцией координаты x и времени t:

$$u = u(x, t).$$

Таким образом, задача – одномерная.

3) Уравнение.

Процесс - колебательный - задача о собственных продольных колебаниях поперечных сечений стержня. В силу одномерности задача описывается одномерным однородным волновым уравнением (без вывода):

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}.$$

4) Граничные условия задают состояние (положение) торцевых сечений.

Случай (а) - торцы закреплены жестко, т.е. с течением времени их положение зафиксировано в состоянии равновесия, т.е. их отклонения равны нулю

$$u\ (0,t) = 0,$$

$$u\ (l,t) = 0.$$

Случай (б) - торцы свободны. Это означает с точки зрения физики процесса, что на торцы не действуют приложенные внешние силы. Но силы в теории упругости пропорциональны относительному смещению (растяжения или сжатия), т.е. пропорциональны производной по координате от смещения торцевых сечений.

Следовательно, в этом случае граничные условия на торцах имеют вид (отсутсвие сил):

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_0 \equiv u_x(0,t) = 0,$$

$$u_x(l,t) = 0.$$

5) Начальные условия (при $t = 0$) заданы функцией начального смещения сечений стержня $\varphi(x)$ и функцией $\psi(x)$ начальных скоростей сечений:

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_0 \equiv u_t(x,0) = \psi(x).$$

Итак, полная математическая формулировка задачи II-1 есть:

Уравнение: $a^2 u_{xx} = u_{tt}$.

Граничные условия:

Случай (а): $u\ (0,t) = 0 \quad u\ (l,t) = 0$, Случай (б): $u_x\ (0,t) = 0 \quad u_x\ (l,t) = 0$.

Начальные условия:

$$u\ (x,0) = \varphi(x) \quad u_t\ (x,0) = \psi(x),$$

$$0 \leq x \leq l; \quad 0 \leq t.$$

Заметим, что если в системе (стержне) есть распределенные силы линейной плотности $f(x,t)$, то эта функция добавляется в левую часть уравнения, и уравнение становится неоднородным.

З а д а ч а III-1.

Поставить краевую задачу об определении температуры стержня длины l с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является произвольной функцией расстояния по оси от одного из торцов. Рассмотреть случаи, когда:

а) концы(торцы) стержня поддерживаются при заданной температуре,

б) на торцы стержня подается внешний тепловой поток.

1. Выбор системы координат - ось x направим вдоль оси стержня.

2. Искомая величина - температура осевого сечения стержня u; в силу теплоизолированности боковой поверхности стержня и указанной выше зависимости начальной температуры u будет изменяться лишь от сечения к сечению, т.е. $u = u(x,t)$.

В такой постановке задача будет одномерной. Одному (левому) торцу сопоставляем координату 0, второму - координату l.

3. Поскольку внутри стержня нет тепловых источников (и стоков) задача описывается однородным одномерным тепловым уравнением:

$$a^2 u_{xx} = u_t.$$

где a зависит от коэффициента теплопроводности, плотности материала стержня (полагаем $a = const$).

4. Граничные условия:

Случай (а): $u\ (0,t) = T_1, \quad u\ (l,t) = T_2$, где T_1 и T_2 - температуры торцов стержня.

Случай (б). Поскольку поток тепла пропорционален градиенту температуры, заданные на торцах внешние потоки тепла пропорциональны производным (градиентам) температуры на торцах:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x\ (0,t) = q_1,$$

$$u_x\ (l,t) = q_2.$$

где q_1 и q_2 - пропорциональны заданным извне потокам тепла.

5. Начальное условие задает зависимость температуры сечений стержня в начальный момент $t = 0$ вдоль оси:

$$u\ (x, 0) = \varphi\ (x).$$

Итак, полная математическая формулировка тепловой задачи имеет вид:

уравнение $a^2\ u_{xx} = u_t$.

Граничные условия:

Случай (а) - (первая краевая задача) - $u\ (0, t) = T_1; \quad u\ (l, t) = T_2$.

Случай (б) - (вторая краевая задача) - $u_x\ (0, t) = q_1; \quad u_x\ (l, t) = q_2$.

Начальное условие (одно!).

$$u\ (x, 0) = \varphi(x),$$

$$0 \le x \le l, \quad 0 \le t.$$

Заметим, что в случае наличия в рассматриваемой системе (стержне) распределенных тепловых источников (стоков) линейной плотности $f(x, t)$, эта функция добавляется в левую часть уравнения (и уравнение становится неоднородным).

Р а з д е л 2.
Метод разделения переменных решения задач с уравнениями в частных производных (метод Фурье)

Глава А. Одномерные задачи.

Мы будем отрабатывать метод на примерах решения задач с постепенным их усложнением.

I. Одномерное однородное волновое уравнение с однородными граничными условиями I-го типа для отрезка прямой.

$\underline{II - 99}$. Концы струны длины l закреплены жестко, а начальное отклонение имеет форму квадратичной параболы, симметричной относительно перпендикуляра к середине струны. Найти колебания струны, если начальные скорости - нулевые.

Математическая формулировка задачи.

Выберем ось x вдоль равновесного положения струны, одному концу сопоставим координату $x = 0$, другому $x = l$. Будем рассматривать малые поперечные отклонения точек струны $u(x,t)$ - задача при таком выборе координат одномерная.

Уравнение - одномерное однородное волновое:

$$a^2\ u_{xx} = u_{tt}. \tag{A.1.1}$$

Границы закреплены (граничные точки не смещаются):

$$u\ (0,t) = 0, \qquad u\ (l,t) = 0. \tag{A.1.2}$$

Начальное отклонение - квадратичная парабола, проходящая через точки $(0, l)$, в которых отклонения - нулевые (точки закрепления).

$$u\ (x,0) = \varphi(x) = x\ (l - x). \tag{A.1.3a}$$

Начальные скорости - нулевые:

$$u_t\ (x,0) = \psi(x) = 0, \tag{A.1.3в}$$

$$0 \le x \le l; \quad 0 \le t.$$

Ищем нетривиальное ограниченное решение сформулированной задачи для $t > 0$.

Основная идея решения задач в уравнениях с частными производными - найти полный набор линейно-независимых частных решений в виде произведения функций, каждая из которых зависит от одной переменной. Тогда общее решение - сумма всех этих частных решений (с константами).

Схема решения: ищем решения уравнения, в виде произведения функций от одной переменной, подчиняем эти решения граничным условиям - получаем полный набор частных решений, сумма которых с константами дает общее решение, затем из начальных условий находим константы общего решения.

Решение уравнения (A.1.1) ищем в виде:

$$u\ (x,t) = X\ (x) \cdot T(t). \tag{A.1.3}$$

Подставляем это решение в (A.1.1.), имеем:

$$a^2 T \cdot X'' = X \cdot T''.$$

Делим на $a^2\ X \cdot T$ ($a^2\ X \cdot T \neq 0$, т.к. ищем нетривиальное решение, $X \neq 0$, $T \neq 0$).

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda = const.$$

Получим уравнения для функций $X\ (x)$ и $T\ (t)$:

$$X'' + \lambda\ X = 0, \quad T'' + a^2\ \lambda\ T = 0. \qquad (A.1.4)$$

Пока мы не можем утверждать, что переменные разделились - задача как для функции $X\ (x)$, так и для $T\ (t)$ еще не поставлена (не определена), так как в уравнениях для этих функций (А.1.4.) фигурирует неизвестная (неопределенная) константа λ.

Используем граничные условия (А.1.2.):

$$u\ (0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \to X(0) = 0. \qquad (A.1.4a)$$

(В силу нетривиальности решения $T(t) \neq 0$).

$$u\ (l, t) = X(l)\ T(t) = 0 \to X(l) = 0. \qquad (A.1.4\text{в})$$

Итак, для функции $X(x)$ получили решаемую задачу:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X(l) = 0, \\ 0 \leq x \leq l. \end{cases} \qquad (A.1.5)$$

Эта - задача на собственные значения и собственные функции одномерного оператора Лапласа на отрезке $(0, l)$ при граничном условии первого типа - на границе равна нулю сама функция.

Набор (бесконечный) решений этой задачи возможен лишь при $\lambda > 0$ (легко проверить,что при $\lambda \leq 0$ получим тривиальные решения).

Набор С.З и С.Ф. (собственных значений и собственных функций) задачи (А.1.5.) находим по схеме.

Пишем класс решений уравнения ($\lambda > 0$):

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}\ x + B \sin \sqrt{\lambda}\ x.$$

Подчиняем это решение граничным условиям:

$$X(0) = A = 0, \qquad X(l) = B \sin \sqrt{\lambda_n}\ l = 0,$$

откуда при $B \neq 0$ (иначе тривиальное решение) имеем:

$$\sqrt{\lambda_n} l = \pi n, \quad n = 1, 2...$$

Итак, набор С.З. и С.Ф. задачи (А.1.5.):

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3...$$

$$X_n\ (x) = \sin \frac{\pi n}{l} x. \qquad (A.1.5a)$$

При этом функции $X_n(x)$ ортогональны на отрезке $(0, l)$:

$$\int_0^l X_n\ (x)\ X_m\ (x) dx = 0, \quad n \neq m.$$

и квадрат нормы их равен:

$$||\ X_n\ (x)\ ||^2 = \int\limits_0^l X_n^2(x)\ dx = \frac{l}{2}.$$

Таким образом, из решения пространственной задачи определен набор констант λ, т.е. λ_n, а, следовательно, становится определенной и задача для функции $T(t)$:

$$T_n'' + a^2 \lambda_n T_n = 0.$$

$$T_n\ (t) = A_n\ \cos a\ \sqrt{\lambda_n}\ t + B_n\ \sin a\ \sqrt{\lambda_n}\ t.$$

т.е. переменные разделились.

Подчеркнем важнейший момент в этом решении - возможность поставить зачаду для функции $X(x)$, а, следовательно, для $T(t)$ т.е. разделить переменные, обусловлена (обеспечена) однородными граничными условиями - из однородных граничных условий (А.1.2) сразу же, непосредственно следуют условия (А.1.4.а) и (А.1.4.в) для пространственной функции задачи $X(x)$, т.е. переменные разделяются.

Полный набор линейно-независимых частных решений задачи имеет вид:

$$u_n\ (x, t) = X_n(x)\ T_n(t) = (A_n \cos a\ \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin a\ \sqrt{\lambda_n}\ t)\ \sin \frac{\pi n}{l}\ x.$$

Общее решение:

$$u\ (x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ (x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\ X_n(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos a\sqrt{\lambda_n}t+B_n\sin a\sqrt{\lambda_n}t]\ X_n(x). \qquad (A.1.6)$$

Для определения констант A_n и B_n воспользуемся начальными условиями. Сначала воспользуемся более простым условием (A.1.3в):

$$\sum B_n\ \sqrt{\lambda_n}\ X_n(x)=0.$$

В силу линейной независимости набора функций $X_n(x)$ все коэффициенты B_n в этой сумме равны нулю, $B_n=0$.

Таким образом,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos a\ \sqrt{\lambda_n}\ t\ X_n(x).$$

Используя первое начальное условие (A.1.3.a), имеем:

$$x(l-x)=\sum A_n\cdot X_n. \qquad (A.1.7)$$

Набор функций:

$$X_n\ (x)=\sin\sqrt{\lambda_n}\ x,$$

$$\sqrt{\lambda_n}=\frac{\pi n}{e},\quad n=1,2,...$$

представляет собой полную ортогональную систему линейно независимых функций, и по известным правилам, рассматривая (A.1.7.) как разложение функции $x(l-x)$ в ряд по набору $X_n(x)$, имеем для коэффициентов разложения A_n:

$$A_n=\frac{\int_0^l x(l-x)X_n(x)dx}{||\ X_n(x)\ ||^2}=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx.$$

Интеграл вычисляем интегрированием по частям:

$$\int_0^l\ x\ (l-x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx=$$

$$=|\ u=x(l-x);\ du=(l-2x);dv=\sin\frac{\pi n}{l}xdx;\ v=-\frac{l}{\pi n}\ \cos\frac{\pi n}{l}\ x\ |=$$

$$\underbrace{-\frac{l}{\pi n}\, x(l-x)\cos\frac{\pi n}{l}x\ |_0^l}_{=0}$$

$$+\frac{l}{\pi n}\int\limits_0^l (l-2x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx =$$

$$|\ u = l-2x;\ du=-2dx;\ dv=\cos\frac{\pi n}{l}xdx;\ v=\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{l}x\ |=$$

$$\underbrace{(l-2x)\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\sin\frac{\pi n}{l}x\ \ |_0^l}_{=0}$$

$$+2\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\int\limits_0^l \sin\frac{\pi n}{l}\ xdx = -2\left(\frac{l}{\pi n}\right)^3\cos\frac{\pi n}{l}x\ \ |_0^l=$$

$$2\ \left(\frac{l}{\pi n}\right)^3[1-(-1)^n].$$

$$A_{2k}=0;\qquad A_{2k+1}=8\ \frac{l^2}{\pi^3(2k+1)^3}.$$

Общее решение:

$$u(x,t)=\frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos a\frac{\pi(2n+1)}{l}t\cdot\sin\frac{\pi(2n+1)}{l}x. \qquad (A.1.8)$$

II. Одномерное однородное волновое уравнение на отрезке прямой с однородными граничными условиями II краевая задача.

Задача решается по той же схеме, что и предыдущая.

Математическая формулировка.

Уравнение:

$$a^2u_{xx}=u_{tt}. \qquad (A.2.1)$$

Граничные условия:

$$u_x(0,t)=0,$$
$$u_x(l,t)=0. \qquad (A.2.2)$$

Начальные условия:

$$u(x,0) = \varphi(x),$$
$$u_t(x,0) = \psi(x),$$
$$o \le x \le l; \quad 0 \le t. \qquad (A.2.3)$$

Решаем задачу методом разделения переменных, получим общее решение в виде:

$$u(x,t) = \sum_{n=0} T_n(t) X_n(x), \qquad (A.2.4)$$

где $X_n(x)$ - собственные функции задачи:

$$X'' + \lambda X = 0,$$
$$X'(0) = 0,$$
$$X'(l) = 0,$$
$$0 \le x \le l. \qquad (A.2.5)$$

Собственные значения задачи (A.2.5) и соответствующие им собственные функции $X_n(x)$ равны:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2; \;\; n = 0, 1, 2, ...$$
$$X_n(x) = \cos\frac{\pi n}{l}x. \qquad (A.2.6)$$

Квадрат нормы функций (A.2.6) равен:

$$|| \, X_0(x) \, ||^2 = l,$$
$$|| \, X_n(x) \, ||^2 = \frac{l}{2}, \;\; n = 1, 2, 3. \qquad (A.2.7)$$

В общем решении (A.2.4) функция времени и константы общего решения определяются как и в задаче II-99.

