$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx}$$

Рассмотрим такой двойной интеграл

$$I \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy \,.$$

Переходим к полярным координатам

$$I = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\tau} d\tau = \pi \,.$$

Искомый интеграл равен

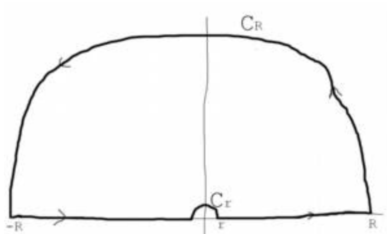
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{I} = \sqrt{\pi} \,.$$

****

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx}$$

Рассмотрим такой интеграл

$$I = \int\limits_{C} \frac{e^{iz}}{z} dx \,.$$



Интеграл по замкнутому контуру ввиду отсутствия особых точек внутри равен нулю. Интеграл по C_R равен нулю. Остается интеграл по малой полуокружности вокруг полюса (0,0*i*) и интеграл по двум половинкам действительной оси. Таким образом, сумма этих двух интегралов равна нулю.

В особой точке – можно, конечно, и вычет посчитать по правилам. Но тут несложно получить результат, исходя и из первых принципов (здесь получится то же самое).

Подынтегральную функцию можно разложить в окрестности этой особой точки

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2} + \ldots$$

Устремим $r \to 0$ и возьмем только первый, самый существенный член разложения. Интеграл по C_r можно взять в полярных координатах $z = re^{i\varphi}$.

$$I = \int\limits_{C_r} \frac{dz}{z} = \int\limits_{C_r} \frac{d\left(re^{i\varphi}\right)}{re^{i\varphi}} = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{\cancel{r} i \cancel{e^{i\varphi}} d\varphi}{\cancel{r}\cancel{e^{i\varphi}}} = -\pi i \,.$$

Интеграл по полуосям *x* перепишем как

$$\int_{-\infty}^{-r} dx\frac{e^{ix}}{x}+\int_{r}^{\infty} dx\frac{e^{ix}}{x}=`\int_{x=-\infty}^{-r} d(-x)\,\frac{e^{-i(-x)}}{(-x)}+\int_{r}^{\infty} dx\frac{e^{ix}}{x}=\int_{-\infty}^{-r} dy\frac{e^{-iy}}{y}+\int_{r}^{\infty} dx\frac{e^{ix}}{x}=$$

$$=\int_{\infty}^{r} dy\frac{e^{-iy}}{y}+\int_{r}^{\infty} dx\frac{e^{ix}}{x}=-\int_{r}^{\infty} dx\frac{e^{-ix}}{x}+\int_{r}^{\infty} dx\frac{e^{ix}}{x}=\int_{r}^{\infty} dx\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}=2i\int_{r}^{\infty} dx\frac{\sin x}{x}.$$

Приравнивая интеграл по полуосям к интегралу по малому контуру

$$2i\lim_{r\to 0}\int_{r}^{\infty} dx\frac{\sin x}{x}+(-\pi i)=0.$$

или

$$\int_{0}^{\infty} dx\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2} \qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{\sin x}{x}=\pi.$$

-

Или:

$$J(\alpha)=\int_{0}^{\infty} dx\cdot e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}.$$

$$J'(\alpha)=-\int_{0}^{\infty} dx\cdot e^{-\alpha x}\sin x.$$

J' можно посчитать по частям, занося под дифференциал или тригонометрические функции, или экспоненту (главное, все время что-то одно, иначе не удастся выразить J через себя же)

$$\mathrm{J}=\int dx\cdot e^{-\alpha x}\sin x=-\int e^{-\alpha x}d\cos x=-e^{-\alpha x}\cos x-(-)(-\alpha)\int\cos x\,e^{-\alpha x}dx=$$

$$-e^{-\alpha x}\cos x-\alpha\int e^{-\alpha x}d\sin x=-e^{-\alpha x}\cos x-\alpha\left(e^{-\alpha x}d\sin x-(-\alpha)\int\sin x\,e^{-\alpha x}dx\right)=$$

$$=-e^{-\alpha x}\cos x-\alpha e^{-\alpha x}\sin x-\alpha^2\mathrm{J}$$

$$\mathrm{J}\left(1+\alpha^2\right)=-e^{-\alpha x}\cos x-\alpha e^{-\alpha x}\sin x \qquad\Rightarrow\qquad \mathrm{J}=\frac{-e^{-\alpha x}}{\left(1+\alpha^2\right)}(\cos x+\alpha\sin x)$$

