

Министерство образования и науки Российской Федерации

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

А.В. Кузнецов

Методы математической физики

Допущено Учебно-методическим советом по физике
Учебно-методического объединения
по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 010400 - Физика

Ярославль 2004

ББК В311я73

К89

УДК 517

Рецензенты:

кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета; д-р физ.-мат. наук А.В. Проказников.

Кузнецов А. В.

Методы математической физики: Учеб. пособие / Ярослав. гос. ун-т. Ярославль, 2004. 200 с.

ISBN 5-8397-0319-2

Учебное пособие по дисциплине “Методы математической физики” подготовлено в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования для физических специальностей университетов. Предназначено для студентов очной и очно-заочной форм обучения по специальности 010400 - Физика, направлению 510400 - Физика (блок дисциплин ОПД) и по специальности 013800 - Радиофизика и электроника (блок дисциплин ЕН). Пособие написано на основе лекционного курса, читаемого автором в течение 10 лет для студентов физического факультета Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова. В тексте использованы шрифтовые выделения основных терминов и определений. Каждая глава снабжена аннотацией и набором контрольных заданий. Имеется подробный предметный указатель.

Пособие подготовлено с использованием издательской системы \LaTeX . Иллюстрации выполнены с помощью графического пакета *Mayura Draw* и системы компьютерной алгебры *Mathematica*.

Пособие издано при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ РФ, грант № НШ-1916.2003.2.

Рис. 27. Библиогр.: 12 назв.

ISBN 5-8397-0319-2

© Ярославский
государственный
университет, 2004

© А. В. Кузнецов, 2004

Оглавление

Предисловие	7
1 Классификация уравнений в частных производных	9
1.1 Общая характеристика уравнений в частных производных математической физики	9
1.2 Приведение линейных уравнений к канонической форме	12
1.2.1 Уравнения гиперболического типа	14
1.2.2 Уравнения параболического типа	17
1.2.3 Уравнения эллиптического типа	18
1.2.4 Дальнейшее упрощение уравнения с постоянными коэффициентами	19
<i>Контрольные задания к главе 1</i>	21
2 Уравнения гиперболического типа	22
2.1 Уравнение малых поперечных колебаний струны . .	22
2.1.1 Вывод уравнения колебаний	22
2.1.2 Случай сосредоточенной силы	26
2.1.3 Энергия колебаний струны	27
2.2 Уравнение колебаний мембраны	29
2.3 Уравнение продольных колебаний стержня	33
2.4 Метод распространяющихся волн. Формула Даламбера	37
2.5 Метод распространяющихся волн на полуограниченной прямой	42
2.6 Метод распространяющихся волн на ограниченном отрезке	46
2.7 Метод разделения переменных в уравнениях гиперболического типа	49

2.8	Неоднородное уравнение гиперболического типа	54
2.8.1	Случай стационарной неоднородности	55
2.8.2	Общий случай неоднородного уравнения	56
2.8.3	Неоднородные граничные условия	57
	<i>Контрольные задания к главе 2</i>	58
3	Уравнения параболического типа	59
3.1	Одномерное уравнение теплопроводности	59
3.2	Уравнение диффузии	63
3.3	Постановка краевых задач для параболических уравнений	65
3.4	Метод разделения переменных в уравнениях параболического типа. Функция мгновенного точечного источника	68
3.5	Неоднородное уравнение теплопроводности	71
3.6	Распространение тепла на неограниченной прямой	73
	Дельта-функция Дирака	78
	<i>Контрольные задания к главе 3</i>	79
4	Уравнения эллиптического типа	80
4.1	Уравнение Лапласа	80
4.2	Первая и вторая формулы Грина	85
4.3	Основная интегральная формула Грина	86
4.4	Свойства гармонических функций	91
4.5	Единственность и устойчивость первой краевой задачи для уравнения Лапласа	94
4.6	Функция источника для уравнения Лапласа	96
4.7	Метод электростатических изображений и функция источника уравнения Лапласа для сферы	99
4.8	Основные задачи, приводящие к уравнению Гельмгольца	103
4.9	Краевые задачи и фундаментальные решения уравнения Гельмгольца	106
4.10	Функция точечного источника для уравнения Гельмгольца	110
	<i>Контрольные задания к главе 4</i>	112

5	Нелинейные уравнения математической физики	113
5.1	Системы квазилинейных уравнений	113
5.2	Примеры образования разрывов в решениях	118
5.3	Одномерные адиабатические течения газа	122
5.4	Численное решение систем квазилинейных уравнений методом характеристик	125
5.5	Уравнение Кортевега–де Фриса. Солитонные решения <i>Контрольные задания к главе 5</i>	126 134
6	Специальные функции	135
6.1	Разделение переменных в цилиндрических координатах. Уравнение Бесселя	135
6.2	Функции Бесселя	138
6.3	Функции Неймана, Ханкеля, Макдональда	143
6.4	Интеграл Бесселя	147
6.5	Функции Бесселя полуцелого порядка	150
6.6	Асимптотика функций Бесселя	152
6.7	Разделение переменных в сферических координатах	155
6.8	Полиномы Лежандра	158
6.9	Присоединенные функции Лежандра. Сферические функции	165
6.10	Общее уравнение для специальных функций	168
6.11	Полиномы Чебышёва – Эрмита	170
6.12	Пример из квантовой механики. Гармонический осциллятор	174
6.13	Полиномы Чебышёва – Лагерра	177
6.14	Обобщенные полиномы Чебышёва – Лагерра	180
6.15	Уравнение Шрёдингера для атома водорода <i>Контрольные задания к главе 6</i>	182 184
7	Метод конечных разностей	186
7.1	Сетки и сеточные функции. Аппроксимация дифференциальных операторов	186
7.2	Разностная задача для уравнения теплопроводности	190
	<i>Контрольные задания к главе 7</i>	194

Литература	195
Предметный указатель	196

Предисловие

Дисциплина “Методы математической физики” вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей различных физических процессов и решения получающихся при этом математических задач. Данная дисциплина составляет математическую основу дисциплины “Теоретическая физика” и значительного числа специальных дисциплин для всех физических специальностей.

В настоящем учебном пособии рассматриваются задачи математической физики, приводящие к уравнениям с частными производными. Порядок изложения связан с описанием типичных физических процессов, поэтому расположение материала соответствует основным типам уравнений. В отдельную главу вынесено изложение теории специальных функций, плавный переход к которой обеспечивается демонстрацией решения конкретных трёхмерных задач при наличии осевой или сферической симметрии. После подробного рассмотрения цилиндрических и сферических функций сформулировано общее уравнение для специальных функций, и затем рассмотрены классы ортогональных полиномов, возникающих в задачах квантовой механики.

Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования 2000 г. для физических специальностей университетов в рамках данной дисциплины был введён новый раздел “Понятие о нелинейных уравнениях математической физики”. В настоящем учебном пособии содержится глава “Нелинейные уравнения математической физики”, где излагаются основы анализа систем квазилинейных уравнений методом характеристик, с конкретными примерами. Сформулировано понятие устойчивой уединённой нелинейной волны – солитона. Приведено уравнение Кортевега-де Фриса, проанализирован физический смысл его слагаемых, описывающих эффекты дисперсии и нелинейности, найдено решение уравнения,

описывающее устойчивую уединённую волну.

В заключительной главе приведены базовые понятия основного метода численного решения уравнений в частных производных математической физики – метода конечных разностей.

Пособие написано на основе лекционного курса, читаемого автором в течение 10 лет для студентов физического факультета Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Будет уместным вспомнить, что первым преподавателем дисциплины “Методы математической физики” для студентов-физиков ЯрГУ был в 1970-х гг. доцент кафедры теоретической физики Александр Макарович Алтухов, светлой памяти которого автор с благодарностью посвящает данную книгу.

При подготовке учебного пособия автором предпринимались специальные усилия для улучшения изложения и представления материала. В тексте использованы шрифтовые выделения основных терминов и определений. Каждая глава снабжена аннотацией и набором контрольных заданий. Названия глав и параграфов вынесены в колонтитул каждой страницы. Имеется подробный предметный указатель.

Пособие подготовлено с использованием издательской системы \LaTeX . Иллюстрации выполнены с помощью графического пакета *Mayura Draw* и системы компьютерной алгебры *Mathematica*.

Автору приятно воспользоваться возможностью выразить благодарность Н.В. Михееву и А.А. Гвоздеву за внимательное чтение рукописи и ценные замечания, а также Д.А. Румянцеву, М.В. Чистякову и А.И. Шерешнёву за помощь при подготовке пособия.