По такой же схеме, как и первая, и вторая, решается третья краевая задача для однородного волнового уравнения с однородными граничными условиями. Однако, для нахождения собственных значений в этой задаче, необходимо решать численно трансцедентное уравнение с численными коэфифициентами, входящими в граничные условия, и мы не будем подробно рассматривать здесь эту задачу.

III. Метод собственных функций решения одномерного однородного уравнения.

Заметим, что как и в первой, так и во второй краевой задаче, общее решение формально имеет одинаковый вид:

$$u\ (x,t) = \sum T_n\ (t)\ X_n\ (x). \qquad (A.3.1)$$

т.е. вид разложения по собственным функциям $X_n(x)$ пространственной части задачи. Определив один раз этот набор собственных функций (и собственных значений λ_n) - для первой краевой задачи это выражения (A.1.5 а), для второй - это выражения (A.2.6) - мы можем сразу искать решение задачи в виде (A.3.1.). Подставив это решение в исходное уравнение, получим уравнение для функции времени, решив которое, получим общее решение. В этом суть метода собственных функций.

Таким образом, мы видим, что метод собственных функций - это сокращенный метод разделения переменных, в котором мы полагаем пространственную часть решения - набор собственных функций $X_n(x)$ пространственного оператора - известной, и ищем общее решение в виде разложения (A.3.1) по этому набору.

Проиллюстрируем этот метод на примере решения одномерного однородного теплового уравнения с однородными граничными условиями, первая краевая задача.

З а д а ч а N 100. Найти распределение температуры в стержне длины l с теплоизолированной боковой поверхностью, если концы (торцы) его поддерживаются при нулевой температуре, а начальное распределение температуры вдоль стержня как функция расстояния от одного из концов имеет вид равнобедренного треугольника высоты h и основанием является сам стержень.

Формулировка задачи. Если ось x направить вдоль оси стержня, совместив координату $x = 0$ с левым концом его, а через $u(x,t)$ обозначить температуру осевого сечения с координатой x (температура в сечении остается постоянной в силу теплоизолированности боковой поверхности), то задача - одномерная, и ее математическая формулировка имеет вид:

Уравнение теплопроводности:

$$a^2 u_{xx} = u_t \to a^2 u_{xx} - u_t = 0. \qquad (A.3.2)$$

Граничные условия:

$$u(0,t)=0,$$

$$u\ (l,t)=0. \qquad (A.3.3)$$

Начальное условие:

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} \frac{2xh}{l}, & 0\le x\le \frac{l}{2},\\ (l-x)\frac{2h}{l}, & \frac{l}{2}\le x\le l.\end{cases}$$

$$0\le x\le l, \quad 0\le t. \qquad (A.3.4)$$

Решение задачи.

Подставив (A.3.1) в уравнение (A.3.2), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[a^2T_n\cdot X_n''-X_nT_n']=0. \qquad (A.3.5)$$

Напомним, что функция $X_n\ (x)$ удовлетворяет уравнению

$$X_n''+\lambda_nX_n=0\to X_n''=-\lambda_nX_n. \qquad (A.3.6)$$

где $\lambda_n=(\frac{\pi n}{l})^2, \quad n=1,2...$

Подставив (A.3.6) в (A.3.5), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n'+\lambda_na^2T_n]\ X_n\ (x)=0. \qquad (A.3.7)$$

В силу линейной независимости набора функций $X_n\ (x)$ из (A.3.7) следует, что все коэффициенты в сумме при $X_n(x)$ равны нулю:

$$T_n'+a^2\lambda_nT_n=0. \qquad (A.3.8)$$

Таким образом, получили уравнение для функций $T_n\ (t)$, решение которого есть:

$$T_n=\exp-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2t. \qquad (A.3.9)$$

Общее решение задачи имеет вид:

$$u\ (x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\ A_n\ X_n\ (x)\exp\ \left[\left(-\frac{a\pi n}{l}\right)^2\ t\right]. \qquad (A.3.10)$$

Для определения констант решения используем начальное условие при $t = 0$:

$$\varphi\ (x) = \sum_{n=1}^{\infty}\ A_n \cdot X_n\ (x). \qquad (A.3.11)$$

Рассматривая это выражение как разложение функции $\varphi\ (x)$ по полному набору линейно независимых ортогональных функций, определим набор коэффициентов A_n. Если функция $\varphi\ (x)$ кусочно-гладкая, то ряд (A.3.11) сходится равномерно и по известным правилам:

$$A_n = \frac{\int\limits_0^l \varphi\ (x)\ X_n\ (x)\ dx}{||\ X_n\ (x)\ ||^2}. \qquad (A.3.12)$$

где для первой краевой задачи:

$$||\ X_n\ (x)\ ||^2 = \frac{l}{2},$$

а

$$\int\limits_0^l \varphi\ (x)\ X_n\ (x) dx = \frac{2h}{l} \int\limits_0^{\frac{l}{2}}\ x \sin \frac{\pi n}{l}\ x dx + \frac{2h}{l} \int\limits_{\frac{l}{2}}^{l} (l - x) \sin \frac{\pi n}{l}\ x dx.$$

Вычисляя интегралы по частям, получим:

$$A_{2k} = 0,$$

$$A_{2k+1} = \frac{8h}{\pi^2 (2k+1)^2}\ (-1)^k, \quad k = 0, 1...$$

И общее решение:

$$u\ (x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{\pi(2k+1)}{l}\ x \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\left(\frac{a\pi(2k+1)}{l}\right)^2 \cdot t\right]. \qquad (A.3.13)$$

IV. Одномерные задачи с неоднородными граничными условиями

Мы уже подчеркивали ранее, что только однородность граничных условий позволяет разделить переменные (см. раздел А-I). Здесь же мы говорили о задачах с неоднородными граничными условиями. Нет ли здесь противоречия?

Чтобы решить такие задачи, необходимо переформулировать задачу, т.е. перейти с помощью соответствующей замены к новой функции, для которой граничные условия были бы однородными, и применить к новой задаче метод разделения переменных. Эти замены разные в первой и во второй краевых задачах. Да и в каждой задаче замена не является единственной. Мы же предложим простейшие замены, которые привносят минимальные осложнения (трудности) при решении задачи для вновь вводимой функции. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

а) Рассмотрим первую краевую задачу - одномерное тепловое уравнение с неоднородными граничными условиями. Математическая формулировка:

$$a^2\ u_{xx} = u_t, \qquad (A.4.1.)$$

$$u\ (0,t) = \mu\ (t),$$

$$u\ (l,t) = \nu\ (t), \qquad (A.4.2)$$

$$u\ (x,0) = \varphi\ (x),$$

$$0 \le x \le l; \quad 0 \le t. \qquad (A.4.3)$$

Предложим для искомой функции простейшую замену $u\ (x,t) \rightarrow$ $\rightarrow v\ (x,t)$ такую, чтобы граничные условия для новой функции $v\ (x,t)$ были однородными, и задача решалась для нее методом разделения переменных.

В этой замене, очевидно, с коэффициентами, зависящими от координаты x, должны фигурировать функции $\mu\ (t)$ и $\nu\ (t)$ - ведь об изменении именно граничных условий (граничных функций) идет речь. Предложим простейшие по форме коэффициенты при $\mu\ (t)$ и $\nu\ (t)$ - именно полиномы первой степени. Тогда при подстановке замены в уравнение левая часть не изменится, т.е. для функции $v(x,t)$

будет такой же, как и для функции $u(x,t)$ - двойное дифференцирование зануляет слагаемые с линейными полиномами.

Итак, замена:

$$u\ (x,t) = v\ (x,t) + (Ax+B)\mu(t) + (Cx+D)\nu(t). \qquad (A.4.4)$$

Подставим эту замену в граничные условия и выберем константы A, B, C, D, так, чтобы граничные условия для функции $v\ (x,t)$ были однородными, т.е. чтобы

$$v\ (0,t) = 0, \qquad (A.4.4a)$$

$$v\ (l,t) = 0, \qquad (A.4.4в)$$

$$u\ (0,t) = \mu(t) = v\ (0,t) + B\ \mu\ (t) + D\ \nu\ (t).$$

Для того, чтобы равенство выполнялось при $v\ (0,t) = 0$, необходимо выбрать коэффициенты:

$$B = 1. \qquad D = 0.$$

С учетом этих значений коэффициентов имеем:

$$u\ (l,t) = \nu(t) = v\ (l,t) + (A\cdot l + 1)\mu(t) + C\cdot l\nu(t).$$

Это равенство выполняется при условии $v(l,t) = 0$ при значении констант:

$$A = -\frac{1}{l}, \quad C = \frac{1}{l}.$$

Итак, замена , обеспечивающая однородные граничные условия (A.4.4а), (A.4.4в) для функции $v\ (x,t)$, имеет вид:

$$u\ (x,t) = v(x,t) + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\ \mu\ (t) + \frac{x}{l}\ v\ (t). \qquad (A.4.5)$$

Подставляя замену (A.4.5) в (A.4.1), (A.4.3) получим уравнение и начальное условие для функции $v(x,t)$:

$$a^2 v_{xx} = v_t + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\ \mu'(t) + \frac{x}{l}\ \nu'(t), \qquad (A.4.6)$$

$$v\ (x,0) = \varphi\ (x) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\ \mu\ (0) - \frac{x}{l}\ \nu\ (0). \qquad (A.4.7)$$

Итак, для функции $v\ (x,t)$ имеем задачу: уравнение (А.4.6), однородные граничные условия (А.4.4а) - (А.4.4в) и начальное условия (А.4.7).

Однородность граничных условий для функции $v\ (x,t)$ позволяет надеяться на применимость метода разделения переменных для ее нахождения. Однако уравнение для функции $v\ (x,t)$ стало неоднородным. Методы решения таких уравнений рассмотрим в следующем разделе.

Однако, если граничные условия в исходной задаче являются константами $\mu\ (t) = T_1 = const.$, $\nu\ (t) = T_2 = const$, уравнение для функции $v(x,t)$ становится однородным и задача для $v\ (x,t)$ - решаемой.

Мы уже писали,что замена функции $u\ (x,t)$ с помощью функции, для которой граничные условия были бы однородными, неоднозначна. Например, для рассмотренной задачи такой заменой могла бы быть:

$$u\ (x,t) = v_1\ (x,t) + \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)\ \mu(t) + \frac{x^2}{l^2}\ \nu(t).$$

Легко видеть, что:

$$u(0,t) = \mu\ (t) = v_1\ (0,t) + \mu\ (t) \rightarrow v_1\ (0,t) = 0$$

и

$$u\ (l,t) = \nu\ (t) = v_1\ (l,t) + \nu\ (t) \rightarrow v_1\ (l,t) = 0,$$

т.е. и такая замена обеспечивает для функции $v_1(x,t)$ однородные граничные условия.

Но более сложные - квадратичные по координате - добавки усложняют как уравнение для $v_1\ (x,t)$ - в левой части появятся дополнительные члены, - так и начальные условия для функции $v_1\ (x,t)$. Однако в силу единственности решения исходной задачи допустимы как одна, так и другая замены.

З а д а ч а 200. (Первая краевая задача).

Начальная температура стержня длины l с теплоизолированной боковой поверхностью задается функцией $u\ (x,0) = \varphi(x) = x(x - l) + (1 - \frac{x}{l})\ T_1 + \frac{x}{e}\ T_2$ - парабола, а на торцах его поддерживаются постоянные температуры $T_1 = const$ и $T_2 = const$. Найти температуру стержня в моменты времени $t > 0$.

Выберем систему координат с осью x, направленной вдоль оси стержня, сопоставив левому торцу координату $x = 0$ (тогда правому соответствует $x = l$). Температура стержня (в силу теплоизолированности боковой поверхности) будет меняться от сечения (осевого) к сечению. В выбранной системе координат задача будет одномерной. Обозначим температуру осевого сечения через $u(x,t)$.

Математическая формулировка задачи.

Уравнение (теплопроводности)

$$a^2\, u_{xx} = u_t. \tag{A.4.8.}$$

Граничные условия (неоднородные)

$$u\ (0,t) = T_1,$$

$$u\ (l,t) = T_2.$$

Начальное условие:

$$u\ (x,0) = x\ (x-l) + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\ T_1 + \frac{x}{l}\ T_2.$$

Эту задачу можно решить двумя способами.

Способ а.

Переформулируем задачу, вводя новую функцию $v(x,t)$, для которой граничные условия были бы однородными. Согласно (A.4.5), такая замена имеет вид:

$$u\ (x,t) = v\ (x,t) + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\ T_1 + \frac{x}{l}\ T_2. \tag{A.4.9}$$

Легко видеть, что для функции $v\ (x,t)$ математическая формулировка задачи такова:

$$\begin{aligned} &a^2\ v_{xx} = v_1,\\ &v\ (0,t) = 0,\\ &v\ (l,t) = 0,\\ &v\ (x,0) = x\ (x-l),\\ &0 \le x \le l;\quad 0 \le t. \end{aligned} \tag{A.4.10}$$

И ее решение имеет вид (см. задачу II-99):

$$v\ (x,t) = \sum_{n=1} A_n \frac{\sin \pi n}{l}\ x \cdot \exp[-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t],$$

где

$$A_n = \frac{z}{l}\int\limits_0^l x(x-l)\sin\frac{\pi n}{l}xdx.$$

(Этот интеграл вычислялся ранее):

$$u(x,t) = \left(1-\frac{x}{l}\right)T_1+\frac{x}{l}T_2+\sum_{n=1}A_n\sin\frac{\pi n}{l}x\exp[-\left(\frac{a\pi n}{L}\right)^2 t]. \qquad (A.4.11)$$

Способ в.

Поскольку граничные условия в задаче (A.4.8) не зависят от времени, разобьем решение на две части:

$$u(x,t) = \omega(x,t) + g(x),$$

где часть решения $g(x)$ обусловлена граничными условиями и тоже не зависит от времени (частное решение), а граничные условия для $\omega(x,t)$ однородны. Общее решение однородного уравнения:

$$a^2\omega_{xx} = \omega_t,$$

$$\omega(0,t) = 0,$$

$$\omega(l,t) = 0, \qquad (A.4.12)$$

$$\omega(x,0) = x(x-l) + \left(1-\frac{x}{l}\right)T_1 + \frac{x}{l}T_2 - g(x),$$

$$g'' = 0,$$

$$g(0) = T_1,$$

$$g(l) = T_2,$$

$$0 \le x \le l; 0 \le t. \qquad (A.4.13)$$

Легко видеть, что две задачи - (A.4.12) и (A.4.13) в сумме дают задачу (A.4.8.). Отметим также, что из этих двух задач надо прежде решить вторую (A.4.13), т.к. ее решение - функция $g(x)$ - входит в начальное условие задачи (A.4.12).