$$J'=\mathrm{J}=\int_{0}^{\infty} dx\cdot e^{-\alpha x}\sin x=\left.\frac{-e^{-\alpha x}}{\left(1+\alpha^2\right)}(\cos x+\alpha\sin x)\right|_{0}^{\infty}=\frac{1}{1+\alpha^2}$$

$$J=-\int J'(\alpha)\,d\alpha=-\int\frac{1}{1+\alpha^2}d\alpha=-\operatorname{arctg}\alpha+C$$

$$J(\infty)=0 \quad\Rightarrow\quad C=\pi/2 \quad\Rightarrow\quad J(0)=\pi/2$$

$$\int_{0}^{\infty} dx\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

****

$$\boxed{I(t)=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}x\,\sin tx\,dx}$$

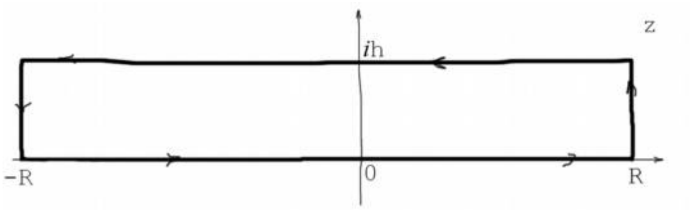
Искомый интеграл равен минус половине производной по t от $J(t)$:

$$J(t)\equiv\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos tx\,dx\,.$$

$$J'(t)\equiv-\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\,e^{-x^2}\sin tx\,dx\,.$$

Найти $J(t)$ можно, рассматривая такой интеграл:

$$\mathrm{J}(t)\equiv\int\limits_C e^{-z^2}dz\,.$$



Интеграл $\mathrm{J}(t)$ по замкнутому контуру равен нулю (нет внутри особых точек), значение подынтегральной функции по боковым частям контура обращается в нуль при $R\to\pm\infty$, ими пренебрегаем. Интеграл по оси x равен $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$. Учитывая разнонаправленность нижней и верхней части контура, интеграл по верхней части, если его считать в направлении от $-\infty$ до $+\infty$, также равен $\sqrt{\pi}$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+ih)^2}dx=\sqrt{\pi}\,.$$

Распишем показатель

$$-(x+ih)^2=-x^2-2ixh+h^2\,.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+ih)^2}dx=e^{h^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-2ixh}dx=e^{h^2}\left\{\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-x^2}e^{-2ixh}dx+\int\limits_0^\infty e^{-x^2}e^{-2ixh}dx\right\}=$$
$$=e^{h^2}\left\{\int\limits_0^\infty e^{-y^2}e^{2iyh}dy+\int\limits_0^\infty e^{-x^2}e^{-2ixh}dx\right\}=e^{h^2}\cdot2\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos2xh\;dx=\sqrt{\pi}\,.$$

То есть,

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos2xh\;dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2e^{h^2}}\quad\Rightarrow\quad\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos2xh\;dx=\sqrt{\pi}e^{-h^2}\quad\Rightarrow$$
$$J(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos tx\;dx=\sqrt{\pi}e^{-t^2/4}\,.$$

$$I(t)=-\frac{1}{2}J'(t)=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{2t}{4}\right)e^{-t^2/4}=\frac{t\sqrt{\pi}}{4}e^{-t^2/4}\,.$$

****

$$\boxed{\int_0^\infty dx\cdot x\cdot e^{-x}\sin tx}$$

$$I(t)\equiv\int_0^\infty dx\cdot x\cdot e^{-x}\sin tx \qquad\qquad J(t)\equiv\int_0^\infty dx\cdot e^{-x}\cos tx\,.$$

$$I(t)=-J'(t)$$

$$J(t)\equiv\int_0^\infty dx\cdot e^{-x}\cos tx=\frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-x}d\sin tx=\frac{1}{t}e^{-x}\sin tx+\frac{1}{t}\int_0^\infty \sin tx\cdot e^{-x}dx=$$

$$=\frac{e^{-x}\sin tx}{t}+\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{t}\right)\int_0^\infty e^{-x}d\cos tx=\frac{e^{-x}\sin tx}{t}-\frac{e^{-x}\cos tx}{t^2}-(-)(-)\frac{1}{t^2}\int_0^\infty \cos tx\cdot e^{-x}dx=$$

$$=\frac{e^{-x}\sin tx}{t}-\frac{e^{-x}\cos tx}{t^2}-\frac{1}{t^2}J(t)$$

$$J(t)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)=\frac{e^{-x}\sin tx}{t}-\frac{e^{-x}\cos tx}{t^2}=\frac{e^{-x}}{t}\left(\sin tx-\frac{1}{t}\cos tx\right).$$

$$J(t)=\frac{e^{-x}}{t\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}\left(\sin tx-\frac{1}{t}\cos tx\right)\Bigg|_0^\infty=\frac{te^{-x}}{1+t^2}\left(\sin tx-\frac{1}{t}\cos tx\right)\Bigg|_0^\infty=\frac{1}{1+t^2}\,.$$

$$I(t)=-J'(t)=-\left(\frac{1}{1+t^2}\right)'=-\frac{2t}{-\left(1+t^2\right)^2}=\frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}\,.$$