Ярославль, 2004

А. В. Кузнецов

Глава 1

Классификация уравнений в частных производных

Настоящая глава посвящена общим вопросам теории уравнений в частных производных. Приведены основные виды уравнений математической физики. Рассматривается классификация уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. Для каждого из типов уравнений – гиперболического, параболического и эллиптического – подробно выполнена процедура приведения к канонической форме. Излагается схема дальнейшего упрощения уравнений с постоянными коэффициентами.

1.1 Общая характеристика уравнений в частных производных математической физики

Пусть в пространстве n переменных имеется некоторая неизвестная функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Соотношение, связывающее эту функцию, независимые переменные и частные производные функции, называется дифференциальным уравнением в частных производных:

$$F \left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Порядок старшей производной называется порядком уравнения.

Решением уравнения (1.1) называется любая функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, обращающая уравнение в тождество.

Рассмотрим вначале наиболее простой случай *двух независимых переменных*. В самом общем случае уравнение первого порядка имеет вид:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (1.2)$$

Далее мы будем использовать сокращённые обозначения для частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv u_y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv u_{xy}, \quad \text{и т.д.}$$

Наиболее общий вид уравнения второго порядка:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2) и (1.3) записаны в слишком общем виде, чтобы о них можно было сказать что-либо конкретное. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Уравнение, линейное только относительно самых старших производных, называется *квазилинейным уравнением*. Квазилинейное уравнение первого порядка для функции двух независимых переменных имеет вид

$$A(x, y, u) u_x + B(x, y, u) u_y + D(x, y, u) = 0. \quad (1.4)$$

Квазилинейное уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned} A(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + B(x, y, u, u_x, u_y) u_{xy} + C(x, y, u, u_x, u_y) u_{yy} + \\ + D(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Уравнения (1.4) и (1.5) также кажутся достаточно общими, тем не менее, как мы увидим в главе 5, посвященной нелинейным уравнениям, они поддаются дальнейшему анализу.

Уравнение называется *линейным*, если оно линейно зависит от неизвестной функции и всех её производных. Таким образом, линейное уравнение второго порядка для функции двух независимых переменных имеет вид

$$\begin{aligned} a_{11}(x, y) u_{xx} + 2a_{12}(x, y) u_{xy} + a_{22}(x, y) u_{yy} + b_1(x, y) u_x + \\ + b_2(x, y) u_y + g(x, y) u = f(x, y). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Если здесь $f(x, y) = 0$, то уравнение называется *однородным*. Если коэффициенты при функции и её производных не зависят от x, y , будем иметь *уравнение с постоянными коэффициентами*.

Очевидно, что те же определения вводятся и для любого числа независимых переменных $n > 2$.

Во многих задачах физики возникают дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка нескольких наиболее часто встречающихся видов.

1. При изучении волн различной физической природы – упругих, электромагнитных, волн плотности заряда в плазме и т.д. – возникает *волновое уравнение*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1.7)$$

здесь функция $u(x, y, z, t)$ может быть давлением или плотностью для упругих волн в газах, напряженностью электрического или магнитного поля и т.д.; c – скорость распространения волн в данной среде.

2. Распространение тепла в однородном изотропном теле, а также процессы диффузии описываются *уравнением теплопроводности*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1.8)$$

здесь функция $u(x, y, z, t)$ имеет смысл температуры или концентрации.

3. Установившееся тепловое состояние в однородном изотропном теле описывается *уравнением Пуассона*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z), \quad (1.9)$$

где функция $f(x, y, z)$ связана с плотностью источников тепла.

4. То же, но при отсутствии источников тепла внутри тела описывается *уравнением Лапласа*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (1.10)$$

Таким же уравнением описываются потенциалы поля тяготения или электростатического поля при отсутствии масс или зарядов, и т.д.

5. Основное уравнение квантовой механики — уравнение Шрёдингера — имеет вид

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z), \quad (1.11)$$

здесь комплексная функция $u(x, y, z, t)$, называемая волновой функцией, определяет амплитуду вероятности обнаружения микрочастицы, функция $f(x, y, z)$ связана с потенциальной энергией микрочастицы во внешнем силовом поле.

Уравнения (1.7) – (1.11) есть основные уравнения математической физики.

1.2 Приведение линейных уравнений к канонической форме

Вернёмся к линейному уравнению второго порядка для функции двух независимых переменных (1.6)

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + g u = f(x, y), \quad (1.12)$$

где коэффициенты a, b, g зависят только от переменных x, y . Переходом от переменных x, y к новым независимым переменным ξ, η можно привести уравнение к *канонической форме*, то есть к определённой более простой форме, когда в уравнении присутствуют не все старшие производные. Поскольку далее мы будем следить только за старшими производными, перепишем уравнение (1.12) в виде

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \quad (1.13)$$

Пусть коэффициенты a являются непрерывными функциями переменных x, y вместе с 1-ми и 2-ми производными, и не обращаются одновременно в ноль. Мы будем искать функции, определяющие преобразование от старых переменных к новым:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \quad (1.14)$$

Для того, чтобы между областями переменных (x, y) и (ξ, η) существовало взаимно-однозначное соответствие, то есть преобразование было невырожденным необходимо, чтобы якобиан преобразования не обращался в ноль:

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.15)$$

Потребуем, чтобы функции φ и ψ были непрерывны вместе с частными производными 1-го и 2-го порядков.

Для преобразования уравнения (1.13) к новым переменным необходимо выразить производные по x, y через производные по ξ, η . Учитывая, что

$$u(x, y) \Rightarrow u(\xi, \eta) = u(\varphi(x, y), \psi(x, y)),$$

получаем

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x, & u_y &= u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y, \\ u_{xx} &= (u_{\xi\xi} \varphi_x + u_{\xi\eta} \psi_x) \varphi_x + u_\xi \varphi_{xx} + (u_{\eta\xi} \varphi_x + u_{\eta\eta} \psi_x) \psi_x + u_\eta \psi_{xx} = \\ &= u_{\xi\xi} \varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \varphi_x \psi_x + u_{\eta\eta} \psi_x^2 + u_\xi \varphi_{xx} + u_\eta \psi_{xx}, \\ u_{xy} &= (u_{\xi\xi} \varphi_y + u_{\xi\eta} \psi_y) \varphi_x + u_\xi \varphi_{xy} + (u_{\eta\xi} \varphi_y + u_{\eta\eta} \psi_y) \psi_x + u_\eta \psi_{xy} = \\ &= u_{\xi\xi} \varphi_x \varphi_y + u_{\xi\eta} (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + u_{\eta\eta} \psi_x \psi_y + u_\xi \varphi_{xy} + u_\eta \psi_{xy}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \varphi_y \psi_y + u_{\eta\eta} \psi_y^2 + u_\xi \varphi_{yy} + u_\eta \psi_{yy}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1.13) и приводя подобные члены, получаем

$$\alpha_{11} u_{\xi\xi} + 2\alpha_{12} u_{\xi\eta} + \alpha_{22} u_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \quad (1.17)$$

где коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= a_{11} \varphi_x^2 + 2a_{12} \varphi_x \varphi_y + a_{22} \varphi_y^2, \\ \alpha_{12} &= a_{11} \varphi_x \psi_x + a_{12} (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + a_{22} \varphi_y \psi_y, \\ \alpha_{22} &= a_{11} \psi_x^2 + 2a_{12} \psi_x \psi_y + a_{22} \psi_y^2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Функция F_1 в уравнении (1.17) включила в себя члены с первыми производными функции u , возникшие в (1.16).

При всех изменениях в уравнении, происшедших при преобразовании (1.14), имеется ли какая-либо величина, которая осталась неизменной? Как показывает анализ, такая величина есть. Комбинация, построенная из коэффициентов уравнения, вида

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}, \quad (1.19)$$

или, в новых переменных:

$$\Delta' = \alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}, \quad (1.20)$$

называется *дискриминантом* уравнения (1.13) или соответственно (1.17). При любых невырожденных преобразованиях (1.14) *знак дискриминанта остаётся неизменным*.

Знакоопределённость дискриминанта позволяет ввести следующую классификацию уравнений второго порядка.

- Если в некоторой области D на плоскости (x, y) дискриминант положителен, $\Delta > 0$, уравнение в этой области называется *уравнением гиперболического типа*.
- Если в некоторой области D дискриминант отрицателен, $\Delta < 0$, уравнение в этой области называется *уравнением эллиптического типа*.
- Если в некоторой области D дискриминант равен нулю, $\Delta \equiv 0$, уравнение в этой области называется *уравнением параболического типа*.