Итак,

$$g(x) = c_1x + c_2,$$

где из граничных условий в (A.4.13) следует:

$$g(0) = T_1 = c_2 \to c_2 = T_1,$$

$$g(l) = c_1 l + T_1 = T_2 + c_1 = \frac{T_2 - T_1}{l}$$

и

$$g(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) T_1 + \frac{x}{l} T_2.$$

Начальное условие в (A.4.12) теперь определено и имеет вид:

$$\omega(x, 0) = x(x - l).$$

Таким образом, задача для функции $\omega(x,t)$ совпадает с задачей для функции $v(x,t)$ в способе решения (**a**), и общее решение совпадает с решением задачи в предыдущем варианте (способ **a**).

V.Неоднородные граничные условия, вторая краевая задача

Рассмотрим решение одномерной тепловой задачи с неоднородными граничными условиями, вторая краевая задача.

Формулировка (математическая).

$$\begin{aligned} &a^2 u_{xx} = u_t,\\ &u_x(o,t) = \mu(t),\\ &u_x(l,t) = \nu(t),\\ &u(x,0) = \varphi(x), \\ &0 \le x \le l. \qquad 0 \le t \end{aligned} \tag{A.5.1}$$

Задачу прямо решить методом разаделения переменных в силу неоднородности граничных условий невозможно. Необходимо ее переформулировать, т.е. ввести новую функцию $v(x,t)$, для которой граничные условия были бы однородными.

Граничные условия чисто формально имеют такой же вид, как и в предыдущей задаче, но заданы они для производной функции $u(x,t)$. Так сделаем замену для производной функции, аналогичную той, что сделана для самой функции в предыдущей задаче, т.е. сделаем замену:

$$u_x(x,t) = v_x(x,t) + \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu(t) + \frac{x}{l}\nu(t). \tag{A.5.2}$$

Легко видеть, что для функции $v_x(x,t)$ граничные условия будут однородными. Действительно,

$$u_x(0,t) = \mu(t) = v_x(0,t) + \mu(t) \to v_x(0,t) = 0,$$

$$u_x(l,t) = \nu(t) = v_x(l,t) + \nu(t) \to v_x(l,t) = 0.$$

Подставим замену (A.5.2) в уравнение и начальное условие (A.5.1).

Левая часть уравнения в (A.5.1) легко определяется повторным дифференцированием (A.5.2):

$$u_{xx} = v_{xx} - \frac{1}{l}\mu(t) + \frac{1}{l}\nu(t). \tag{A.5.3}$$

Для получения $u_t(x,t)$ необходимо предварительно проинтегрировать замену (A.5.2) по переменной x:

$$u(x,t) = v(x,t) + \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\mu(t) + \frac{x^2}{2l}\,\nu(t) + c(t). \tag{A.5.4}$$

Откуда:

$$u_t(x,t) = v_t(x,t) + \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\mu'(t) + \frac{x^2}{2l}\nu'(t) + c'(t), \tag{A.5.5}$$

где $c(t)$ - постоянная интегрирования по x, функция переменной t, которую нам еще предстоит доопределить, чтобы максимально упростить вычислительную часть задачи.

Из выражения (A.5.4) получим начальное условия для функции $v(x,t)$:

$$v(x,o) = \varphi(x) - \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\mu(0) - \frac{x^2}{2l}\nu(0) - c(0). \tag{A.5.6}$$

Подставляя (A.5.3), (A.5.5) в уравнение (A.5.1) получим уравнение для функции $v(x,t)$:

$$a^2 v_{xx} + \frac{a^2}{l}[\nu(t) - \mu(t)] = v_t + \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\mu'(t) + \frac{x^2}{2l}\nu'(t) + c'(t).$$

Доопределим функцию $c(t)$ так, чтобы упростить это уравнение - приравнивая в нем справа и слева члены, зависящие только от времени t:

$$c'(t) = \frac{a^2}{l}[\nu(t) - \mu(t)], \quad c(0) = c_0. \tag{A.5.7}$$

Таким образом, задача для функции $c(t)$ поставлена, а уравнение для $v(x,t)$ упростится.

Постоянная c_0 тоже выбирается наиболее рациональным для всей задачи образом.

В частности, если в функции $\varphi(x)$ в начальном условии есть константа φ_0, т.е. $\varphi(x) = \varphi_0 + \varphi_1(x)$, то выбирается:

$$c_0 = \varphi_0$$

с тем, чтобы упростить начальное условие, а следовательно, сократить вычислительные операции при вычислении констант общего решения.

Итак, для функции $v(x,t)$ имеем задачу:

$$a^2 v_{xx} = v_t + \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\mu'(t) + \frac{x^2}{2l}\nu'(t),$$

$$v_x(0,t) = 0,$$

$$v_x(l,t) = 0,$$

$$v(x,0) = \varphi(x) - \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\mu(0) - \frac{x^2}{2l}\nu(0) - c(0), \qquad (A.5.8)$$

а,

$$u(x,t) = v(x,t) + \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\mu(t) + \frac{x^2}{2l}\nu(t) + c(t), \qquad (A.5.9)$$

где $c(t)$ определяется из задачи:

$$c'(t) = \frac{a^2}{l}[\nu(t) - \mu(t)], \qquad c(0) = c_0$$

с соответствующим рациональным выбором константы c_0.

Для функции $v(x,t)$ получена задача с <u>однородными</u> граничными условиями, что позволяет надеяться на применимость метода разделения переменных для ее решения. Но уравнение в (A.5.8) неоднородно, и наш следующий шаг - научиться решать такие уравнения.

Однако, если граничные функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ есть константы, то в этом частном случае $[\nu'(t) = 0, \mu'(t) = 0]$ уравнение становися однородным, и для функции $v(x,t)$ получается решаемая известным нам методом задача.

З а д а ч а 201.

Рассмотреть тепловую задачу для стержня длины l, $0 \le x \le l$ (ось x направлена вдоль оси стержня) с теплоизолированной боковой поверхностью, если торец его $x = 0$ теплоизолирован, на торец $x = l$ подается извне постоянный тепловой поток, а начальная температура $T_0 = const$.

Если обозначить через $u\,(x,t)$ температуру осевого сечения стержня с координатой x, задача будет одномерной (правильный выбор системы координат, теплоизолированность боковой поверхности).

Математическая формулировка задачи:

$$
\begin{gathered}
a^2 u_{xx} = u_t,\\
u_x(0,t) = 0,\\
u_x(l,t) = q = const, \qquad\qquad (A.5.10)\\
u(x,0) = T_0,\\
0 \le x \le l, \qquad 0 \le t.
\end{gathered}
$$

Вводим новую функцию $v(x,t)$, для которой граничные условия были бы однородными, по формуле:

$$u_x(x,t) = v_x(x,t) + \frac{x}{l}q. \qquad (A.5.11)$$

Отсюда для самой функции $u\,(x,t)$ следует замена:

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x^2}{2l}q + c(t), \qquad (A.5.12)$$

где $c(t)$ - постоянная интегрирования по переменной x, являющаяся функцией времени t.

Подставляя выражение (А.5.12) в (А.5.10), получим математическую формулировку задачи для функции $v(x,t)$:

$$
\begin{gathered}
a^2 v_{xx} + \frac{a^2}{l}q = v_t + c'(t),\\
v_x(0,t) = 0, \qquad\qquad (A.5.13)\\
v_x(l,t) = 0,\\
v(x,0) = T_0 - c_0 - \frac{x^2}{2l}q = \varphi(x),
\end{gathered}
$$

где $c_0 = c(0)$ - константа, которую еще предстоит выбрать наилучшим образом.

Выберем функцию $c(t)$ так, чтобы:

$$c'(t) = \frac{a^2}{l} q.$$

Тогда уравнение для функции $v(x,t)$ становится однородным, $a^2 v_{xx} = v_t$, а

$$c(t) = \frac{a^2}{l} q \cdot t + c_0. \qquad (A.5.14)$$

Если выбрать константу $c_0 = T_0$, то такой выбор упростит начальное условие для функции $v(x,t)$:

$$v(x,0) = -\frac{x^2}{2l} q.$$

т.е. задача для $v(x,t)$ имеет вид:

$$a^2 v_{xx} = v_t,$$
$$v_x(0,t) = 0 \qquad v_x(l,t) = 0,$$
$$v(x,0) = -\frac{x^2}{2l} q \qquad 0 \le x \le l. \qquad (A.5.15)$$

Задача (A.5.15) - вторая краевая с однородным уравнением и однородными граничными условиями, подобная задача нами уже решалась. Решение с точностью до набора констант имеет вид:

$$u(x,t) = \sum C_n X_n(x) \exp[-(a^2 \lambda_n t)], \qquad (A.5.16)$$

где

$$X_n(x) = \cos \sqrt{\lambda_n}\ t, \qquad \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 0, 1, 2....$$

Набор констант C_n определяется из начального условия – при $t = 0$:

$$-\frac{x^2}{2l}\ q = \sum C_n X_n(x).$$

Откуда:

$$C_n = -\frac{q}{2l} \frac{1}{||\ X_n(x)\ ||^2} \int_0^l x^2 X_n(x) dx. \qquad (A.5.17)$$

Интеграл в (А.5.17) вычисляем по частям, напомнив, что:

$$X_n(x) = -\frac{1}{\lambda_n} X_n''(x).$$

Тогда:

$$\int\limits_0^l x^2 X_n(x)dx = -\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^l x^2 X''(x)dx =$$

$$\underbrace{-\frac{1}{\lambda_n}\ x^2 X_n'(x)\ \ |_0^l}_{=0}.$$

$$+\frac{2}{\lambda_n}\int\limits_0^l X_n'(x) x dx =$$

$$= \frac{2}{\lambda_n} x X_n(x)\ |_0^l - \frac{2}{\lambda_n}\int\limits_0^l X_n(x)dx = \frac{2l}{\lambda_n}\cos \pi n -$$

$$\underbrace{\frac{2}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}}\sin\frac{\pi n}{l}\ x\ |_0^l}_{=0}$$

$$= \frac{2l}{\lambda_n}(-1)^n; \qquad n \neq 0.$$

При $n = 0$: $\int\limits_0^l x^2 X_0(x)dx = \frac{1}{3}l^3$.

Учитывая, что $|| \ X_n(x) \ ||^2 = \frac{l}{2}$ при $n \neq 0$:

$$|| \ X_0(x) \ ||^2 = l.$$

Имеем:

$$C_n = (-1)^{n+1}\frac{2ql}{\pi^2 n^2}; \qquad n \neq 0; \qquad C_0 = -\frac{ql}{6}$$

VI. Решение одномерных задач с неоднородностью в уравнении.

Мы рассмотрим различные характерные типы неоднородностей, и для них предложим наиболее эффективные методы решения задач - на примерах конкретных задач.

а) Задачи со стационарной неоднородностью.

Рассмотрия решение одномерного неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородностью, зависящей только от координаты (стационарная неоднородность) с однородными граничными условиями, первая краевая задача (для отрезка).

Формулировка задачи.

$$
\begin{aligned}
&a^2u_{xx} + f(x) = u_t.\\
&u(0,t) = 0.\\
&u(l,t) = 0. \qquad (A.6.1)\\
&u(x,0) = \varphi(x).\\
&0 \le x \le l, \qquad 0 \le t.
\end{aligned}
$$

Будем искать решение в виде:

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x), \qquad (A.6.2)$$

где $v(x,t)$ - общее решение задачи с однородным уравнением, которую мы умеем решать:

$$
\begin{aligned}
&a^2v_{xx} = v_t,\\
&v(0,t) = 0,\\
&v(l,t) = 0, \qquad (A.6.3)\\
&v(x,0) = \varphi(x) - w(x),
\end{aligned}
$$

а $\omega(x)$ - частное решение исходного уравнения, обусловленное стационарной неоднородностью. Это решение полагаем тоже зависящим только от координаты, как и причина, его обусловившая (стационарная неоднородность):

$$
\begin{aligned}
&a^2\omega_{xx} = -f(x),\\
&\omega(0) = 0,\\
&\omega(l) = 0,\\
&0 \le x \le l. \qquad (A.6.4)
\end{aligned}
$$

Это задача с обыкновенным дифференциальным уравнением, которую мы умеем решать. И прежде всего надо найти сначала функцию $\omega(x)$, поскольку она входит - в виде начального условия - в формулировку задачи (A.6.3). Но оказывается, что функцию $\omega(x)$ и не надо находить для решения задачи (A.6.3), хотя для суммарного решения ее надо знать.

Действительно, общее решение задачи (A.6.3), как мы уже неоднократно убеждались, имеет вид:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x)\exp\left[-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2t\right], \qquad (A.6.5)$$

где

$$X_n''(x)+\lambda_nX_n=0\to X_n=-\frac{1}{\lambda_n}X_n'',$$

$$X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad \lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \qquad n=1,2,3...$$

Первая краевая задача:

$$A_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\left[\varphi(x)-\omega(x)\right]X_n(x)dx=I_1-I_2.$$

Здесь интеграл:

$$I_1=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)X_n(x)dx$$

и при заданной функции $\varphi(x)$ вычисляется, а

$$I_2=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\omega(x)dx=-\frac{2}{l\lambda_n}\int\limits_0^l\omega(x)X_n''(x)dx.$$

Последний интеграл вычисляем по частям:

$$\int\limits_0^l w(x)\,X_n''(x)\,dx=\mid u=w(x);\ du=w'dx;X_n''(x)dx=dv;v=X_n'(x)\mid=$$

$$=\underbrace{w(x)\ X_n'(x)\mid_0^l}_{=0}-.$$

$$-\int\limits_0^l\ w'(x)\,X_n'(x)dx=\mid w'(x)=u;\ du=w''dx;\ dv=X_n'dx;\ v=X_n\mid=$$

$$=\underbrace{-w'\ (x)\ X_n(x)\mid_0^l}_{=0}+$$

$$+\int\limits_0^l\ w''X_n\ (x)dx=-\frac{1}{a^2}\ \int\limits_0^l X_n\ (x)\ f(x)\ dx.$$

При заданной функции $f(x)$ последний интеграл вычисляется и задача в целом решаема.