****

$$\boxed{\int_0^t \left(\frac{\cos^2 x}{x^3} + \frac{\sin^2 x}{x^5} - 2\frac{\sin x \cos x}{x^4} \right) dx}$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{x^3}dx = -\frac{1}{2}\int \cos^2 x\, d\,\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}\left(\cos^2 x \frac{1}{x^2} - (-1)\int \frac{1}{x^2}\cdot 2\cos x \sin x\, dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\cos^2 x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\cdot \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2x^2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\int \sin 2x\, d\,\frac{1}{x} =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x \frac{1}{x} - \frac{1}{\cancel{2}}\int \frac{1}{x}\cdot \cancel{2}\cos 2x\, dx =$$

$$-\frac{\cos^2 x}{2x^2} + \frac{\sin 2x}{2x} - \int \frac{1}{2x}\cdot \cos 2x\, d2x = -\frac{\cos^2 x}{2x^2} + \frac{\sin 2x}{2x} - \int \frac{\cos 2x}{2x} d2x =$$

$$= \begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} \end{cases} = -\frac{\cos 2x}{4x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{\sin 2x}{2x} - \int \frac{\cos 2x}{2x} d2x$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{x^5}dx = -\frac{1}{4}\int \sin^2 x\, d\,\frac{1}{x^4} = -\frac{1}{4}\sin^2 x \frac{1}{x^4} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^4}\cdot 2\cos x \sin x\, dx =$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{4x^4} - \frac{1}{4\cdot 3}\int \sin 2x\, d\,\frac{1}{x^3} = -\frac{\sin^2 x}{4x^4} - \frac{1}{12}\left(\frac{\sin 2x}{x^3} - \int \frac{1}{x^3}\cdot 2\cos 2x\, dx \right) =$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{4x^4} - \frac{\sin 2x}{12x^3} + \frac{2}{12}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int \cos 2x\, d\,\frac{1}{x^2} = -\frac{\sin^2 x}{4x^4} - \frac{\sin 2x}{12x^3} - \frac{1}{12}\left(\frac{\cos 2x}{x^2} + \int \frac{2\sin 2x}{x^2}dx \right) =$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{4x^4} - \frac{\sin 2x}{12x^3} - \frac{1}{12}\frac{\cos 2x}{x^2} + \frac{1}{6}\int \sin 2x\, d\,\frac{1}{x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{4x^4} - \frac{\sin 2x}{12x^3} - \frac{\cos 2x}{12x^2} + \frac{\sin 2x}{6x} - \frac{1}{3}\int \frac{\cos 2x}{2x} d2x$$

$$2\int \frac{\sin x \cos x}{x^4}dx = \int \frac{\sin 2x}{x^4}dx = -\frac{1}{3}\int \sin 2x \cdot d\,\frac{1}{x^3} = -\frac{1}{3}\left(\sin 2x \cdot \frac{1}{x^3} - 2\int \frac{\cos 2x}{x^3}dx \right) =$$

$$= -\frac{\sin 2x}{3x^3} + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int \cos 2x \cdot d\,\frac{1}{x^2} = -\frac{\sin 2x}{3x^3} - \frac{1}{3}\left(\frac{\cos 2x}{x^2} + \int \frac{1}{x^2} 2\sin 2x \cdot dx \right) =$$

$$= -\frac{\sin 2x}{3x^3} - \frac{\cos 2x}{3x^2} - \frac{2}{3}(-1)\int \sin 2x \cdot d\,\frac{1}{x} = -\frac{\sin 2x}{3x^3} - \frac{\cos 2x}{3x^2} + \frac{2}{3}\left(\frac{\sin 2x}{x} - \int \frac{1}{x}\cdot 2\cos 2x\, dx \right) =$$

$$= -\frac{\sin 2x}{3x^3} - \frac{\cos 2x}{3x^2} + \frac{2}{3}\frac{\sin 2x}{x} - \frac{4}{3}\int \frac{\cos 2x}{2x} d2x$$