Подбором функций φ и ψ можно привести каждое уравнение к некоторому наиболее простому виду. Этот вид и называется каноническим. Рассмотрим каждый из типов уравнений в отдельности.

1.2.1 Уравнения гиперболического типа

Канонический, то есть наиболее простой вид уравнения в новых переменных (1.17), очевидно, соответствует случаю, когда только один из трёх коэффициентов α отличен от нуля. Из условия гиперболичности уравнения

$$\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} > 0 \quad (1.21)$$

видно, что есть только одна такая возможность:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{12} \neq 0. \quad (1.22)$$

Следовательно, нужно найти такие функции φ и ψ , чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 &= 0, \\ a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Видно, что уравнения для функций φ и ψ совпадают. Однако нам нужны две линейно независимые функции: уравнение (1.15) как раз и было требованием их линейной независимости. Решение проблемы в том, что каждое из уравнений (1.23) является квадратным, то есть имеет в общем случае два корня.

Примем во внимание, что в рассматриваемой области должно выполняться соотношение $a_{11}^2 + a_{22}^2 > 0$, иначе уравнение уже имело бы каноническую форму. Пусть вблизи рассматриваемой точки будет $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то a_{11} и a_{22} меняются местами). Тогда, рассматривая первое из уравнений (1.23), как квадратный трёхчлен, его можно привести к виду

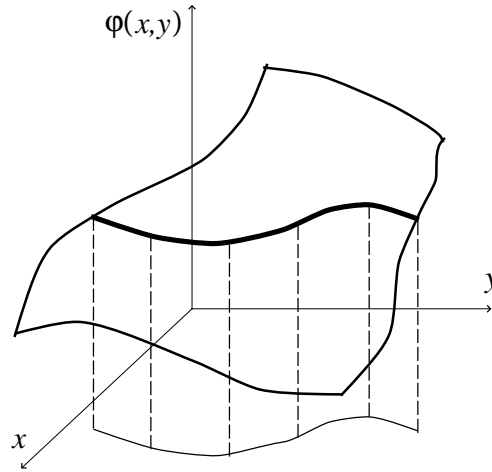
$$\begin{aligned} &\left[a_{11}\varphi_x + \left(a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \right) \varphi_y \right] \times \\ &\times \left[a_{11}\varphi_x + \left(a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \right) \varphi_y \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.24)$$

поскольку $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. Уравнение (1.24) справедливо при обращении в ноль любого из выражений в квадратных скобках, причём эти равенства будут, очевидно, линейно независимыми. Таким образом, их можно рассматривать как уравнения для функций φ и ψ :

$$a_{11}\varphi_x + \left(a_{12} + \sqrt{\Delta} \right) \varphi_y = 0, \quad (1.25)$$

$$a_{11}\psi_x + \left(a_{12} - \sqrt{\Delta} \right) \psi_y = 0. \quad (1.26)$$

Стандартная процедура решения уравнений в частных производных первого порядка вида (1.25), (1.26) состоит в сведении их к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Функция $\varphi(x, y)$,

Рис. 1.1: Поверхность $\varphi(x, y)$ и линия уровня

являющаяся решением уравнения (1.25), представляет собой некоторую поверхность, см. рис. 1.1. Выберем на ней какую-либо линию уровня $\varphi(x, y) = C$, очевидно, это неявная форма уравнения $y = y(x, C)$. Полный дифференциал функции $\varphi(x, y)$ вдоль линии уровня равен нулю:

$$d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0. \quad (1.27)$$

С учётом (1.27) уравнения (1.25), (1.26) преобразуются к обыкновенным дифференциальным уравнениям вида

$$a_{11} dy - (a_{12} + \sqrt{\Delta}) dx = 0, \quad a_{11} dy - (a_{12} - \sqrt{\Delta}) dx = 0 \quad (1.28)$$

Поскольку коэффициенты в уравнениях (1.28) имеют непрерывные частные производные до второго порядка, уравнения имеют решения – общие интегралы – которые можно записать в виде

$$\varphi(x, y) = \text{const}, \quad \psi(x, y) = \text{const}. \quad (1.29)$$

Они являются линиями уровня для двух различных поверхностей. Линии (1.29) называются *характеристическими кривыми* или *характеристиками* уравнения (1.13). Поскольку $\Delta > 0$, интегралы (1.29) вещественны и различны, и определяют два семейства характеристик. Меняя константу в правой части, мы получаем всю поверхность. Таким образом, функции, определяющие преобразование (1.14) от старых переменных к новым, найдены.

Поскольку эти функции удовлетворяют уравнениям (1.23), имеем $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, и уравнение (1.17) приводится к канонической форме

$$u_{\xi\eta} + F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \frac{1}{2\alpha_{12}} = 0. \quad (1.30)$$

Часто используется другая форма уравнения гиперболического типа, которая также называется канонической. Чтобы прийти к ней, сделаем в уравнении (1.30) ещё одну замену переменных вида

$$\xi = \rho + \sigma, \quad \eta = \rho - \sigma. \quad (1.31)$$

Совершая переход аналогично (1.16)

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}(\xi + \eta), & \sigma &= \frac{1}{2}(\xi - \eta), \\ u_\xi &= \frac{1}{2}(u_\rho + u_\sigma), & u_{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(u_{\rho\rho} - u_{\sigma\sigma}), \end{aligned} \quad (1.32)$$

преобразуем уравнение (1.30) к виду

$$u_{\rho\rho} - u_{\sigma\sigma} + F_2(\rho, \sigma, u, u_\rho, u_\sigma) = 0. \quad (1.33)$$

Отметим, что прямое преобразование уравнения (1.17) к виду (1.33) путём решения уравнений $\alpha_{11} = -\alpha_{22}$ и $\alpha_{12} = 0$ представляет собой значительно более громоздкую задачу.

1.2.2 Уравнения параболического типа

Из условия параболичности уравнения

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0, \quad \alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} = 0 \quad (1.34)$$

видно, что имеется возможность, когда только один коэффициент при второй производной отличен от нуля, например:

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{22} \neq 0. \quad (1.35)$$

Записывая ещё раз условие $\alpha_{11} = 0$:

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0,$$

и учитывая, что $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$, преобразуем его к виду

$$(\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y)^2 = 0. \quad (1.36)$$

Как уже отмечалось, такое уравнение будет иметь решение в виде семейства характеристических кривых $\varphi(x, y) = \text{const}$, определяющих поверхность, то есть из (1.36) мы найдём одну из двух функций преобразования переменных: $\xi = \varphi(x, y)$.

У нас есть ещё одно условие: $\alpha_{12} = 0$. Однако оно не добавляет ничего нового, действительно:

$$\begin{aligned} a_{11}\varphi_x\psi_x + a_{12}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + a_{22}\varphi_y\psi_y = \\ = (\sqrt{a_{11}}\varphi_x + \sqrt{a_{22}}\varphi_y)(\sqrt{a_{11}}\psi_x + \sqrt{a_{22}}\psi_y) = 0, \end{aligned}$$

что удовлетворяется тождественно при любой функции $\psi(x, y)$, в силу (1.36). Таким образом, для преобразования уравнения параболического типа к канонической форме:

$$u_{\eta\eta} + F_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \quad (1.37)$$

необходимо найти только одну функцию, $\varphi(x, y)$, а функцию $\psi(x, y)$ можно брать произвольно, лишь бы она была линейно независимой от функции $\varphi(x, y)$ и была непрерывна вместе с частными производными 1-го и 2-го порядков.

Отметим, что если в функцию F_2 уравнения (1.37) не войдёт u_ξ , оно будет обыкновенным дифференциальным уравнением, зависящим от ξ , как от параметра.

1.2.3 Уравнения эллиптического типа

Из условия эллиптичности уравнения

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0, \quad \alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} < 0 \quad (1.38)$$

видно, что два коэффициента при вторых производных обратиться в ноль не могут. Следовательно, наиболее простой вид уравнения достигается, если $\alpha_{12} = 0$ и $\alpha_{11} = \alpha_{22} \neq 0$. Похожая ситуация была при преобразовании уравнения гиперболического типа (1.17) к виду (1.33), где отмечалось, что прямое преобразование не является здесь оптимальным путём. Оказывается, эта аналогия помогает решить и данную задачу. А именно, переход можно провести в два этапа.