в) Неоднородность уравнения имеет характерный для данного процесса вид.

Пусть, например, для тепловой задачи неоднородность имеет вид:

$$f(x,t)=\beta(x)e^{-\alpha t}.$$

Для волнового уравнения такой характерной зависимостью будет $f(x,t)\sim\sin\omega t$ (или $f(x,t)\sim\cos\omega t$).

Решим для этого варианта тепловую задачу. (Первая краевая задача с однородными граничными условиями):

$$\begin{aligned}
&a^2u_{xx}-x\cdot e^{-\alpha t}=u_t,\\
&u(0,t)=0,\\
&u(l,t)=0,\\
&u(x,0)=\varphi(x)=\tfrac{1}{\alpha}x,\\
&0\le x\le l,\qquad 0\le t.
\end{aligned}\qquad (A.6.6)$$

(Мы конкретизировали и функцию неоднородности, и начальное условие). Ищем решение в виде общего решения однородного уравнения $v(x,t)$ и частного решения неоднородного уравнения $\omega(x,t)$:

$$u(x,t)=v(x,t)+\omega(x,t),$$

где:

$$\begin{aligned}
&a^2v_{xx}=v_t,\\
&v(0,t)=0,\qquad v(l,t)=0,\\
&v(x,0)=\varphi(x)-\omega(x,0),
\end{aligned}\qquad (A.6.7).$$

а $\omega(x,t)$ удовлетворяет задаче:

$$\begin{aligned}
&a^2\omega_{xx}-x\cdot e^{-\alpha t}=\omega_t,\\
&\omega(0,t)=0,\qquad \omega(l,t)=0.
\end{aligned}\qquad (A.6.8)$$

Будем искать частное решение $\omega(x,t)$ в виде, соответствующем неоднородности уравнения:

$$\omega(x,t)=\gamma(x)e^{-\alpha t}.\qquad (A.6.9)$$

Поскольку временная зависимость функции $\omega(x,t)$ нами определена, начальное условие для нее нет необходимости задавать, это условие определяется функцией $\gamma(x)$:

$$\omega(x,0)=\gamma(x).$$

Осталось найти функцию $\gamma(x)$. Подставляя (A.6.9) в (A.6.8), получим задачу для $\gamma(x)$:

$$a^2\gamma''e^{-\alpha t}-xe^{-\alpha t}=-\alpha\gamma(x)e^{-\alpha,t}.$$

откуда следует:

$\gamma'' + \frac{\alpha}{a^2}\gamma = \frac{1}{a^2}x, \qquad \gamma(0) = 0, \qquad \gamma(l) = 0. \qquad (A.6.10)$

Для функции $\gamma(x)$ получили обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение, решение которого:

$\gamma(x) = \gamma_0(x) + \gamma_r(x),$

где $\gamma_0(x)$ - общее решение однородного уравнения;

$\gamma_0'' + \frac{\alpha}{a^2}\gamma_0 = 0,$

а $\gamma(x)$ - частное решение неоднородного уравнения;

$\gamma_r(x) + \frac{\alpha}{a^2}\ \gamma_r = \frac{1}{a^2}\ x,$

обусловленное его правой частью. (Константу α считаем положительной, иначе решение (A.6.9) было бы бесконечно нарастающим).

$\gamma_0(x) = A\cos\frac{\sqrt{\alpha}}{a}\ x + B\sin\frac{\sqrt{\alpha}}{a}\ x.$

$\gamma_r = \frac{1}{\alpha}x.$

Из граничных условий (A.6.10) следует:

$A = 0, \quad B = -\frac{l}{\alpha\sin\frac{\sqrt{\alpha}}{a}l}$

и

$\gamma = \frac{-l}{\alpha\sin\frac{\sqrt{\alpha}}{a}l}\sin\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x + \frac{1}{\alpha}x. \qquad (A.6.11)$

Мы для простоты рассматриваем нерезонансный случай: $\underline{\frac{\sqrt{\alpha}l}{a} \neq \pi n}$.

Решение задачи (A.6.7) нами было получено ранее:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x\exp[-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2\ t], \qquad (A.6.12)$$

где

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l\ [\varphi(x) - \gamma(x)]\sin\frac{\pi n}{l}\ x\ dx =$$

$$= \frac{2}{\alpha\sin\frac{\sqrt{\alpha}}{a}l}\int\limits_0^l \sin\frac{\sqrt{\alpha}}{a}\ x\sin\frac{\pi n}{l}x\ dx,$$

$$\int\limits_0^l \sin\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x\sin\frac{\pi n}{l}x\ dx = \frac{1}{2}\int\Big[\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a} - \frac{\pi n}{l}\right)\ x +$$

$$+\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a} + \frac{\pi n}{l}\right)\ x\Big]\ dx = \frac{1}{2[\frac{\sqrt{\alpha}}{a} - \frac{\pi n}{l}]}\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a} - \frac{\pi n}{l}\right)x\ |_0^l +$$

$$+\frac{1}{2[\frac{\sqrt{\alpha}}{a} + \frac{\pi n}{l}]}\ \sin\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{a} + \frac{\pi n}{l}\right]\ x\ |_o^l = \frac{(-1)^n\ \frac{\sqrt{\alpha}}{a}}{\frac{\alpha}{a^2} - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}\ \sin\frac{\sqrt{\alpha}}{a}l,$$

$$A_n = (-1)^n \frac{1}{\frac{\alpha}{a^2} - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{\alpha}}. \qquad (A.6.13)$$

Общее решение исходной задачи (А.6.6) имеет вид:

$$u(x,t) = \left[\frac{-l}{\alpha \cdot \sin \frac{\sqrt{\alpha}}{a} l} \sin \frac{\sqrt{\alpha}}{a} x + \frac{1}{\alpha} x\right] e^{-\alpha t} +$$

$$+\frac{2}{a\sqrt{\alpha}} \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{\frac{\alpha}{a^2} - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} \sin \frac{\pi n}{l} x \exp\left[-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t\right]. \qquad (A.6.14)$$

C. Неоднородность в уравнении $f(x,t)$ произвольного вида.

Если неоднородность уравнения не дает возможности представить частное решение в удобном для дальнейшего решения виде, можно воспользоваться для решения методом собственных функций.

Рассмотрим этот метод на решении неоднородного одномерного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями (первая краевая задача) для отрезка прямой длины l.

Формулировка задачи математическая:

$$a^2 u_{xx} + f(x,t) = u_t,$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x).$$

$$0 \le x \le l, \qquad 0 \le t. \qquad (A.6.15)$$

При однородном уравнении мы получаем решение в виде разложения по функциям:

$$X_n(x) = \frac{\sin \pi n}{l} x \qquad n = 1, 2.....$$

Полагая, что и при неоднородном уравнении допустимыми элементами пространственной части решения будут те же функции $X_n(x)$, т.к. ни пространственный оператор, ни сам исследуемый объект не изменились, разумно искать решение и этой задачи в виде разложения по тем же функциям $X_n(x)$, т.е. в виде:

$$u(x,t) = \sum T_n(t) \cdot X_n(x). \qquad (A.6.16)$$

Подставив это решение в уравнение (A.6.15), и разлагая неоднородность $f(x,t)$ по тому же набору функций $X_n(x)$:

$$f(x,t) = \sum f_n(t) X_n(x),$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t) X_n(x) dx,$$

получим, (напомним, что $X_n'' = -\lambda_n X_n, \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$).

$$\sum_{n=1} [T_n' + a^2\lambda_n T_n - f_n(t)] X_n(x) = 0.$$

В силу линейной независимости функций $X_n(x)$ из последнего уравнения следует, что все коэффициенты при $X_n(x)$ в этой сумме равны нулю:

$$T_n' + a^2\lambda_n T_n - f_n(t) = 0, \qquad (A.6.17)$$

т.е. получаем обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение для функции $T_n(t)$, т.е. для коэффициентов разложения (A.6.16), решая которое, получим:

$$T_n(t) = T_{n\ \text{одн.}}(t) + T_{n\ \text{частн.}}(t),$$

где

$$T_{n\ \text{одн.}} = A_n \exp[-a^2\lambda_n t],$$

$$T_{n\ \text{частн.}} = \int\limits_0^t f_n(\tau)\exp[-a^2\lambda_n(t-\tau)] d\tau.$$

Подставляя полученное решение для $T_n(t)$ в (A.6.16) и применяя для вычисления констант A_n начальное условие в (A.6.15), получим общее решение задачи (A.6.15).

VII. Общая краевая задача

Общая краевая задача для одномерного уравнения теплопроводности (первая краевая задача) формулируется так:

$$a^2 u_{xx} + f(x,t) = u_t,$$

$$u(0,t) = \mu(t),$$
$$u(l,t) = \nu(t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x),$$
$$0 \leq x \leq l; \quad 0 \leq t.$$

Итак, это задача со всеми возможными неоднозначностями (граничные условия, уравнение).

Мы наметим шаги (этапы) по решению этой задачи, а сами эти шаги нам уже известны.

1. Переформулировать задачу - ввести новую функцию $v(x,t)$ по уже известным формулам, для которой граничные условия были бы однородными. При этом в уравнении для функции $v(x,t)$ и в начальном условии появятся дополнительные члены.

2. Полученную задачу решать методами, изложенными в разделе A-VI.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ
Глава B. Задачи с прямоугольной симметрией

Решим задачу для однородного уравнения теплопроводности в прямоугольном параллелепипеде с ребрами l_1, l_2, l_3 с однородными граничными условиями, первая краевая задача (для внутренней области параллелепипеда); $u(\vec{r},t)$ - температура внутренних точек параллелепипеда.

Математическая формулировка задачи:

$$a^2 \Delta u = u_t,$$
$$u \mid_s = 0,$$
$$u \mid_{t=0} = \varphi(P_.). \qquad (B.1)$$

Здесь S - поверхность параллелепипеда, $P_.$ - его внутренние точки.

В силу однородности и уравнения, и граничных условий уже на этом этапе, до выбора системы координат, можно разделить пространственную и временную части решения. Действительно, ищем решение (B.1) в виде:

$$u(\vec{r},t) = U(\vec{r}) \cdot T(t).$$

Подстановка в (В.1) с последующим делением на $a^2U(\vec{r})\cdot T(t)$ дает:

$$\frac{\Delta U}{U}=\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T}=-\lambda,$$

откуда следует уравнение для временной части решения $T(t)$:

$$T'+a^2\lambda T=0 \qquad (B.2)$$

и для пространтсвенной части $U(\vec{r})$:

$$\Delta U+\lambda U=0. \qquad (B.3)$$

с граничными условиями:

$$U\mid_s=0. \qquad (B.4)$$

Для пространственной части решения получили задачу на собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в прямоугольном параллелепипеде при краевом условии первого типа, решив которую, найдем набор собственных значений λ_n - и задача для временной части $T(t)$ тоже будет поставлена.

В пространственной задаче - уравнение в частных производных. Поскольку в этой задаче граничные условия однородные, можно ожидать, что для ее решения можно применить метод разделения переменных. Но однородности граничных условий еще недостаточно. Надо еще:

а) выбрать правильно систему координат, обладающую той же симметрией, что и исследуемый объект, т.е. в выбранной системе координат должны быть координатные поверхности, топологически повторяющие поверхность рассматриваемого объекта (плоскости). Только в этом случае координатная поверхность (а они, напомним, задаются фиксированными координатами) может совпасть с поверхностью объекта, т.е. при фиксированной координате выполнится нулевое граничное условие, что дает граничное условие для функции этой координаты (переменной), и переменные разделяются.

в) необходимо правильно ориентировать выбранную систему координат и правильно привязать ее к рассматриваемому объекту, чтобы части координатных поверхностей могли совпасть с частями поверхности рассматриваемого объекта (они могут, например, просто пересекаться друг с другом, даже имея одинаковую топологию).

Все эти аспекты решения задачи (B.1) мы рассмотрим на конкретном примере.

З а д а ч а 300. Найти температуру $u(\vec{r}, t)$ внутренних точек прямоугольного параллелепипеда с ребрами l_1, l_2, l_3, если температура его поверхности поддерживается нулевой, а начальная температура представляет собой произведение 3-х парабол по переменным, направленным вдоль разных ребер (с занулением на противоположных гранях - для соответствия граничным условиям).

В общем виде задача задана формулами (B.1). Разделив предварительно временную и пространственную часть решения, т.е. представив его в виде:

$$u(\vec{r}) = U(\vec{r}) \cdot T(t),$$

получим для временной части уравнение (B.2), а для пространственной части $u(\vec{r})$ - задачу:

$$\Delta U + \lambda U = 0, \qquad U \mid_s = 0. \qquad (B.5)$$

Первый шаг при решении этой задачи - выбор системы координат. Поскольку границы нашего объекта - параллелепипеда - представляют собой взаимно ортогональные части плоскостей, необходимо выбрать систему координат, в которых семейства координатных поверхностей были бы той же топологии - т.е. были бы взаимно ортогональными плоскостями. Такой системой координат будет декартова (x, y, z).

Второе - ориентируем оси системы координат вдоль ребер. Тогда, например, две из координатных поверхностей $x = const$ своими частями совпадут с гранями, перпендикулярными ребру, вдоль которого направили ось x. Аналогичная картина и для координатных поверхностей $y = const$ и $z = const$.

Далее - для конкретизации и упрощения вычислительного процесса - привяжем выбранную систему координат к исследуемому объекту, для чего поместим начало координат в одну из вершин параллелепипеда .