-

-

$$\int_0^t \left(\frac{\cos^2 x}{x^3} + \frac{\sin^2 x}{x^5} - 2\frac{\sin x \cos x}{x^4} \right) dx =$$

$$= -\frac{\cos 2x}{4x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{\sin 2x}{2x} - \cancel{\int \frac{\cos 2x}{2x}} d2x - \frac{\sin^2 x}{4x^4} - \frac{\sin 2x}{12x^3} - \frac{\cos 2x}{12x^2} + \frac{\sin 2x}{6x} - \frac{1}{3}\cancel{\int \frac{\cos 2x}{2x}} d2x +$$

$$+ \frac{\sin 2x}{3x^3} + \frac{\cos 2x}{3x^2} - \frac{2}{3}\frac{\sin 2x}{x} + \frac{4}{3}\cancel{\int \frac{\cos 2x}{2x}} d2x =$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{4x^4} + \frac{\sin 2x}{x^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) + \frac{1}{x^2}\left(\cancel{+\frac{\cos 2x}{3} - \frac{\cos 2x}{12} - \frac{\cos 2x}{4}} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\sin 2x}{x}\cancel{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \right)} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{4x^4} + \frac{\sin 2x}{4x^3} - \frac{1}{4x^2}$$

-

$$\int_0^t \left(\frac{\cos^2 x}{x^3} + \frac{\sin^2 x}{x^5} - 2\frac{\sin x \cos x}{x^4} \right) dx = -\frac{\sin^2 x}{4x^4} + \frac{\sin 2x}{4x^3} - \frac{1}{4x^2} \Bigg|_0^t =$$

$$= -\frac{\sin^2 t}{4t^4} + \frac{\sin 2t}{4t^3} - \frac{1}{4t^2} - \lim_{x \to 0}\left(-\frac{\sin^2 x}{4x^4} + \frac{\sin 2x}{4x^3} - \frac{1}{4x^2} \right) =$$

$$= -\frac{\sin^2 t}{4t^4} + \frac{\sin 2t}{4t^3} - \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4}\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^4} - \frac{\sin 2x}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= -\frac{\sin^2 t}{4t^4} + \frac{\sin 2t}{4t^3} - \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4}\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2 - 2\frac{x^4}{6}}{x^4} - \frac{2x - \frac{8x^3}{6}}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= \frac{x^2 - 2\frac{x^4}{6}}{x^4} - \frac{2x - \frac{8x^3}{6}}{x^3} + \frac{1}{x^2} = 1 = -\frac{\sin^2 t}{4t^4} + \frac{\sin 2t}{4t^3} - \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{t^2} + \frac{\sin 2t}{t^3} - \frac{\sin^2 t}{t^4} \right)$$

****

$$\int_0^t \frac{(8+y)^2}{(4+y)^4}dy = \int_0^t \frac{(4+4+y)^2}{(4+y)^4}d(4+y) = \int_4^{4+t}\frac{(4+x)^2}{x^4}dx = 16\int_4^{4+t}\frac{dx}{x^4} + 8\int_4^{4+t}\frac{dx}{x^3} + \int_4^{4+t}\frac{dx}{x^2} =$$

$$= +\frac{16}{3}\frac{1}{x^3}\Bigg|_{4+t}^{4} + \frac{4}{x^2}\Bigg|_{4+t}^{4} + \frac{1}{x}\Bigg|_{4+t}^{4} = \frac{16}{3}\left(\frac{1}{4^3} - \frac{1}{(4+t)^3}\right) + 4\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{(4+t)^2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4+t}\right) =$$

$$= \frac{16}{3}\frac{1}{4^3} - \frac{16}{3}\frac{1}{(4+t)^3} + 4\frac{1}{4^2} - 4\frac{1}{(4+t)^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4+t} =$$

$$= \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{16}{3(4+t)^3} + \frac{1}{4} - \frac{4}{(4+t)^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4+t} = \frac{7}{12} - \frac{16+12(4+t)+3(4+t)^2}{3(4+t)^3} =$$

$$= \frac{7(4+t)^3 - 4\left(16+12(4+t)+3(4+t)^2\right)}{12(4+t)^3} =$$

$$= \frac{7\left(64+48t+12t^2+t^3\right) - 4\left(16+48+12t+3\left(16+8t+t^2\right)\right)}{12(4+t)^3} =$$

$$= \frac{448+336t+84t^2+7t^3-64-192-48t-192-96t-12t^2}{12(4+t)^3} =$$

$$= \frac{7t^3+72t^2+192t}{12(4+t)^3} = t\frac{7t^2+72t+192}{12(4+t)^3}$$