Сначала попытаемся формально преобразовать уравнение (1.17), как будто бы оно было гиперболического типа, то есть наложим

условия $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$. При этом, в силу отрицательности дискриминанта, уравнение (1.24) принимает вид

$$\left[a_{11}\varphi_x + \left(a_{12} + i\sqrt{-\Delta} \right) \varphi_y \right] \left[a_{11}\varphi_x + \left(a_{12} - i\sqrt{-\Delta} \right) \varphi_y \right] = 0, \quad (1.39)$$

откуда возникают *комплексные* уравнения характеристик

$$a_{11} dy - \left(a_{12} + i\sqrt{-\Delta} \right) dx = 0, \quad a_{11} dy - \left(a_{12} - i\sqrt{-\Delta} \right) dx = 0. \quad (1.40)$$

Следовательно, уравнение эллиптического типа имеет лишь комплексные характеристики. Новые переменные ξ и η , в которых уравнение (1.17) принимает вид (1.30), оказываются комплексными, причём, очевидно, комплексно сопряжёнными. Запишем их в виде

$$\xi = \tilde{\varphi}(x, y) + i\tilde{\psi}(x, y), \quad \eta = \tilde{\varphi}(x, y) - i\tilde{\psi}(x, y), \quad (1.41)$$

где $\tilde{\varphi}(x, y)$ и $\tilde{\psi}(x, y)$ – вещественные функции. И вот теперь в уравнении вида (1.30), полученном преобразованием (1.41), сделаем ещё одну замену, переходя к вещественным переменным ρ и σ :

$$\xi = \rho + i\sigma, \quad \eta = \rho - i\sigma. \quad (1.42)$$

Выполняя преобразование

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} (\xi + \eta) = \tilde{\varphi}(x, y), & \sigma &= \frac{1}{2i} (\xi - \eta) = \tilde{\psi}(x, y), \\ u_\xi &= \frac{1}{2} u_\rho + \frac{1}{2i} u_\sigma, & u_{\xi\eta} &= \frac{1}{4} (u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma}), \end{aligned} \quad (1.43)$$

окончательно получаем уравнение эллиптического типа в канонической форме

$$u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma} + F_2(\rho, \sigma, u, u_\rho, u_\sigma) = 0. \quad (1.44)$$

1.2.4 Дальнейшее упрощение уравнения с постоянными коэффициентами

В случае, если коэффициенты в рассматриваемом уравнении второго порядка являются постоянными, при этом, очевидно, все характеристики будут прямыми, возможно дальнейшее упрощение уравнения. Итак, мы привели уравнения к следующим каноническим формам:

уравнение гиперболического типа

$$u_{\xi\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u = f(\xi, \eta), \quad (1.45)$$

уравнение параболического типа

$$u_{\eta\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u = f(\xi, \eta), \quad (1.46)$$

уравнение эллиптического типа

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u = f(\xi, \eta), \quad (1.47)$$

где коэффициенты $\beta_{1,2}, \gamma$ – постоянные. Сначала проведём общий анализ, справедливый для всех типов уравнений, затем перейдём к конкретным их типам.

Мы больше не имеем права трогать координаты, так как их преобразованием уравнение уже приведено к канонической форме. Однако ещё можно сделать преобразование неизвестной функции u . Перейдём к новой функции v по формуле

$$u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta) e^{\mu\xi + \nu\eta}, \quad (1.48)$$

где μ и ν есть некоторые числа, пока произвольные. При этом производные, входящие в уравнение, переписутся в виде

$$\begin{aligned} u_\xi &= (v_\xi + \mu v) e^{\mu\xi + \nu\eta}, & u_\eta &= (v_\eta + \nu v) e^{\mu\xi + \nu\eta}, \\ u_{\xi\xi} &= (v_{\xi\xi} + 2\mu v_\xi + \mu^2 v) e^{\mu\xi + \nu\eta}, & u_{\eta\eta} &= (v_{\eta\eta} + 2\nu v_\eta + \nu^2 v) e^{\mu\xi + \nu\eta}, \\ u_{\xi\eta} &= (v_{\xi\eta} + \mu v_\eta + \nu v_\xi + \mu\nu v) e^{\mu\xi + \nu\eta}. \end{aligned}$$

Подставим функцию и производные в уравнение *гиперболического* типа (1.45)

$$v_{\xi\eta} + (\beta_1 + \nu)v_\xi + (\beta_2 + \mu)v_\eta + (\gamma + \mu\nu + \mu\beta_1 + \nu\beta_2)v = f(\xi, \eta) e^{-\mu\xi - \nu\eta}. \quad (1.49)$$

У нас имеются два произвольных числа μ и ν . Видно, что можно устранить слагаемые с первыми производными, если положить $\mu = -\beta_2$ и $\nu = -\beta_1$. В результате получим уравнение вида

$$v_{\xi\eta} + \gamma_1 v = f_1(\xi, \eta), \quad (1.50)$$

где

$$\gamma_1 = \gamma - \beta_1\beta_2, \quad f_1(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) e^{\beta_1\xi + \beta_2\eta}. \quad (1.51)$$

Аналогичная подстановка в уравнение *параболического* типа (1.46) даёт

$$v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi + (\beta_2 + 2\nu)v_\eta + (\gamma + \mu\beta_1 + \nu\beta_2 + \nu^2)v = f(\xi, \eta) e^{-\mu\xi - \nu\eta}. \quad (1.52)$$

Используя произвольность чисел μ и ν , можно устранить слагаемые с v_η и v , полагая $\mu = (\beta_2^2/4 - \gamma)/\beta_1$ и $\nu = -\beta_2/2$. В результате получим уравнение вида

$$v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi = f_2(\xi, \eta). \quad (1.53)$$

Наконец, для уравнения *эллиптического* типа (1.47) получим

$$\begin{aligned} v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (\beta_1 + 2\mu)v_\xi + (\beta_2 + 2\nu)v_\eta + \\ + (\gamma + \mu\beta_1 + \nu\beta_2 + \mu^2 + \nu^2)v = f(\xi, \eta) e^{-\mu\xi - \nu\eta}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Полагая $\mu = -\beta_1/2$ и $\nu = -\beta_2/2$, получим уравнение вида

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma_1 v = f_3(\xi, \eta), \quad (1.55)$$

где

$$\gamma_1 = \gamma - \frac{1}{4}(\beta_1^2 + \beta_2^2). \quad (1.56)$$

Контрольные задания к главе 1

1. Докажите, что знак дискриминанта линейного уравнения второго порядка (1.12) для функции двух независимых переменных остаётся неизменным при невырожденном преобразовании (1.14).
2. Приведите уравнение (1.17) в случае его гиперболичности к виду (1.33) путём решения уравнений $\alpha_{11} = -\alpha_{22}$ и $\alpha_{12} = 0$.
3. Приведите уравнение (1.17) в случае его эллиптичности к виду (1.44) путём решения уравнений $\alpha_{11} = \alpha_{22}$ и $\alpha_{12} = 0$.
4. Покажите, что в уравнении (1.49) в общем случае нельзя выбором чисел μ и ν устранить только одно слагаемое с первой производной и слагаемое с функцией.

Глава 2

Уравнения гиперболического типа

В настоящей главе рассматриваются простейшие физические задачи, в которых возникают уравнения гиперболического типа. Выводятся уравнения малых поперечных колебаний струны и мембраны, уравнение продольных колебаний стержня. Рассмотрены основные методы решения этих уравнений. Метод распространяющихся волн, или метод Даламбера, применяется для случаев бесконечной и полуограниченной прямой, ограниченного отрезка. Приведено подробное изложение метода разделения переменных (метода Фурье), в том числе для случаев неоднородного уравнения, неоднородных граничных условий.

2.1 Уравнение малых поперечных колебаний струны

2.1.1 Вывод уравнения колебаний

Рассмотрим струну длиной ℓ . В положении равновесия струна прямолинейная, направим вдоль неё ось x . Каждая точка струны характеризуется координатой x , $0 \leq x \leq \ell$. В общем случае, чтобы описать положение струны, нужно задать в каждый момент времени t для каждой точки x вектор смещения $\vec{u}(x, t)$.

Сделаем несколько естественных предположений, существенно упрощающих задачу.

- Колебания струны лежат в одной плоскости.
- Вектор $\vec{u}(x, t)$ перпендикулярен оси $0x$ в любой момент времени t . Из этих двух предположений следует, что положение струны

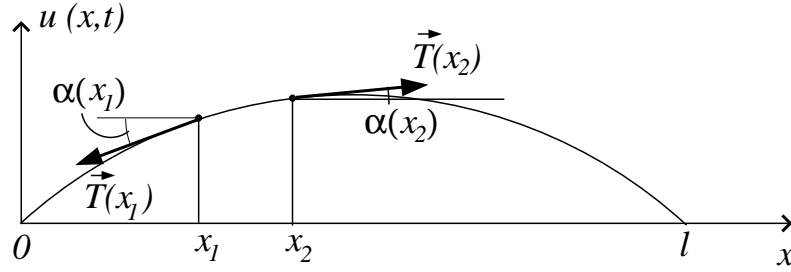


Рис. 2.1: Поперечные колебания струны. $\vec{T}(x_1)$ и $\vec{T}(x_2)$ – силы натяжения, действующие на отрезок (x_1, x_2) со стороны остальной струны

описывается одной функцией $u(x, t)$.