В таким образом выбранной, ориентированной и привязанной к объекту системе координат с гранями параллелепипеда совпадают координатные поверхности (их части) попарно:

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = l_1. \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0, \\ y = l_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0, \\ z = l_3. \end{cases}$$

Математическая формулировка задачи для пространственной функции в выбранной системе координат:

$$U(\vec{r}) = U(x, y, z).$$

имеет вид: уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \lambda U = 0. \qquad (B.6)$$

Граничные условия:

$U(0, y, z) = 0,$
$U(l_1, y, z) = 0,$
$U(x, 0, z) = 0,$
$U(x, l_2, z) = 0,$
$U(x, y, 0) = 0,$
$U(x, y, l_3) = 0. \qquad (B.7)$

Начальное условие при этом имеет вид:

$$U(x, y, z, 0) = D \cdot x \cdot y \cdot z(l_1 - x) \cdot (l_2 - y) \cdot (l_3 - z). \quad (B.8)$$

Ищем решение (B.6) в виде произведения функций, каждая из которых зависит от одной координаты:

$$U(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z).$$

Подставляя это выражение в (B.6) и разделив полученное уравнение на $\cdot X \cdot Y \cdot Z$ имеем:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \lambda = 0. \qquad (B.9)$$

Отсюда и из граничных условий (B.7) следует:

$$X'' + \lambda_1 X = 0 \quad U(0, y, z) = X(0) \cdot Y \cdot Z + X(0) = 0 \to X(0) = 0,$$

$$U(l_1, y, z) = X(l_1) \cdot Y \cdot Z = 0 \to X(l_1) = 0 \qquad 0 \le x \le l_1.$$

Аналогично:

$$Y'' + \lambda_2 Y = 0 \quad Y(0) = 0 \quad Y(l_2) = 0 \quad 0 \le y \le l_2,$$

$$Z'' + \lambda_3 Z = 0 \quad Z(0) = 0 \quad Z(l_3) = 0 \quad 0 \le z \le l_3,$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Решения этих задач известны (одномерные задачи):

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l_1}x; \qquad \lambda_{1n} = \left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2,$$

$$Y_m(y) = \sin\frac{\pi m}{l_2}y; \qquad \lambda_{2m} = \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2,$$

$$Z_p(z) = \sin\frac{\pi p}{l_3}z; \qquad \lambda_{3p} = \left(\frac{\pi p}{l_3}\right)^2,$$

$$\lambda_{nmp} = \pi^2\left[\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{p^2}{l_3^2}\right]; \quad n, m, p = 1, 2, 3, ...$$

Временная функция удовлетворяет уравнению:

$$T'_{nmp} + a^2\lambda_{nmp}T_{nmp} = 0.$$

Его решение:

$$T_{nmp}(t) = \exp[-a^2\lambda_{nmp}\cdot t].$$

Набор частных решений задачи имеет вид:

$$u_{nmp}(x, y, z, t) = X_n(x)Y_m(y)Z_p(z)\cdot T_{nmp}(t).$$

Общее решение:

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n,m,p=1}^{\infty} A_{nmp}\sin\frac{\pi n}{l_1}\,x\cdot\sin\frac{\pi m}{l_2}\,y\cdot\sin\frac{\pi p}{l_3}\,z\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-a^2\pi^2\left(\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{p^2}{l_3^2}\right)\cdot t\right]. \qquad (B.10)$$

А набор констант A_{nmp} определяется из начального условия (В.8):

$$D\cdot xyz(l_1 - x)(l_2 - y)(l_3 - z) = \sum_{n,m,p=1}^{\infty} A_{nmp}X_n(x)Y_m(y)\cdot Z_p(z).$$

Рассматривая это равенство как разложение функции в левой части в ряд по $X_n(x)Y_m(y)Z_p(z)$, имеем:

$$A_{nmp} = \frac{8}{l_1 l_2 l_3}\int_0^{l_1} x\;(l_1 - x)\sin\frac{\pi n}{l_1}\,xdx\int_0^{l_2} y\;(l_2 - y)\times$$

$$\times \sin \frac{\pi m}{l_2}\ ydy \int\limits_0^{l_3} z(l_3 - z) \sin \frac{\pi p}{l_3}\ zdz =$$

$$= \frac{16}{(l_1 l_2 l_3)^2}\ [1 - (-1)^n][1 - (-1)^m]\ [1 - (-1)^p].$$

(Интеграл вычислялся ранее).

Глава С. ЗАДАЧИ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

I. Постановка задачи, разделение переменных

Рассмотрим тепловую задачу для внутренней области цилиндра длины l, радиуса ρ_0, если поверхность его S поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура есть функция внутренней точки P. Обозначив температуру точек цилиндра через $u(\vec{r}, t)$, запишем в общем виде формулировку задачи. Напомним, что мы всегда ищем нетривиальное и ограниченное решение.

Уравнение: $a^2 \Delta u = u_t$. $\qquad (C.1.1)$

Граничное условие: $u \mid_S = 0$.

Начальное условие: $u \mid_{t=0} = \varphi(P) \qquad \mid u(\vec{r}, t) \mid < \infty$.

Однородные уравнения и однородные граничные условия допускают разделение пространственной и временной частей решения еще до выбора конкретной системы координат.

Ищем решение (С.1.1) в виде:

$$u(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) T(t).$$

Подставив в уравнение, получим:

$$a^2 T \Delta U = U \cdot T',$$

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{1}{a^2}\ \frac{T'}{T} = -\lambda,$$

$$\Delta U + \lambda U = 0 \qquad T' + a^2 \lambda T = 0.$$

Из граничного условия:

$$U \cdot T \mid_S = U \mid_S \cdot T = 0 \to U \mid_S = 0.$$

Итак, для функции $U(\vec{r})$ получили задачу на собственные значения (С.З.) и собственные функции (С.Ф.) оператора Лапласа в цилиндре (при граничном условии первого типа):

$$\begin{cases} \Delta U + \lambda U = 0, \\ U \mid_S = 0. \end{cases} \qquad (C.1.2)$$

Решив эту задачу, найдем полный набор С.З. λ и полный набор С.Ф., после чего задача для функции $T(t)$ становися определенной и решаемой. Но прежде надо решить задачу (С.1.2.). Уравнение в (С.1.2.) - в частных производных. Для решения его методом разделения переменных необходимо правильно выбрать систему координат и правильно ориентировать (и привязать) ее относительно цилиндра. Система координат - цилиндрическая (ρ, φ, z), именно в ней есть координатные поверхности, повторяющие топологически поверхность нашего объекта - цилиндры, $\rho = const$, и плоскости, $z = const$. Ось z направим вдоль оси цилиндра, точку $z = 0$ привяжем к левому торцу (тогда для правого $z = l$). В выбранной таким образом системе координат задача (С.1.2) записывается так:

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \lambda U = 0. \qquad (C.1.3)$$

$$\begin{cases} U(\rho_0, \varphi, z) = 0, \\ U(\rho, \varphi, 0) = 0, \\ U(\rho, \varphi, l) = 0. \end{cases} \qquad (C.1.4)$$

$$U(\rho, \varphi + 2\pi, z) = U(\rho, \varphi, z),$$

$$\mid U(\rho, \varphi, z) \mid < \infty,$$

$$0 \le \rho \le 2\pi, \qquad 0 \le \rho \le \rho_0, \qquad 0 \le z \le l.$$

Последние два условия - условие периодичности по угловой переменной и условие ограниченности решения. Ищем полный набор частных решений в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит от одной переменной:

$$U(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

Подставляем в (С.1.3) и делим на произведение $R\Phi Z$:

$$\frac{1}{R}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} + \lambda = 0. \qquad (C.1.5)$$

$$\frac{Z''}{Z} = -k_3^2 \to Z'' + k_3^2 Z = 0.$$

Из (С.1.4):

$$R(\rho) \cdot Z(0)\Phi(\varphi) = 0 \to Z(0) = 0, \qquad (C.1.6)$$

$$R(\rho)\Phi(\varphi)Z(l) = 0 \to Z(l) = 0,$$

$$0 \le z \le l,$$

Решение задачи (С.1.6) мы знаем:

$$Z_p(z) = \sin\frac{\pi p}{l} \cdot z,$$

$$k_{3p} = \frac{\pi p}{l}, \qquad p = 1, 2...$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -n^2,$$

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, -\infty \le n \le \infty.$$

(с учетом периодичности и ограниченности).

Для функции $R(\rho)$ получим задачу: Уравнение

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(k^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R = 0. \qquad (C.1.7a)$$

Граничные условия:

$$R(\rho) \cdot \Phi(\varphi)Z(z) = \to R(\rho_0) = 0, \qquad (C.1.7)$$

$$\mid R(\rho) \mid < \infty,$$

Здесь $k^2 = \lambda - k_3^2$

Для начала мы рассмотрим вариант $k^2 > 0$. Уравнение (С.1.7а) - уравнение Бесселя порядка n. Его два независимых решения - функции Бесселя $J_n(k\rho)$ и Неймана $N_n(k\rho)$, т.е. решение (С.1.7а) имеет вид:

$$R_n(\rho) = C_n J_n(k\rho) + D_n N_n(k\rho).$$

Т.к. функция $N_n(k\rho)$ неограниченно возрастает при $\rho \to 0$, то в силу ограниченности решения полагаем $D_n \equiv 0$, т.е. для области $0 \le \rho \le \rho_0$ решение уравнения Бесселя имеет вид:

$$R_n(\rho) = J_n(k\rho).$$

Подчинив это решение граничному условию (С.1.7в), получим бесконечный набор решений (С.1.7) (набор С.З. и С.Ф.):

$$R_{nm}(\rho) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right),$$

где

$$k_m^{(n)} = \frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0},$$

а $\mu_m^{(n)}$ - корни функции Бесселя порядка n,

$$J_n(\mu_m^{(n)}) = 0, \quad m = 1, 2, 3...$$

Набор частных решений исходной задачи:

$$u_{nmp}(\rho, \varphi, z, t) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\right)[A_n \cos n\ \varphi + B_n \sin\ n\varphi] \sin\frac{p\pi}{l}z\cdot$$

$$\cdot \exp[-\lambda_{nmp}a^2 t].$$

И общее решение:

$$u(\rho, \varphi, z, t) = \sum_{n=0,m=1,p=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right)[A_{nmp}\cos n\varphi + B_{nmp}\sin n\varphi] \sin\frac{p\pi}{l}\ z\cdot$$

$$\cdot \bar{e}xp[-a^2\lambda_{nmp}t]. \qquad (C.1.8)$$

Используя начальное условие:

$$u\ |_{t=0} = \psi(\rho, \varphi, z),$$

получим соотношение для определения набора констант A_{nmp} и B_{nmp}:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = \sum_{n=o,m=1,p=1}^{\infty}[A_{nmp}\cos n\varphi + B_{nmp}\sin n\varphi]\ J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right)\cdot$$

$$\cdot \sin\frac{\pi p}{l}\ z. \qquad (C.1.9)$$

Рассматривая это соотношение как разложение функции $\psi(\rho, \varphi, z)$ по соответствующим наборам функций, можно найти наборы констант. Но для этого нужно знать условия ортогональности и квадрат нормы <u>всех</u> наборов функций. Наборы $\sin n\varphi, \cos n\varphi, \sin\frac{\pi p}{l}z$ нам хорошо известны, тогда как набор $J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right)$ нет. Чтобы научиться работать с этим набором функций, рассмотрим задачи с цилиндрической симметрией сначала в простейшей постановке - когда <u>нет</u> зависимости от φ и z. Но прежде чем решать конкретные задачи, получим соотношение, которое позволит найти условие ортогональности и квадрат нормы набора радиальных функций, решающих первую и вторую краевые задачи.

II. Запишем уравнения Бесселя для двух разных $J_v(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho)$ и $J_0(\frac{\beta}{\rho_0}\rho)$ функций Бесселя порядка ν (порядок ν может быть и нецелым числом),

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu\frac{\alpha}{\rho_0}\rho)}{d\rho}\right)+\left(\left(\frac{\alpha}{\rho_0}\right)^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\;J_v(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho)=0,\qquad \rho J_\nu\;\left(\frac{\beta}{\rho_0}\rho\right).$$

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dJ_\nu}{d\rho}(\frac{\beta}{\rho_0}\rho)\right)+\left(\left(\frac{\beta}{\rho_0}\right)^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)J_\nu\left(\frac{\beta}{\rho_0}\rho\right)=0,\qquad \rho J_\nu(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho).$$

Умножив каждое уравнение на указанный множитель, вычтя из одного другое и проинтегрировав в пределах $(0,\rho_0)$, получим:

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\rho_0^2}\cdot\int\limits_0^{\rho_0}J_\nu\left(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho\right)J_\nu\left(\frac{\beta}{\rho_0}\rho\right)\;\rho d\rho=$$

$$\int\limits_0^{\rho_0}\{J_\nu(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho)\frac{d}{d\rho}[\rho\frac{dJ_\nu(\frac{\beta}{\rho_0}\rho)}{d\rho}]-J_\nu(\frac{\beta}{\rho_0}\rho)\frac{d}{d\rho}[\rho\frac{dJ_\nu(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho)}{d\rho}]\}d\rho=$$

$$\int\limits_0^{\rho_0}d\{\rho[J_\nu(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho)\frac{dJ_\nu(\frac{\beta}{\rho_0}\rho)}{d\rho}-J_\nu(\frac{\beta}{\rho_0}\rho)\frac{dJ_\nu(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho)}{d\rho}]\}=$$

$$=\rho_0[J_\nu(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho)\frac{dJ_\nu(\frac{\beta}{\rho_0}\rho)}{\frac{\rho_0}{\beta}d\frac{\beta}{\rho_0}\rho)}-J_\nu(\frac{\beta}{\rho_0}\rho)\frac{dJ_\nu(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho)}{\frac{\rho_0}{\alpha}d(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho)}]\;|^{\rho_0}=$$

$$=\beta J_\nu(\alpha)J_\nu'(\beta)-\alpha J_\nu(\beta)J_\nu'(\alpha)$$

$$\int\limits_0^{\rho_0}J_\nu\left(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho\right)J_\nu\left(\frac{\beta}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho=\frac{\rho_0^2}{\alpha^2-\beta^2}[\beta J_\nu(\alpha)J_\nu'(\beta)-$$

$$-\alpha J_\nu(\beta)J_\nu'(\alpha)].\qquad\qquad (C.2.1)$$

Штрих означает производую по аргументу.