- Струна – это гибкая упругая нить. “Гибкая” означает, что в ней отсутствует сопротивление деформации изгиба. А отсюда следует, что вектор силы натяжения струны в каждой точке направлен по касательной к ней. То, что струна упругая, означает, что сила её натяжения определяется законом Гука и не зависит от времени.
- Колебания струны считаем малыми. Более конкретно, будем считать, что справедливо условие: $(\partial u / \partial x)^2 \ll 1$.
- Считаем, что сила натяжения струны достаточно велика, так что силой тяжести можно пренебречь. Именно при таком предположении можно считать, что струна в равновесии прямолинейная.

Рассмотрим отрезок струны (x_1, x_2) , см. рис. 2.1. Длина его дуги в момент времени t , в соответствии с условием малости колебаний, равна

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2} dx \simeq x_2 - x_1 = S.$$

Покажем, что величину силы натяжения можно считать не зависящей от x . Поскольку колебания поперечные, внешние силы и ускорения направлены перпендикулярно оси x . Проекцию на ось x имеет только сила натяжения, причём сумма проекций сил, приложенных к отрезку (x_1, x_2) , равна нулю. Тогда, в силу малости колебаний,

имеем

$$\begin{aligned} T(x_2) \cos \alpha(x_2) - T(x_1) \cos \alpha(x_1) &= 0, \\ \cos \alpha(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} \simeq 1, \\ T(x_2) &\simeq T(x_1) \equiv T_0. \end{aligned}$$

Движение отрезка (x_1, x_2) определяется уравнением изменения импульса, то есть вторым законом Ньютона:

$$\Delta \vec{P} = \vec{F} \Delta t, \quad \text{точнее} \quad \Delta \vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt. \quad (2.1)$$

Импульс участка струны (x_1, x_2) в момент времени t направлен перпендикулярно оси x и равен

$$P(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) u_t(x, t) dx,$$

где $\rho(x)$ – линейная плотность массы, то есть масса, приходящаяся на единицу длины струны. Тогда изменение импульса участка струны за время от t_1 до t_2 будет

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) [u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] dx.$$

Теперь найдём импульс силы. В неё входит, прежде всего, векторная сумма сил натяжения, действующих на отрезок (x_1, x_2) со стороны остальной струны. Для проекции на поперечное направление находим

$$T(x_2) \sin \alpha(x_2) - T(x_1) \sin \alpha(x_1),$$

где

$$\sin \alpha(x) = \frac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \simeq u_x.$$

Кроме того, может присутствовать также внешняя сила. Пусть функция $g(x, t)$ задаёт линейную плотность этой внешней силы, то есть силу, действующую на единицу длины струны.

Приравнивая изменение импульса отрезка (x_1, x_2) импульсу полной силы, получаем уравнение колебаний струны в интегральной форме:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) [u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] dx = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} g(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для перехода к дифференциальному уравнению следует предположить, что существуют вторые производные функции $u(x, t)$. Отметим, что этим мы сужаем класс исследуемых решений, так как могут существовать и решения уравнения (2.2), не имеющие вторых производных. Учитывая, что

$$\begin{aligned} u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} u_{tt}(x, t) dt, \\ u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t) &= \int_{x_1}^{x_2} u_{xx}(x, t) dx, \end{aligned}$$

получаем во всех слагаемых уравнения (2.2) двойные интегралы с одинаковыми пределами (x_1, x_2) и (t_1, t_2) . Поскольку эти пределы выбраны произвольно, равенство интегралов означает в этом случае равенство подынтегральных выражений, то есть:

$$\rho(x) u_{tt} = T_0 u_{xx} + g(x, t). \quad (2.3)$$

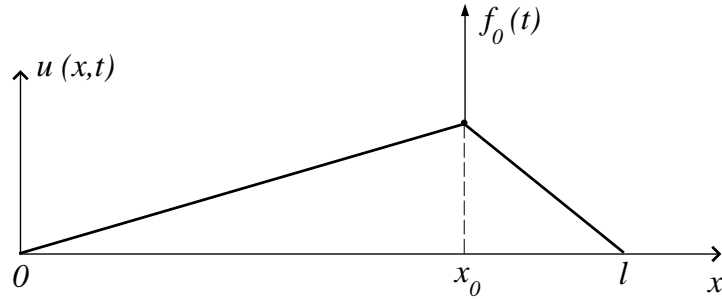
Это *уравнение колебаний струны*. Разделив на плотность, получим

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (2.4)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad f(x, t) = \frac{1}{\rho} g(x, t). \quad (2.5)$$

Функция $f(x, t)$ представляет собой удельную силу, то есть силу, действующую на единицу массы струны (по размерности это ускорение).

Рис. 2.2: Действие на струну сосредоточенной силы $f_0(t)$

Если внешних сил нет, получаем *уравнение свободных колебаний струны*:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (2.6)$$

Если вместо t ввести новую переменную $y = at$, то уравнение принимает каноническую форму уравнения гиперболического типа:

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.4) или (2.6) имеет бесчисленное множество частных решений. Для нахождения единственного решения, описывающего реальный физический процесс, необходимо задать дополнительные условия. Это *начальные условия*, представляющие собой профиль начальных смещений струны и профиль начальных скоростей:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (2.8)$$

Поскольку струна ограничена, необходимо задать условия на её концах, то есть *краевые* или *граничные условия*. Например, если концы закреплены, то:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (2.9)$$

2.1.2 Случай сосредоточенной силы

В уравнении (2.2) мы рассмотрели случай силы, распределённой вдоль струны с некоторой плотностью. Отдельную задачу представляет собой случай *сосредоточенной силы*. Пусть в точке x_0 ($x_1 < x_0 < x_2$) к струне приложена сосредоточенная сила $f_0(t)$, см. рис. 2.2. При этом в интегральном уравнении (2.2) изменится только послед-

нее слагаемое – импульс внешней силы:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) [u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] dx = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t) dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Устремим $x_1 \rightarrow x_0-0$ и $x_2 \rightarrow x_0+0$. Поскольку скорости ограничены, интеграл в левой части уравнения (2.10) обращается в ноль, что даёт:

$$\int_{t_1}^{t_2} \{T_0 [u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t)] + f_0(t)\} dt = 0,$$

Откуда, поскольку пределы интегрирования произвольны, получаем

$$u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t) = -\frac{1}{T_0} f_0(t). \quad (2.11)$$

Таким образом, в точке приложения сосредоточенной силы производная u_x имеет разрыв, вторая производная не существует, и условия перехода к дифференциальному уравнению на всём отрезке $(0, \ell)$ не выполнены. При этом задачу следует решать по отдельности для отрезков $(0, x_0)$ и (x_0, ℓ) , на которых производная u_x непрерывна, то есть можно решать дифференциальные уравнения. Затем, используя условия сопряжения: уравнение для скачка производной (2.11) и условие непрерывности струны

$$u(x_0 + 0, t) = u(x_0 - 0, t), \quad (2.12)$$

строят решение для всей струны.

2.1.3 Энергия колебаний струны

Найдём энергию колебаний струны, которая состоит из суммы кинетической и потенциальной энергий, $E = E_k + E_p$. Кинетическая энергия малого отрезка струны длиной dx , имеющего массу $dm = \rho dx$, равна

$$\frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \rho(x) dx (u_t)^2.$$

Кинетическая энергия всей струны:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho(x) [u_t(x, t)]^2 dx. \quad (2.13)$$

Потенциальная энергия струны в момент $t = t_0$, когда она имеет профиль $u(x, t_0) = u_0(x)$, равна, с обратным знаком, работе, которую совершает струна при переходе из положения равновесия $u(x, 0) = 0$ в положение $u(x, t_0) = u_0(x)$. Равнодействующая сил натяжения, приложенных к элементу струны длиной dx , равна

$$T_0 u_x(x+dx, t) - T_0 u_x(x, t) = T_0 \frac{u_x(x+dx, t) - u_x(x, t)}{dx} dx = T_0 u_{xx} dx.$$

Этот элемент проходит за время dt путь $u_t dt$. Работа, производимая всей струной за время dt , равна

$$dA = \left(\int_0^\ell T_0 u_{xx} u_t dx \right) dt.$$

Преобразуем интеграл, интегрируя его по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u_{xx} u_t dx &= \int_0^\ell u_t \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = u_t u_x \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u_x u_{xt} dx = \\ &= u_t u_x \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u_x \frac{\partial}{\partial t} u_x dx = u_t u_x \Big|_0^\ell - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\ell (u_x)^2 dx. \end{aligned}$$

Смысл внеинтегрального слагаемого легко понять. Величина $T_0 u_x|_0$ есть сила натяжения струны в точке $x = 0$, $u_t dt$ будет перемещением этого конца. Их произведение будет элементарной работой по перемещению конца струны $x = 0$ за время dt , и аналогично для конца $x = \ell$. Если же концы струны закреплены, это внеинтегральное слагаемое обратится в ноль. Таким образом, работа равна

$$dA = \left[-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\ell T_0 (u_x)^2 dx \right] dt = -dE_p.$$

Интегрируя по времени от 0 до некоторого t , найдём полную работу струны за это время. Для потенциальной энергии, которая равна работе с обратным знаком, получаем

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^\ell T_0 [u_x(x, t)]^2 dx. \quad (2.14)$$

Полная энергия колебаний струны равна

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \rho(x) [u_t(x, t)]^2 + T_0 [u_x(x, t)]^2 \right\} dx. \quad (2.15)$$

2.2 Уравнение колебаний мембраны

Мембраной называется тонкая плёнка, в которой не возникает сопротивления деформациям изгиба и сдвига. Пусть в равновесном положении мембрана расположена в плоскости xOy и занимает некоторую область D , ограниченную замкнутой кривой L . Выделим на мембране некоторый контур ℓ , окружающий участок σ . При смещении контур займёт положение ℓ' , см. рис. 2.3, $d\ell'$ – элемент длины его

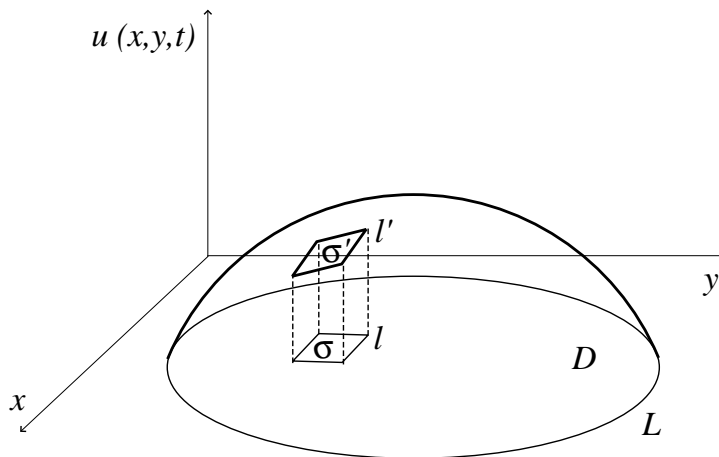


Рис. 2.3: Поперечные колебания мембраны. При её смещении участок σ , ограниченный контуром ℓ , переместится в положение σ' с границей ℓ'

дуги. *Натяжением* называется сила $\vec{T}(x, y, t)$, приложенная к контуру единичной длины. Тогда сила, приложенная к контуру длины $d\ell'$, равна $\vec{T} d\ell'$. Из того, что сопротивление деформациям изгиба

и сдвига отсутствует, следует, что вектор \vec{T} лежит в касательной плоскости и перпендикулярен элементу $d\ell'$, причём модуль вектора не зависит от направления контура. Если мысленно быстро разрезать мембрану вдоль $d\ell'$, легко представить, как такие силы будут раздвигать края разреза в стороны.

Будем считать, что натяжение мембраны достаточно велико, так что все точки колеблются в направлении, перпендикулярном плоскости xOy . Тогда смещение любой точки мембраны можно описать одной функцией $u(x, y, t)$. Для вывода уравнения колебаний рассмотрим движение произвольного участка мембраны σ , ограниченного в положении равновесия контуром ℓ . Колебания мембраны будем считать малыми, что определяется условиями: $u_x^2, u_y^2 \ll 1$. При этом площадь участка σ' , которая в положении равновесия равнялась σ , практически не изменится при смещении:

$$\sigma' = \int_{\sigma} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy \simeq \sigma. \quad (2.16)$$

Движение участка мембраны σ определяется вторым законом Ньютона:

$$\Delta \vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt. \quad (2.17)$$

Импульс участка в момент времени t направлен перпендикулярно плоскости xOy и равен

$$P(t) = \int_{\sigma} \rho(x, y) u_t(x, y, t) dx dy,$$

где $\rho(x, y)$ – поверхностная плотность массы, то есть масса, приходящаяся на единицу площади мембраны. Тогда изменение импульса участка σ за время от t_1 до t_2 будет

$$\int_{\sigma} \rho(x, y) [u_t(x, y, t_2) - u_t(x, y, t_1)] dx dy.$$

Теперь найдём импульс силы. В неё входит, прежде всего, векторная сумма сил натяжения, действующих на участок σ со стороны

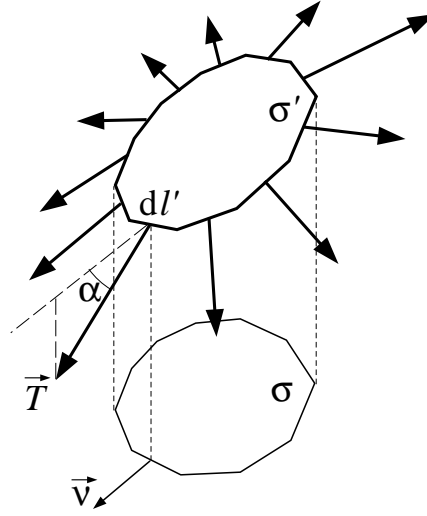


Рис. 2.4: Определение векторной суммы сил натяжения, действующих на участок σ' со стороны остальной мембраны

остальной мембраны. Поскольку все точки колеблются в перпендикулярном к плоскости xOy направлении, суммарная сила также будет направлена вдоль оси u . Проекция силы $\vec{T} dl'$, приложенной к участку контура dl' , на направление u , равна $T dl' \sin \alpha$, где α – угол между вектором \vec{T} и плоскостью xOy , см. рис. 2.4. При этом тангенс угла α равен, с учётом условия малости колебаний, производной функции u по направлению вектора \vec{v} , лежащего в плоскости xOy и перпендикулярного элементу $d\ell$. Имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \simeq \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Проекция силы натяжения, приложенной ко всему контуру ℓ' , на направление u , равна

$$F = T \oint_{\ell'} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\ell'. \quad (2.18)$$

Поскольку колебания малые, можно заменить интегрирование по контуру ℓ' в пространстве на интегрирование по контуру ℓ на плоскости.

Будем считать, что функция $u(x, y, t)$ имеет вторые производные. Тогда интеграл по замкнутому контуру от производной по нормали можно преобразовать в интеграл по области, используя *двумерную*

формулу Грина:

$$\oint_{\ell} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\ell = \int_{\sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (2.19)$$

Её легко доказать, используя хорошо известную из курса векторного анализа формулу Гаусса–Остроградского для векторного поля \vec{A} :

$$\oint_S A_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV. \quad (2.20)$$

Здесь нужно положить $\vec{A} = \operatorname{grad} u$, где функция u зависит только от переменных x и y . Тогда

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Выберем поверхность S в виде цилиндра, параллельного оси z , произвольного сечения и произвольной высоты H . Интеграл по объёму в правой части (2.20) сводится к интегралу по сечению цилиндра σ , умноженному на H . В левую часть (2.20) даёт вклад только интеграл по боковой поверхности цилиндра (поскольку на его основаниях $A_n = \pm A_z = \pm \partial u / \partial z = 0$), равный интегралу по контуру ℓ – границе области σ – умноженному на H . Сокращая на H , получаем формулу (2.19).