Если функции $J_\nu(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho)$ из набора, решающего первую краевую задачу, т.е.:

$$J_\nu(\frac{\alpha}{\rho_0}\rho) = J_\nu\left(\frac{\mu_m^\nu}{\rho_0}\rho\right)$$

и

$$J_\nu(\frac{\alpha}{\rho_0})\mid_{\rho_0} = J_\nu(\alpha) = 0,$$

т.е. $\alpha = \mu_m^{(\nu)}$ - корни функции Бесселя порядка ν, то при $\alpha = \mu_{m_1}^{(\nu)}$, $\beta = \mu_{m_2}^{(\nu)}$, т.е. $J_\nu\left(\frac{\mu_{m_1}^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)$ и $J_\nu\left(\frac{\mu_{m_2}^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)$ - две разные функции этого набора, то:

$$\int\limits_0^{\rho_0} J_\nu\left(\frac{\mu_{m_1}^{(\nu)}}{\rho_0}\right) J_\nu\left(\frac{\mu_{m_2}^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho = \frac{\rho_0^2}{(\mu_{m_1}^{(\nu)})^2 - (\mu_{m_2}^{(\nu)})^2}\cdot$$

$$\cdot[\mu_{m_2}^{(\nu)} J_\nu(\mu_{m_1}^{(\nu)})\ J'_\nu(\mu_{m_2}^{(\nu)}) - \mu_{m_1}^{(\nu)} J_\nu(\mu_{m_2}^{(\nu)})\ J'_\nu(\mu_{m_1}^{(\nu)})] = 0,$$

т.к. $J_\nu(\mu_{m_1}^{(\nu)}) = 0$; $J_\nu(\mu_{m_2}^{(\nu)}) = 0$; $\quad \mu_{m_1}^{(\nu)} \neq \mu_{m_2}^{(\nu)}$ и получаем условие ортогональности набора $J_\nu(\frac{\mu_m^{(\nu)}}{\rho_0}\rho)$:

$$\int\limits_0^{\rho_0} J_\nu\left(\frac{\mu_{m_1}^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right) J_\nu\left(\frac{\mu_{m_2}^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho = 0, \qquad (C.2.2)$$

$m_1 \neq m_2$, т.е. $\mu_{m_1}^{(\nu)} \neq \mu_{m_2}^{(\nu)}$.

Если же $\alpha = \beta = \mu_m^{(\nu)}$ - одинаковые корни функции Бесселя, т.е. слева в (C.2.1) имеем квадрат нормы набора $J_\nu\left(\frac{\mu_m^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)$, то справа в (C.2.1) в знаменателе нуль ($\alpha = \beta$) и в числителе нуль, т.к. $J_\nu(\alpha) = J_\nu(\mu_m^{(\nu)}) = 0$ и $J_\nu(\beta) = J_\nu(\mu_m^{(\nu)}) = 0$, получим неопределенность типа $\frac{0}{0}$, которую раскрываем по правилу Лопиталя, полагая $\beta = \mu_m^{(\nu)}$, а $\underline{\alpha \to \beta}$, получим:

$$||\ J_\nu\left(\frac{\mu_m^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)\ ||^2 \equiv \int\limits_0^{\rho)_0} J_\nu^2\left(\frac{\mu_m^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho = \frac{\rho_0^2}{2}[J'_\nu(\mu_m^{(\nu)})]^2. \qquad (C.2.3)$$

Объединяя (C.2.2) и (C.2.3), имеем:

$$\int\limits_0^{\rho_0}\ J_\nu\left(\frac{\mu_m^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)\ J_\nu\left(\frac{\mu_{m_1}^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho = \frac{\rho_0^2}{2}\ [J'_\nu(\mu_m^{(\nu)})]^2\ \delta_{mm_1}. \qquad (C.2.4)$$

II. Однородное уравнение, однородные граничные условия, первая краевая задача

З а д а ч а V-28. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра радиуса ρ_0, начальная температура которого задается функцией расстояния от оси - параболой с занулением на стенках и максимумом на оси. Поверхность поддерживается при нулевой температуре.

Выберем систему координат - цилиндрическую ρ, φ, z с осью z вдоль оси цилиндра. В этой системе температура внутренних точек цилиндра u будет только функцией ρ и t, $u = u(\rho, t)$. Формулировка задачи (математическая):

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\,\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{a^2}\,u_t,$$

$$u(\rho_0, t) = 0, \qquad (C.2.5)$$

$$u\,(\rho, 0) = U_0\,(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}),$$

$$0 \le \rho \le \rho_0; \quad 0 \le t; \qquad |\,u(\rho, t)\,| < \infty.$$

Ищем решение в виде:

$$u(\rho, t) = R(\rho) \cdot T(t). \qquad (C.2.6)$$

Подставляя (С.2.6) в уравнение (С.2.5) и разделив на произведение $R \cdot T$ имеем:

$$\frac{1}{R\rho}\,\frac{d}{d\rho}\,\left(\rho\,\frac{dR}{d\rho}\right) = \frac{1}{a^2}\,\frac{T'}{T} = -k^2,$$

т.е. получим уравнения для функций $R(\rho)$ и $T(t)$. Задача для $R(\rho)$:

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\,(\rho\,\frac{dR}{d\rho}) + k^2 R = 0, \qquad (C.2.7)$$

$$u\,(\rho_0 t) = R\,(\rho_0)\,T(t) = 0 \to R\,(\rho_0) = 0,$$

$$0 \le \rho \le \rho_0, \qquad |\,R(\rho)\,| < \infty.$$

и

$$T' + a^2 k^2 T = 0.$$

Уравнение (C.2.7) - уравнение Бесселя нулевого порядка (а иначе и быть не могло - в задаче нет зависимости от φ), его решение есть:

$$R(\rho) = J_0(k\rho).$$

Подчиняя это решение граничному условия (C.2.7), получим:

$$J_0(k\rho_0) = 0 \rightarrow k_m\rho_0 = \mu_m^{(0)}, \qquad k_m = \frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0},$$

где $\mu_m^{(0)}$ - корни функции Бесселя нулевого порядка:

$$J_0(\mu_m^{(0)}) = 0, m = 1, 2, 3...$$

Таким образом, набор С.З $k_m^{(0)}$ дает нам и набор С.Ф. - полный набор линейно независимых решений (C.2.7):

$$R_m(\rho) = J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right).$$

Для функции $T(t)$ теперь имеем уравнения:

$$T'_m(t) + a^2k_m^2T_m = 0,$$

$$T_m(t) = \exp[-a^2(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0})^2t].$$

И общее решение задачи:

$$u(\rho,t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t)\ R_m(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m\ J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\ \times$$

$$\times \exp\left[-\left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2 t\right]. \qquad (C.2.8)$$

Используя начальные условия из (C.2.5), получим соотношения для определения набора констант A_m:

$$U_0\left[1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right] = \sum_{m=1} A_mJ_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right). \qquad (C.2.9)$$

Для получения из этого равенства констант A_m домножим его части на умноженную на ρ одну из функций набора $J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho)$, конкретно, на $\rho \cdot J_0(\frac{\mu_{\text{M}}^{(0)}}{\rho_0}\rho)$, где м - номер корня (и функции) - заданный, но выбран совершенно произвольно, и проинтегрируем полученное равенство по ρ от 0 до ρ_0:

$$U_0 \int\limits_0^{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \ J_0 \ \left(\frac{\mu^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) \rho d\rho = \int\limits_0^{\rho_0} \rho [\sum_{m=1}^{\infty} A_m \, J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)] \, J_0 \ \left(\frac{\mu_{\text{M}}^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) d\rho =$$

интегрируем почленно, полагая ряд равномерно сходящимся:

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \ A_m \ \int\limits_0^{\rho_0} \ J_0 \ \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right) \ J_0 \ \left(\frac{\mu_{\text{M}}^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) \rho d\rho =$$

интеграл берем из (C.2.4):

$$= \sum_{m=1} A_m \, || \, J_o \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) \, ||^2 \, \delta_{\text{M}m} = A \, || \ \ J_0 \ \left(\frac{\mu^{(0)}}{\rho_0} \ \rho\right) \, ||^2,$$

т.е.

$$A_m = U_0 \frac{\int\limits_0^{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \ J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) \rho d\rho}{|| \ J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) \ ||^2}. \qquad (C.2.10)$$

Впрочем, формулу (C.2.10) можно было бы сразу написать по известным правилам, рассматривая (C.2.9) как разложение функции в ряд по линейно независимому ортогональному набору функций.

Интеграл в (C.2.10) вычисляется с помощью рекурентного соотношения:

$$\frac{d}{dx}[x_\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

При

$$\nu = 1: \qquad x \cdot J_0(x) = \frac{d}{dx}[x J_1(x)],$$

$$\nu = 2: \qquad x^2 J_1(x) dx = d[x^2 J_2(x)],$$

$$\int\limits_0^{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) \rho d\rho =$$

$$| \ \frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho = x; \quad \rho = \frac{\rho_0}{\mu_m^{(0)}} x \ \ d\rho = \frac{\rho_0}{\mu_m^{(0)}} dx \ |$$

$$= \left(\frac{\rho_0}{\mu_m^{(0)}}\right)^2 \int\limits_0^{\mu_m^{(0)}} \left(1 - \frac{x^2}{(\mu_m^{(0)})^2}\right) J_0(x) x dx =$$

$$=|\ u = 1 - \frac{x^2}{(\mu_m^{(0)})^2}; \quad du = -\frac{2xdx}{(\mu_m^{(0)})^2} \rightarrow v = xJ_1(x) \ \ dv = J_0(x)xdx\ |\ .$$

$$\frac{\rho_0^2}{(\mu_m^{(0)})^2}[| \left(1 - \frac{x^2}{(\mu_m^{(0)})^2}\right) x\ J_1(x)\ |_0^{\mu_m^{(0)}} + \frac{2}{(\mu_m^{(0)})^2} \int\limits_0^{\mu_m^{(0)}} x^2 J_1(x)dx] =$$

$$= 2\frac{\rho_0^2}{(\mu_m^{(0)})^4} x^2 J_2(x)\ |_0^{\mu_m^{(0)}} = 2\frac{\rho_0^2}{(\mu_m^{(0)})^2} J_2(\mu_m^{(0)}). \qquad (C.2.11)$$

Из рекурентного соотношения:

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x).$$

при $\nu = 1$ имеем:

$$J_2(x) + J_0(x) = \frac{2}{x} J_1(x),$$

т.е.

$$J_2(\mu_m^{(0)}) = \frac{2}{\mu_m^{(0)}} J_1\ (\mu_m^{(0)}). \qquad (C.2.12)$$

(мы учли, что $J_0(\mu_m^{(0)}) = 0$).

Подставляя (C.2.11) и (C.2.12) в (C.2.10) с учетом (C.2.3) получим:

$$A_m = \frac{8U_0}{(\mu_m^{(0)})^3 J_1(\mu_m^{(0)})}. \qquad (C.2.13)$$

и

$$u(\rho, t) = 8U_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_m^{(0)})^3 J_1(\mu_m^{(0)})} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) \exp[-\left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2 t]. \ (C.2.14)$$

III. Однородное уравнение, однородные граничные условия, вторая краевая задача

З а д а ч а N 302. Рассмотреть тепловой процесс внутри бесконечного цилиндра радиуса ρ_0, если его поверхность теплоизолирована, а начальная температура точек зависит лишь от расстояния до оси цилиндра.

В общем виде математическая формулировка задачи такова (u - температура):

$$a^2\Delta u = u_t,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \mid_s = 0, \qquad (C.3.1)$$
$$u \mid_{t=0} = \psi(p) \qquad \mid u(\vec{r}, t) \mid < \infty.$$

Здесь s - поверхность цилиндра, p - внутренние точки цилиндра.

Как и в прерыдущей задаче, выбираем цилиндрическую систему координат ρ, φ, z, направив ось z вдоль оси цилиндра.

В силу симметрии задачи - цилиндр бесконечен, начальная температура есть функция только ρ, в задаче нет зависимости по φ и z, $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$.Нормаль к боковой поверхности цилиндра направлена дволь радиуса, т.е. $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} \to \frac{\partial}{\partial \rho}$.

В выбранной системе координат имеем:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{a^2} u_t,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \rho} \mid_{\rho_0} = 0, \qquad (C.3.2)$$
$$u(\rho, 0) = \psi(\rho) \qquad \mid u(\rho, t) \mid < \infty,$$
$$0 \le \rho \le \rho_0; \qquad 0 \le t.$$

Ищем набор частных решений в виде:

$$u(\rho, t) = R(\rho) T(t).$$

и по схеме предыдущей задачи получим:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + k^2 R = 0 \qquad T' + a^2 k^2 T = 0, \qquad (C.3.3)$$

$$R'(\rho_0) = 0 \quad 0 \le \rho \le \rho_0 \qquad \mid R(\rho) \mid < \infty.$$

Уравнение в (C.3.3) - уравнение Бесселя, нулевого порядка, его решение:

$$R(\rho) = J_0(k\rho).$$

Подчинив это решение граничному условию в (C.3.3), получим полный набор линейно-независимых решений (C.3.3), (набор С.Ф):

$$R_m(\rho) = J_0(k_m \rho),$$

$$J_0'(k_m \rho_0) = 0 \to k_m \rho_0 = \delta_m^{(0)},$$

где

$$J_0'(\delta_m^{(0)}) = 0.$$

где $\delta_m^{(0)}$ - корни производной функции Бесселя нулевого порядка ($m = 1, 2, ...$ нумерация корней в порядке возрастания), а

$$k_m = \frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}.$$

набор С.3. задачи (С.3.3.)

Для временной функции имеем $T(t)$:

$$T_m' + a^2 k_m^2 T_m = 0$$

и

$$T_m(t) = A_m \exp[-\left(\frac{a\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2 t].$$

И общее решение задачи N 302:

$$u(\rho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t)\ J_0\ \left(\frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) = \sum\ A_m\ J_0\left(\frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)$$

$$\exp[-\left(\frac{a\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2 t]. \qquad (C.3.4)$$

Набор констант A_m определим из начального условия:

$$\psi(\rho) = \sum A_m J_0\left(\frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right). \qquad (C.3.5)$$

Для нахождения из этого соотношения набора A_m необходимо знать условия ортогональности и квадрат нормы набора $J_0(\frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\rho)$.