Вернёмся к уравнению второго закона Ньютона (2.17). Пусть на мембрану действует также некоторая внешняя сила, перпендикулярная плоскости xOy . Поверхностную плотность этой силы, то есть силу, действующую на единицу площади, обозначим $g(x, y, t)$. Тогда полная внешняя сила, действующая на участок σ , равна

$$\int_{\sigma} g(x, y, t) dx dy.$$

Подставляя эту величину, а также силу (2.18), с учётом (2.19), в уравнение (2.17), получим

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma} \rho(x, y) [u_t(x, y, t_2) - u_t(x, y, t_1)] dx dy = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\sigma} [T(u_{xx} + u_{yy}) + g(x, y, t)] dx dy. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Заменяя в левой части разность первых производных по времени через интеграл от второй производной, как это делалось при выводе уравнения колебаний струны, и учитывая произвольность областей интегрирования, получаем дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны

$$\rho(x, y) u_{tt} = T(u_{xx} + u_{yy}) + g(x, y, t). \quad (2.22)$$

Пусть $\rho(x, y) = \text{const}$. Поделив на плотность, получим

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \quad (2.23)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad f(x, y, t) = \frac{1}{\rho} g(x, y, t). \quad (2.24)$$

Функция $f(x, y, t)$ представляет собой удельную силу, то есть силу, действующую на единицу массы мембраны.

Если внешней силы нет, получаем уравнение свободных колебаний мембраны

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}). \quad (2.25)$$

Чтобы найти однозначное решение, необходимо задать начальные условия

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (2.26)$$

а также граничные условия. Например, если на границе – контуре L – мембрана закреплена, граничное условие имеет вид

$$u|_L = 0 \quad \text{при} \quad t \geq 0. \quad (2.27)$$

2.3 Уравнение продольных колебаний стержня

Рассмотрим стержень длины ℓ и постоянного сечения, способный совершать продольные колебания. Направим ось x вдоль стержня, тогда в положении равновесия каждая его точка характеризуется координатой x . Движение стержня будет описываться функцией $u(x, t)$, которая представляет собой продольное смещение в момент

времени t точки стержня, координата которой в положении равновесия была равна x . Будем предполагать, что натяжения в стержне подчиняются закону Гука.

Найдём относительное удлинение элемента стержня $(x, x + dx)$ в момент t , см. рис. 2.5. Координаты концов элемента стержня в

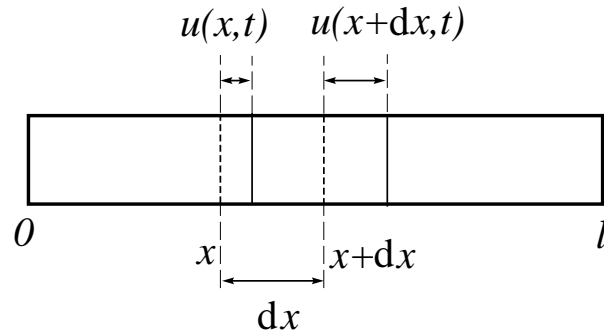


Рис. 2.5: Продольное смещение элемента стержня $(x, x + dx)$. Штриховыми линиями показаны его границы в положении равновесия стержня, сплошными – в момент времени t

момент t равны

$$x + u(x, t), \quad x + dx + u(x + dx, t).$$

Для относительного удлинения получаем

$$\begin{aligned} & \frac{[x + dx + u(x + dx, t) - x - u(x, t)] - dx}{dx} = \\ & = \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = u_x(x, t). \end{aligned}$$

Сила натяжения в данной точке стержня определяется по *закону Гука*:

$$T(x, t) = k(x) u_x(x, t), \quad (2.28)$$

где $k(x)$ – коэффициент упругости, $k(x) = S E(x)$, $E(x)$ – *модуль Юнга* в точке x , S – площадь поперечного сечения стержня.

Далее, как и для поперечных колебаний, из второго закона Нью-

тона находим

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) [u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] dx = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2) u_x(x_2, t) - k(x_1) u_x(x_1, t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} g(x, t) dx dt, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где $\rho(x)$ – линейная плотность массы стержня, $g(x, t)$ – линейная плотность продольной внешней силы. Предполагая, что вторые производные функции $u(x, t)$ и производная функции $k(x)$ существуют, приходим к дифференциальному уравнению колебаний стержня

$$\rho(x) u_{tt} = [k(x) u_x]_x + g(x, t). \quad (2.30)$$

Если стержень однородный, $k(x) = \text{const}$, $\rho(x) = \text{const}$, уравнение колебаний переписывается в виде

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (2.31)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad f(x, t) = \frac{1}{\rho} g(x, t), \quad (2.32)$$

функция $f(x, t)$ – удельная сила.

Для нахождения единственного решения необходимо задать *начальные условия* – профили начальных смещений и начальных скоростей:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2.33)$$

а также *граничные условия*. В отличие от струны, в случае продольных колебаний стержня существует более широкий набор физически обоснованных граничных условий. Основными из них являются краевые задачи первого, второго и третьего типа.

Первая краевая задача поставлена, если задан закон движения конца стержня, например:

$$u(0, t) = \mu(t), \quad (2.34)$$

где $\mu(t)$ – заданная функция времени. В частности, если конец закреплён жёстко, $\mu(t) = 0$.

Вторая краевая задача поставлена, если известна зависимость от времени силы, приложенной к концу стержня. В соответствии с (2.28) это означает, что задана производная функции u по x , например:

$$u_x(0, t) = \nu(t), \quad (2.35)$$

в частности, в случае свободного конца натяжение стержня вблизи него отсутствует, то есть $\nu(t) = 0$.

Третья краевая задача формулируется в случае упругого закрепления, при котором конец стержня может перемещаться, но возникает упругая сила, стремящаяся вернуть сместившийся конец в прежнее положение. Например, для точки ℓ :

$$k u_x(\ell, t) = -\alpha u(\ell, t),$$

или

$$u_x(\ell, t) = -h u(\ell, t), \quad \left(h = \frac{\alpha}{k} \right). \quad (2.36)$$

Если точка, относительно которой имеется упругое закрепление, перемещается по заданному закону $\theta(t)$, третья краевая задача формулируется в более общем виде:

$$u_x(\ell, t) = -h [u(\ell, t) - \theta(t)]. \quad (2.37)$$

Перечисленные краевые задачи принято считать основными. Однако существуют и другие задачи. Укажем на ещё одну возможность, которая будет рассматриваться в следующем параграфе. В случае, если процесс колебаний изучается на ограниченном участке струны (стержня), концы которой находятся достаточно далеко, и в течение сравнительно небольшого интервала времени, так что влияние концов ещё не успеет проявиться, можно считать струну бесконечной. При этом граничные условия не формулируются. В случае же, если рассматриваемый участок струны находится вблизи от одного её конца, но далеко от другого, можно говорить о задаче для полубесконечной струны.

2.4 Метод распространяющихся волн. Формула Даламбера

Начнём анализ со случая неограниченной струны. Уравнение её свободных колебаний

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (2.38)$$

определенное на интервале $-\infty < x < +\infty$, следует дополнить начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (2.39)$$

Используя результаты главы 1, преобразуем уравнение к канонической форме. Сравнивая (2.38) с уравнением (1.13), видим, что $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -a^2$, то есть дискриминант (1.19) равен: $\Delta = a^2$, следовательно, уравнение имеет гиперболический тип. Уравнения характеристик (1.28) принимают вид

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0, \quad (2.40)$$

то есть характеристики являются прямыми

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2. \quad (2.41)$$

Переходя к новым переменным

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at, \quad (2.42)$$

получаем уравнение в канонической форме

$$u_{\xi\eta} = 0. \quad (2.43)$$

Его решение легко находится. Переписывая уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial \eta} u_\xi = 0,$$

получаем, что под знаком производной стоит функция, не зависящая от переменной η , то есть

$$u_\xi(\xi, \eta) = f(\xi).$$

Интегрируя это уравнение по ξ и учитывая, что “постоянная” интегрирования в действительности может быть функцией переменной

η , получаем общее решение или общий интеграл уравнения (2.43) в виде

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta). \quad (2.44)$$

Возвращаясь к переменным x, t , записываем общее решение уравнения (2.38)

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at). \quad (2.45)$$

Подставим начальные условия

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= -a f_1'(x) + a f_2'(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

Интегрируя второе уравнение, получаем систему для функций $f_1(x)$, $f_2(x)$:

$$\begin{aligned} f_2(x) - f_1(x) &= \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\bar{x}) d\bar{x} + C, \\ f_2(x) + f_1(x) &= \varphi(x), \end{aligned} \quad (2.46)$$

откуда находим:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\bar{x}) d\bar{x} - \frac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\bar{x}) d\bar{x} + \frac{C}{2}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Подставляя эти функции в общее решение (2.45), окончательно получаем

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (2.48)$$

Это выражение называется *формулой Даламбера*.