Воспользуемся соотношением (С.2.1). Полагая $\alpha = \delta_{m_1}^{(0)}$; $\beta = \delta_{m_2}^{(0)}$, $m_1 \neq m_2$, имеем:

$$\int_0^{\rho_0} J_\nu\left(\frac{\delta_{m_1}^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)\ J_\nu\left(\frac{\delta_{m_2}^{\nu}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho = 0; \qquad m_1 \neq m_2.$$

Это и есть условия ортогональности набора $J_\nu(\frac{\delta_m^{(\nu)}}{\rho_0}\rho)$. При $\alpha = \beta = \delta_m^{(\nu)}$ справа в (С.2.1) неопределенность типа $\frac{0}{0}$, раскрывая которую по правилу Лопиталя при $\beta = \delta_m^{(\nu)}, \alpha \to \beta$, имеем квадрат нормы набора $J_\nu\left(\frac{\delta_m^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)$:

$$\int_0^{\rho_0} J_\nu^2\ \left(\frac{\delta_m^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho = \frac{\rho_0^2}{2}[1 - \frac{\nu^2}{(\delta_m^{(\nu)})^2}]\ J_\nu^2\ (\delta_m^{(\nu)}) \equiv \|\ J_\nu\ \left(\frac{\delta_m^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)\ \|^2 \quad (C.3.6)$$

или

$$\int\limits_0^{\rho_0} J_\nu\left(\frac{\delta_m^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)\ J_\nu\left(\frac{\delta_{m_1}^{(\nu)}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho=\frac{\rho_0^2}{2}[1-\frac{\nu^2}{(\delta_m^{(\nu)})^2}]\ J_\nu^2(\delta_m^{(\nu)})\delta_{mm_1}. \qquad (C.3.7)$$

Домножая равенство (С.3.5) на $\rho J_0\ \left(\frac{\delta_{\text{M}}^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)$ (здесь м - фиксированное, но произвольное значение) и интегрируя по ρ от 0 до ρ_0, получим:

$$A_m=\frac{\int\limits_0^{\rho_0}\psi(\rho)J_0\left(\frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho}{\|\ \ J_0\left(\frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\|^2}.$$

Где из (С.3.6) имеем:

$$\|\ J_0\left(\frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\|^2=\frac{\rho_0^2}{2}\ J_0^2\ \left(\delta_m^{(0)}\right).$$

.

IV. Метод собственных функций

Мы проиллюстрировали этот метод на решении однородного уравнения для бесконечного цилиндра радиуса ρ_0 с однородными граничными условиями первого типа.

Повторим формулировку задачи V-28:

$$\frac{a^2}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial r}\right)=u_t,$$

$$u(\rho_0,t)=0, \qquad (C.4.1)$$

$$u(\rho,0)=U_0\left(1-\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right),$$

$$q\le\rho\le\rho_0, \qquad 0\le t, \qquad \mid u(\rho,t)\mid<\infty.$$

Мы имели решение этой задачи в виде:

$$u(\rho,t)=\sum_{n=1}T_m(t)J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right), \qquad (C.4.2)$$

т.е. в виде разложения по собственным функциям $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)$ радиальной части оператора Лапласа при краевом условии первого типа (задача C.2.7). И сколько бы таких задач ни решали для данного объекта методом разделения переменных (они различаются лишь начальными условиями), решение будет иметь вид (C.4.2) - вид разложения по уже известному набору.

Метод собственных функций и заключается в том, чтобы искать решение сразу в виде разложения по известному для решаемой задачи набору функций - а этот набор можно найти, проделав задачу один раз методом разделения переменных.

Итак, ищем решение задачи в виде (C.4.2) - и подставляя его в (C.4.1), получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty}[a^2 T_m \frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dJ_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho)}{d\rho}\right) - T'_m \cdot J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)] = 0. \qquad (C.4.3)$$

Из уравнения Бесселя, которому довлетворяет функция $J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho)$ имеем:

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dJ_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho)}{d\rho}\right) = -\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2\ J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right).$$

Подставляя это равенство в (C.4.3), получим:

$$\sum_{m=1}[T'_m + a^2\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2 T_m]\ J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) = 0.$$

В силу линейной независимости набора $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)$ все коэффициенты в этой сумме равны нулю:

$$T'_m + a^2\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2 T_m = 0,$$

т.е. получили уравнение для функции времени. Его решение:

$$T_m(t) = A_m \exp[-\left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2 t].$$

и общее решение задачи имеет вид:

$$u(\rho,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\exp[-\left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2 t],$$

т.е. такое же, как и было в решении задачи V-28. Далее осталось применить начальное условие для определения набора констант A_m, что уже проделано ранее [см. (С.2.10) - (С.2.12)].

Аналогично методом собственных функций решается и вторая краевая задача с однородными граничными условиями для цилиндра, но набор собственных функций радиальной части оператора Лапласа в цилиндре в этом случае будет иной, а именно:

$$J_0\left(\frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right),$$

где $J_0'(\delta_m^{(0)}) = 0$.

V. Задачи с неоднородными граничными условиями.

Мы проиллюстрируем этот метод на решении однородного уравнения теплопроводности для внутренней области бесконечного цилиндра радиуса ρ_0 с неоднородными граничными условиями первого и второго типа.

1. Первая краевая задача с неоднородными граничными условиями

З а д а ч а V-27. Решить задачу о нагревании бесконечного круглого цилиндра радиуса ρ_0, начальная температура которого равна нулю, а на поверхности поддерживается температура $U_0 = const$.

Выбираем цилиндрическую систему координат ρ, φ, z с осью z, направленной вдоль оси цилиндра. В этой системе температура будет функцией только $\rho, t, u = u(\rho, t)$.

Формулировка задачи (математическая):

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{a^2}u_t,$$

$$u(\rho_0, t) = U_0, \qquad (C.5.1)$$

$$u(\rho, 0) = 0,$$

$$0 \le \rho \le \rho_0 \qquad 0 \le t \qquad |\, u(\rho, t)\,| < \infty.$$

Переформулируем задачу - введем новую функкцию $v(\rho, t)$, для которой граничное условие было бы однородным. Легко видеть, что этой цели удовлетворяет замена:

$$u(\rho, t) = v(\rho, t) + U_0.$$

Действительно:

$$u(\rho_0,t)=U_0=v(\rho_0,t)+U_0\to v(\rho_0,t)=0.$$

Для функции $v(\rho,t)$ - задача:

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)=\frac{1}{a^2}\,v_t, \qquad (C.5.2)$$

$$v(\rho_0,t)=0,$$

$$v(\rho,t)=-U_0,$$

$$0\le\rho\le\rho_0, \qquad 0\le t, \qquad (v(\rho,t)<\infty.$$

Такая задача уже решалась.

$$v(\rho,t)=\sum_{m=1}A_m\;J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\exp[-\left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2 t],$$

где набор констант A_m определяется из начального условия:

$$-U_0=\sum_{m=1}A_m\;J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right).$$

$$A_m=-2\;U_0\frac{\int\limits_0^{\rho_0}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho}{\rho_0^2\;J_1^2(\mu_m^{(0)})},$$

$$\int\limits_0^{\rho_0}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right)\rho d\rho=\mid\;\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho=x\mid=-2U_0\frac{\rho_0^2}{(\mu_m^{(0)})^2}\int\limits_0^{\mu_m^{(0)}}J_0(x)xdx=$$

$=\mid$ (Из рекурентного соотношения) $\mid$:

$$=\int\limits_0^{\mu^{(0)}}d[J_1(x)x]=-2U_0\frac{\rho_0^2}{(\mu_m^{(0)})^2}\mu_m^{(0)}J_1(\mu_m^{(0)})$$

Итак:

$$u(\rho,t)=U_0[1-2\sum\frac{1}{\mu_m^{(0)}J_1(\mu_m^{(0)})}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\exp[-\left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2 t]. \qquad (C.5.3)$$

Заметим, что если бы в исходной задаче (C.5.1), граничное условие зависело от времени, уравнение для функции $v(\rho,t)$ получилось бы неоднородным (о решении таких уравнений ниже).

2. Вторая краевая задача с неоднородными граничными условиями

З а д а ч а V- 29. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра радиуса ρ_0, если его начальная температура равна $u_o = const$, а на поверхность с момента $t = 0$ подается постоянный тепловой поток $q = const$.

Формулировка задачи:

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{a^2}u_t, \qquad (C.5.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}\,|_{\rho_0} = -q,$$

$$u(\rho,0) = u_0,$$

$$0 \le \rho \le \rho_0; \qquad 0 \le t; \qquad |\, u(\rho,t)\,| < \infty.$$

Первый шаг - ввести новую функцию $v(\rho,t)$, для которой граничные условия были бы однородными.

Легко видеть, что замена:

$$u_\rho = v_\rho - \frac{\rho}{\rho_0}q. \qquad (C.5.5)$$

зануляет граничные условия для функции $v(\rho,t)$. Действительно,

$$u_\rho\,|_{\rho_0} = -q = v_\rho\,|_{\rho_0} - q \to v_\rho\,|_{\rho_0} = 0.$$

Заметим, что и более простая замена:

$$u_\rho = v_\rho - q$$

тоже зануляет граничные условия для $v(\rho,t)$. Однако такая замена неразумна - она приводит к появлению в уравнении неоднородности с особенностью в $\rho = 0$ типа $\frac{1}{\rho}$.

Чтобы получить уравнение и начальные условия для функции v, необходимо проинтегрировать замену (C.5.5) по ρ:

$$u(\rho,t) = v(\rho,t) - \frac{\rho^2}{2\rho_0}\,q + c(t), \qquad (C.5.6)$$

где $c(t)$ - постоянная интегрирования, которая будет определена позже - наиболее удобным для решения задачи образом.

Подставляя (C.5.6) в (C.5.5), получим для функции $v(\rho,t)$ уравнение:

$$\frac{a^2}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\ \frac{\partial v}{\partial\rho}\right)-\frac{2a^2}{\rho_0}\ q=v_t+c'(t).$$

Доопределяя функции $c(t)$ так:

$$c'(t)=-\frac{2a^2}{\rho_0}\ q;\qquad c(0)=u_0,\qquad (C.5.7)$$

получим задачу для функции $v(\rho,t)$:
однородное уравнение:

$\frac{a^2}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)=v_t,\qquad (C.5.8)$

$\frac{\partial v}{\partial\rho}\ |_{\rho_0}=0,$

$v(\rho,0)=\frac{\rho^2}{2\rho_0}\ q.$

[Мы определили $c(0)=u_0$ - чтобы упростить начальное условие для функции v. Если бы граничное условие зависело от времени, получили бы для функции $v(\rho,t)$ неоднородное уравнение.]

Из (C.5.7) для функции $c(t)$ получим:

$$c(t)=-\frac{2a^2}{\rho_0}q\cdot t+u_0.$$

Задачу вида C(5.8) мы уже решали. Имеем:

$$v(\rho,t)=\sum_{m=1}A_m\ J_0\left(\frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\exp[-\left(\frac{a\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2\cdot t],\qquad (C.5.9)$$

где

$$A_m=\frac{q}{2\rho_0\parallel J_0\left(\frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\parallel^2}\int\limits_0^{\rho_0}\rho^2\ J_0\left(\frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho=\mid\ \frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\rho=x\ \mid=$$

$$=\frac{q\ \rho_0^3}{2(\delta_m^{(0)})^4\parallel J_0\left(\frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\parallel^2}\cdot Y.$$

где

$$Y=\int\limits_0^{\delta_m^{(0)}}x^2J_0(x)x\cdot dx=x^2J_1(x)x\ |_0^{\delta_m^{(0)}}\ -$$

$$-2\int\limits_0^{\delta_m^{(0)}}x^2\ J_1(x)dx=-2\int\limits_0^{\delta_m^{(0)}}d[x^2\ J_2(x)]=$$

$$-2\ (\delta_m^{(0)})^2\ J_2\ (\delta_m^{(0)}).$$

Итак:

$$u\ (\rho,t) = -\frac{\rho^2}{2\rho_0}\ q - \frac{2a^2}{\rho_0}\ q\cdot t + u_0-$$

$$-2q\ \rho_0 \sum_{m=1} \frac{1}{(\delta_m^{(0)})^2\ J_0\ (\delta_m^{(0)})}\ J_0\ \left(\frac{\delta_m^{(0)}}{\rho_0}\ \rho\right)\ \exp[-\left(\frac{a\ \delta_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2 t].$$

При вычислениях мы учли, что:

$$J_1\ (\delta_m^{(0)}) = -J_0'\ (\delta_m^{(0)}) = 0,$$

а из рекурентного соотношения следует:

$$J_2\ (\delta_m^{(0)}) = -J_0(\delta_m^{(0)}).$$

VI. Неоднородные уравнения в задачах с цилиндрической симметрией

а) Стационарная неоднородность - функция в уравнении <u>не</u> зависит от времени.

Математическая формулировка:

первая краевая задача для бесконечного цилиндра,

однородные граничные условия:

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ \left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + g = \frac{1}{a^2}\ u_t. \qquad (C.6.1)$$

$$u\ (\rho_0, t) = 0,$$

$$u\ (\rho, 0) = f\ (\rho),$$

$$0 \le \rho \le \rho_0, \qquad 0 \le t, \qquad |\ u\ (\rho,t)\ | < \infty.$$

$$g = const.$$

Разбиваем задачу на две задачи:

$$u\ (\rho,t) = v\ (\rho,t) + w\ (\rho).$$

Задача для $v(\rho,t)$ - однородное уравнение:

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ \left(\rho\ \frac{\partial v}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{a^2}\ v_t, \qquad (C.6.2)$$

$$v\ (\rho_0, t) = 0,$$
$$v\ (\rho, 0) = f\ (\rho) - w\ (\rho).$$

Задача для $w\ (\rho)$ - решение, обусловленное неоднородностью уравнения:

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\rho}\ \left(\rho\ \frac{dw}{d\rho}\right) + g = 0, \qquad (C.6.3)$$
$$w\ (\rho_0) = 0,$$
$$0 \le \rho \le \rho_0, \qquad |\ w\ (\rho)\ | < \infty.$$

Задача (С.6.2) - на нахождение общего решения $v\ (\rho, t)$ однородного уравнения, тогда как (С.6.3) - на нахождение частного решения $w\ (\rho)$, обусловленного неоднородностью уранения g. Легко видеть, что эти две задачи дают в сумме исходную задачу (С.6.1).

Поскольку в начальном условии задачи (С.6.2) фигурирует частное решение $w\ (\rho)$, то сначала необходимо решить задачу (С.6.3). Для упрощения вычислительных процедур рассмотрим случай $g = const$.

$$\frac{d}{d\rho}\ \left(\rho \frac{d\ w}{d\ \rho}\right) = -g\ \rho.$$

Интегрируем:

$$\rho\ \frac{dw}{d\rho} = -\frac{1}{2}\ g\ \rho^2 + c_1,$$
$$\frac{dw}{d\rho} = -\frac{1}{2}\ g\ \rho + \frac{c_1}{\rho},$$
$$w\ (\rho) = -\frac{1}{4}\ g\ \rho^2 + c_1\ \ln\ \rho + c_2.$$

Из условия ограниченности решения следует: $c_1 - 0$. Из граничного условия:

$$w\ (\rho_0) = 0 = \frac{-1}{4}\ g\rho_0^2 + c_2; \rightarrow c_2 = \frac{1}{4}\ g\rho_0^2.$$

Итак:

$$w(\rho) = \frac{1}{4} g\ (\rho_0^2 - \rho^2). \qquad (C.6.4)$$

При подстановке (С.6.4) в начальное условие (С.6.2) и конкретизации функции $f(\rho)$ задача для $v(\rho, t)$ становится определенной. Подобные задачи уже решались.

в) Неоднородность специфического вида.

Имеется в виду неоднородность в управлении характерного для рассматриваемого физического процесса вида зависимости от времени. Для процессов переноса, таких как процессы теплопроводности, это зависимость вида $\exp(-\alpha t)$.

Итак, рассмотрим первую краевую задачу для бесконечного цилиндра с однородными граничными условиями и с неоднородностью в уравнении характерного указанного вида зависимости от времени. Если задача тепловая, $u(\rho, t)$ - температура внутренних точек цилиндра.

Формулировка задачи (математическая):

$$a^2\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ \left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + g\ (\rho)e^{-\alpha t} = u_t, \qquad (C.6.5)$$

$$u\ (\rho_0, t) = 0,$$

$$u\ (\rho, 0) = f\ (\rho),$$

$$0 \le \rho \le \rho_0, \qquad 0 \le t, \qquad \mid u\ (\rho, t) \mid < \infty.$$

Ищем решение в виде суммы двух функций:

$$u\ (\rho, t) = v\ (\rho, t) + w\ (\rho, t).$$

Подставляем в задачу (C.6.5):

$$a^2\ [\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\ \frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\ \frac{\partial w}{\partial\rho}\right)] + g(\rho)e^{-\alpha t} = v_t + w_t$$

.

$$v\ (\rho_0, t) + w\ (\rho_0, t) = 0, \qquad (C.6.6)$$

$$v\ (\rho, 0) + w\ (\rho, 0) = f\ (\rho).$$

Легко видеть, что из этой задачи следуют две задачи:

задача об общем решении однородного уравнения $v\ (\rho, t)$:

$$a^2\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ \left(\rho\ \frac{\partial v}{\partial\rho}\right) = v_t, \qquad (C.6.7)$$

$$v\ (\rho_0, t) = 0,$$

$$v\ (\rho, 0) = f\ (\rho) - w_0\ (\rho).$$

и задача о частном решении неоднородного уравнения $w\ (\rho, t)$:

$$a^2\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial \rho}\ \left(\rho\ \frac{\partial w}{\partial \rho}\right) + g\ (\rho)\ e^{-\alpha t} = w_t, \qquad (C.6.8)$$

$$w\ (\rho_0, t) = 0,$$

$$w\ (\rho, 0) = w_0\ (\rho).$$

Поскольку в задачу (С.6.7) входит функция $w_0(\rho)$, из задачи (С.6.8), то надо прежде решить задачу (С.6.8) - т.е. найти частное решение $w(\rho, t)$. Ищем его в виде:

$$w\ (\rho, t) = \gamma\ (\rho)\ e^{-\alpha t}. \qquad (C.6.9)$$

Подставляя в (С.6.8), получим:

$$\begin{cases} a^2\ \frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\rho}\ \left(\rho \frac{d\gamma(\rho)}{d\rho}\right) + g\ (\rho) = -\alpha\ \gamma\ (\rho), \\ \gamma(\rho_0) = 0, \\ 0 \le \rho \le \rho_0; \qquad \mid \gamma\ (\rho) \mid < \infty. \end{cases} \qquad (C.6.10)$$

Получили для функции $\gamma(\rho)$ обыкновенное дифференциальное уравнение с достаточным числом граничных условий. Решив эту задачу, находим начальное условие для задачи (С.6.8), и задача становится решаемой.

Заметим, что для волновой задачи характерной неоднородностью будет зависимость от времени вида $\cos wt$ (или $\sin wt$), что позволяет искать зависимость частного решения от времени в виде:

$$\gamma(\rho) \cdot \cos\ wt$$

и получить тоже для функции $\gamma(\rho)$ обыкновенное дифференциальное уравнение.

с) Неоднородность в уравнении произвольного вида.

Формулировка задачи:

$$a^2\ \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + f\ (\rho, t) = u_t, \qquad (C.6.11)$$

$$u\ (\rho_0, t) = 0,$$

$$u\ (\rho, 0) = \gamma\ (\rho),$$

$$o \leq \rho \leq \rho_0, \qquad 0 \leq t, \qquad \mid u\ (\rho, t) \mid < \infty.$$

Если бы у нас была задача с однородным уравнением, мы бы имели решение в виде разложения по собственным функциям радиальной части оператора Лапласа в цилиндре (при краевом условии первого типа), т.е. в виде:

$$u\ (\rho, t) = \sum_{m=1} T_m(t)\ J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right), \qquad (C.6.12)$$

где $J_o(\mu_m^{(0)}) = 0$.

Так будем искать решение(С.6.11) тоже в виде (С.6.12). Подставляя это решение в (С.6.11) мы получили задачу для функции $T_n\ (t)$.

Действительно подстановка дает:

$$\sum\ [T_m\ a^2\ \frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\rho}\ \left(\rho\ \frac{dJ_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)}{d\rho}\right) - T_m' J_0\ \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)] + f\ (\rho, t) = 0.$$

Замечая, что из уравнения Бесселя для функции $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)$ следует:

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\rho}\ \left(\rho\ \frac{dJ_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)}{d\rho}\right) = -\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2\ J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)$$

и разлагая функцию $f\ (\rho, t)$ в ряд по этому же набору:

$$f\ (\rho, t) = \sum_{m=1} f_m(t) \cdot J_0\ \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right),$$

где

$$f_m\ (t) = \frac{\int\limits_0^{\rho_0} f\ (\rho, t)\ J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho}{\parallel\ J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\parallel^2}.$$

Получим:

$$\sum\{T_m'(t) + \left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2 T_m(t) - f_m(t)\} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) = 0.$$

В силу линейной независимости функций $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)$ отсюда следует уравнение для функции $T_m(t)$:

$$T_m' + \left(\frac{a\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\right)^2 T_m = f_m(t). \qquad (C.6.13)$$

Решением этого уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения:

$$T_{m\ \text{одн.}}(t) = A_m e^{-(\frac{a\mu_m^{(0)}}{\rho_0})^2 t}.$$

и частного решения неоднородного уравнения:

$$T_{m\ \text{частн.}} = \int\limits_0^t e^{-(\frac{a\mu_m^{(0)}}{\rho_0})^2 (t-\tau)} f_m(\tau)\ d\tau.$$

Подставляя:

$$T_m(t) = T_{m\ \text{одн.}}(t) + T_{m\ \text{част.}}(t),$$

в (С.6.12), получим общее решение задачи (С.6.11), а подчиняя его начальному условию в (С.6.11), найдем по уже известной схеме набор констант A_m.

VII. Задачи с зависимостью от φ

Мы рассмотрим такую задачу на примере решения однородного теплового уравнения для бесконечного цилиндра радиуса ρ_0 с однородными граничными условиями первого типа и наличии зависимости от φ в начальном условии.

З а д а ч а V-39. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра радиуса ρ_0, если на его поверхности поддерживается нулевая температура, а начальная температура равна:

$$u\ |_{t=0} =\ u_0\ \frac{\rho}{\rho_0} \cos\varphi,$$

где ρ, φ - цилиндрические координаты с осью z вдоль оси цилиндра.

Формулировка задачи ($u(\rho, \varphi, t)$ - температура):

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\ u_t, \qquad (C.7.1)$$

$$u\ (\rho_0, \varphi, t) = 0,$$

$$u\ (\rho, \varphi, 0) = u_0\ \frac{\rho}{\rho_0} \cos\varphi,$$

$$0 \le \rho \le \rho_0, \qquad 0 \le t.$$

$$|\ u\ (\rho, \varphi, t)\ | < \infty.$$

Известно, что в силу ортогональности гармоник $\sin\ n\varphi$ и $\cos\ n\varphi$, в решении зависимость от φ будет иметь ту же гармонику, что и в начальном условии, т.е. ищем решение в виде:

$$u\ (\rho,\varphi,t) = v\ (\rho,t)\cdot\cos\varphi. \qquad (C.7.2)$$

Подстановка (С.7.2) в (С.7.1) дает для функции $v\ (\rho,t)$ задачу:

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ \left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2}\ v = \frac{1}{a^2}\ v_t, \qquad (C.7.3)$$

$$v\ (\rho_0,t) = 0,$$

$$v\ (\rho,0) = u_0\ \frac{\rho}{\rho_0},$$

$$0 \le \rho \le \rho_0, \qquad 0 \le t, \qquad \mid v(\rho,t) \mid < \infty.$$

Ищем решение в виде:

$$v\ (\rho,t) = R\ (\rho)\cdot T(t). \qquad (C.7.4)$$

Подстановка в (С.7.3) с последующим делением на $R\cdot T$ дает:

$$\frac{1}{R}\ \frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2}\ \frac{T'}{T} = -k^2. \qquad (C.7.5)$$

Для функции R получили уравнение Бесселя первого порядка:

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + (k^2 - \frac{1}{\rho^2})\ R = 0. \qquad (C.7.6)$$

с граничным условием:

$$R\ (\rho_0) = 0.$$

$$0 \le \rho \le \rho_0.$$

И для функции T - уравнение:

$$T' + a^2\ k^2\ T = 0.$$

Задача для функции $R\ (\rho)$ - задача на собственные значения и собственные функции радиальной части оператора Лапласа в цилиндре при краевом условии первого типа. Ее решение:

$$R\ (\rho) = J_1\ (k\rho),$$

$$J_1\ (k\ \rho_0) = 0 \to k_m\rho_0 = \mu_m^{(1)},$$

где $J_1(\mu_m^{(1)}) = 0$. И набор С.Ф. задачи (С.7.6) есть:

$$R_m(\rho) = J_1\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\rho\right).$$

Общее решение задачи для функции (С.7.3) $v\ (\rho, t)$ имеет вид:

$$v\ (\rho, t) = \sum\ A_m J_1\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\rho\right)\ e^{-(\frac{a\mu_m^{(1)}}{\rho_0})^2 t}. \qquad (C.7.7)$$

Используя начальное условие из (С.7.3), имеем:

$$u_0\ \frac{\rho}{\rho_0} = \sum_{m=1}^{\infty}\ A_m\ J_1\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\rho\right). \qquad (C.7.8)$$

Рассматривая это соотношение как разложение функции $u_0\ \frac{\rho}{\rho_0}$ по набору ортогональных функций $J_1\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\rho\right)$, по известному правилу получим коэффициенты разложения A_m:

$$A_m = \frac{\frac{u_0}{\rho_0}\int\limits_0^{\rho_0}\rho\ J_1\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho}{\|\ J_1\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\rho\right)\ \|^2}. \qquad (C.7.9)$$

Интеграл в (С.7.9) вычисляется с помощью рекурентного соотношения:

$$\frac{d}{dx}\ [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu\ J_{\nu-1}(x).$$

При $\nu = 2$ имеем:

$$x^2 J_1(x)\ dx = d\ [x^2 J_2(x)]$$

и

$$\int\limits_0^{\rho_0}\ \rho^2 J_1\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\ d\rho = \mid\ \frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\rho = x\ \mid =$$

$$= \frac{\rho_0^3}{(\mu_m^{(1)})^3}\ \int\limits_0^{\mu_m^{(1)}} x^2 J_1(x)dx = \frac{\rho_0^3}{(\mu_m^{(1)})^3}\ \int\limits_0^{\mu_m^{(1)}} d\ [x^2 J_2(x)] =$$

$$\frac{\rho_0^3}{\mu_m^{(1)}} J_2(\mu_m^{(1)}).$$

Известно, что:

$$\parallel J_1\left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\rho\right)\parallel^2=\frac{\rho_0^2}{2}[J_1'(\mu_m^{(1)})]^2$$

и

$$A_m=2u_0\frac{J_2(\mu_m^{(1)})}{\mu_m^{(1)}[J_1'\ (\mu_m^{(1)})]^2}. \qquad (C.7.10)$$

И общее решение исходной задачи (С.7.1) есть:

$$u\ (\rho,\varphi,t)=2u_0\ \cos\varphi\ \sum_{m=1}^{\infty}\ \frac{J_2(\mu_m^{(1)})}{\mu_m^{(1)}[J_1'\ (\mu_m^{(1)})]^2}J_1\ \left(\frac{\mu_m^{(1)}}{\rho_0}\rho\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-\left(\frac{a\ \mu_m^{(1)}}{\rho_0}\right)^2\ t\ \right]. \qquad (C.7.11)$$

Возможны различные вариации этих задач.

а) Начальное условие имеет вид суммы гармоник, например:

$$u\ (\rho,\varphi,0)=\frac{\rho}{\rho_0}\ \cos\varphi+\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\sin 2\varphi.$$

Тогда задача разбивается на две задачи:

$$u(\rho,\varphi,t)=u_1(\rho,\varphi,t)+u_2\ (\rho,\varphi,t),$$

для одной из которых начальное условие имеет вид:

$$u_1(\rho,\varphi,0)=\frac{\rho}{\rho_0}\cos\varphi,$$

а для другой:

$$u_2\ (\rho,\varphi,0)=\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\sin 2\varphi.$$

И решение обеих задач ищется по приведенной выше схеме.

в) Начальное условие имеет, например, вид:

$$u\ (\rho,\varphi,0)=A\ f\ (\rho)\cos^2\ \varphi.$$

Расписываем $\cos^2\varphi$ в виде гармоник:

$$\cos^2\varphi=\frac{1}{2}\ (1+\cos 2\varphi)$$

и задача разбивается на две, по предыдущей схеме:

$$u\ (\rho, \varphi, t) = u_1\ (\rho, t) + u_2\ (\rho, \varphi, t).$$

Для решения $u_1\ (\rho, t)$ -задача с начальным условием $u_1\ (\rho, 0) = \frac{1}{2} f\ (\rho)$, а для решения $u_2\ (\rho, \varphi, t)$ - задача с начальным условием $u_2\ (\rho, \varphi, 0) = \frac{1}{2}\ (\rho) \cos 2\varphi$. Методы решения этих задач нам уже известны.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики., М., Физматлит, 1974. ‘ 2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М., Физматлит, 1972.

3. Будак В.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М., Физматлит, 1972.

Страницы указаны как номер страницы в файле, те 5ая страница тут это 7ая если смотреть по нумерации в правом верхнем углу, но все таки 5ая если в программе нажать перейти на страницу.