Функция $u(x, t)$, определяемая формулой (2.45), описывает процесс распространения начального возмущения струны – начального смещения и начальной скорости. Фиксируя момент времени $t = t_0$,

получаем функцию $u(x, t_0)$, описывающую профиль струны в момент t_0 . С другой стороны, фиксируя координату $x = x_0$, получаем функцию $u(x_0, t)$, описывающую процесс движения в точке x_0 .

Рассмотрим физический смысл слагаемых в общем решении (2.45). Предположим, что в момент времени $t = 0$ некоторый наблюдатель начинает движение из точки $x = 0$ вдоль оси x с постоянной скоростью a . В системе отсчёта K' , связанной с этим наблюдателем, координата x' равна

$$x' = x - at.$$

В этой системе отсчёта функция вида $u_1(x, t) = f_1(x - at)$ равна $u_1(x', t) = f_1(x')$, следовательно, наблюдатель будет видеть неподвижный профиль. Таким образом, первое слагаемое в формуле (2.45), то есть функция $u_1(x, t) = f_1(x - at)$, представляет собой волну неизменного профиля, движущуюся со скоростью a в положительном направлении оси x . Очевидно, что второе слагаемое $f_2(x + at)$ есть волна, движущаяся со скоростью a в отрицательном направлении оси x .

Для наглядного изображения процесса распространения одномерных волн удобно использовать так называемую *фазовую плоскость* (x, t) .

Рассмотрим функцию $f_1(x - at)$, которая при $t = 0$ отлична от нуля только в интервале (x_1, x_2) . Вспомним, что исходное уравнение (2.38) имеет два семейства характеристик (2.41). Таким образом, функция

$f_1(x - at)$ постоянна вдоль характеристик $x - at = \text{const}$, см. рис. 2.6, и описывает волну, распространяющуюся вдоль оси x , при этом характеристики $x - at = x_2$ и $x - at = x_1$ описывают движение переднего и заднего фронтов этой волны.

Теперь рассмотрим фиксированную точку фазовой плоскости $M(x_0, t_0)$ и проведём через неё обе характеристики

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0.$$

Они пересекут ось $t = 0$ в точках P и Q , см. рис. 2.7.

$$x_P = x_0 - at_0, \quad x_Q = x_0 + at_0.$$

Треугольник PQM есть так называемый *характеристический треугольник* на фазовой плоскости. Из формулы (2.48) можно видеть,

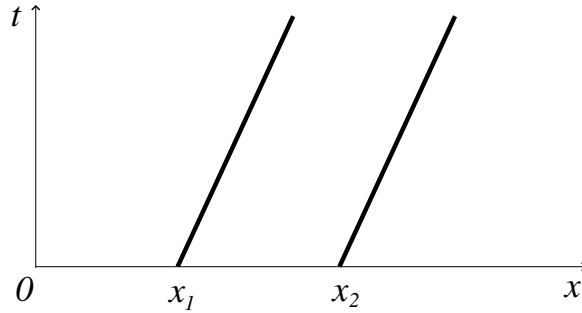


Рис. 2.6: Характеристики переднего и заднего фронтов волны, распространяющейся вдоль оси x

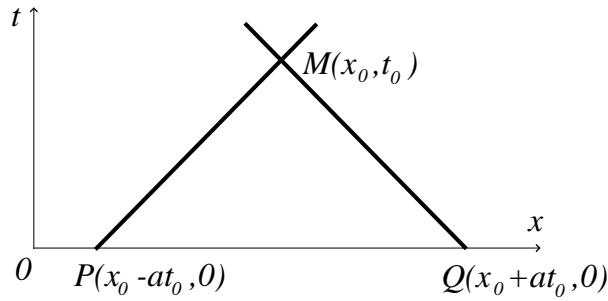


Рис. 2.7: Характеристический треугольник на фазовой плоскости

что значение функции $u(x_0, t_0)$ в точке M определяется значениями начальной функции φ в точках P и Q и начальной скорости ψ на отрезке PQ :

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{PQ} \psi(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (2.49)$$

Таким образом, начальные данные вне отрезка PQ не влияют на значение функции $u(x, t)$ в точке $M(x_0, t_0)$. Если начальные условия заданы не на всей бесконечной прямой, а на отрезке PQ , они однозначно определяют решение внутри характеристического треугольника с основанием PQ . Рассмотрим два простых примера начальных условий.

Пример 1

Пусть начальная скорость равна нулю, $\psi(x) \equiv 0$, тогда из формулы (2.48) получим решение в виде:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}.$$

Оно представляет собой сумму бегущих волн, начальная форма каждой из которых равна $\frac{1}{2}\varphi$.

В случае, если $\varphi(x) \neq 0$ только на отрезке (x_1, x_2) , можно выделить шесть областей на фазовой плоскости, см. рис. 2.8, где ре-

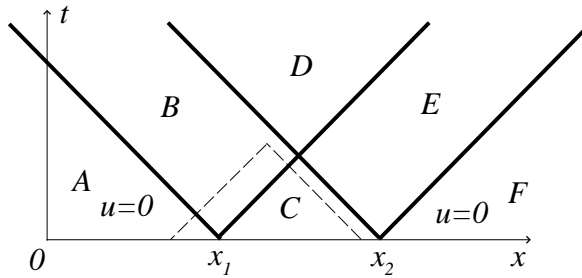


Рис. 2.8: Области на фазовой плоскости, соответствующие различным решениям

шения будут различными. Помещая вершину характеристического треугольника в каждую из областей, будем, в соответствии с формулой (2.49), получать решение, полностью определяемое значениями функции $\varphi(x)$ в вершинах при основании треугольника. Очевидно, что в областях A и F решение будет тождественно равно нулю. В области D решение также равно нулю. В областях B, C, E получаем следующие ненулевые решения:

$$u_C(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2},$$

$$u_B(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x + at), \quad u_E(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x - at).$$

Пример 2

Пусть теперь равно нулю начальное смещение, $\varphi(x) \equiv 0$, а начальная скорость постоянна на отрезке (x_1, x_2) , $\psi(x) = \psi_0$, и рав-

на нулю за его пределами. Тогда, как видно из рис. 2.8 и формулы (2.49), получим следующие ненулевые решения:

$$\begin{aligned}
 u_C(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_0 \, d\bar{x} = \psi_0 t, \\
 u_B(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_{x_1}^{x+at} \psi_0 \, d\bar{x} = \frac{1}{2a} (x + at - x_1) \psi_0, \\
 u_E(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x_2} \psi_0 \, d\bar{x} = \frac{1}{2a} (x_2 - x + at) \psi_0, \\
 u_D(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_{x_1}^{x_2} \psi_0 \, d\bar{x} = \frac{1}{2a} (x_2 - x_1) \psi_0 = \text{const}.
 \end{aligned}$$

2.5 Метод распространяющихся волн на полуграниченной прямой

Будем искать решение уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (2.50)$$

при $0 \leq x < +\infty$, удовлетворяющее граничному условию

$$u(0, t) = \mu(t) \quad \left(\text{или} \quad u_x(0, t) = \nu(t) \right), \quad t \geq 0, \quad (2.51)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (2.52)$$

Вначале рассмотрим случаи однородных граничных условий, $u(0, t) = 0$, то есть струну с закреплённым концом, и $u_x(0, t) = 0$, то есть струну со свободным концом.

Вернёмся к задаче о бесконечной струне и докажем две почти очевидные теоремы.

Теорема 1

Если для бесконечной струны начальные данные являются нечётными функциями относительно точки $x = 0$, то решение в этой точке будет тождественно равно нулю при любом t , $u(0, t) \equiv 0$.

Итак:

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \psi(-x) = -\psi(x).$$

Тогда, в соответствии с формулой (2.48), получаем

$$u(0, t) = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\bar{x}) d\bar{x} = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2

Если для бесконечной струны начальные данные являются чётными функциями относительно точки $x = 0$, то частная производная по x от решения в этой точке будет тождественно равна нулю при любом t , $u_x(0, t) \equiv 0$.

Имеем:

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \psi(-x) = \psi(x).$$

Дифференцируя выражение (2.48) по x ,

$$u_x(x, t) = \frac{\varphi'(x - at) + \varphi'(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} [\psi(x + at) - \psi(x - at)],$$

и затем подставляя $x = 0$, получим, с учётом того, что производная чётной функции есть функция нечётная:

$$u_x(0, t) = \frac{\varphi'(-at) + \varphi'(at)}{2} + \frac{1}{2a} [\psi(at) - \psi(-at)] = 0.$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим задачу о движении полубесконечной струны с закреплённым концом, $u(0, t) = 0$. Распространим задачу на всю бесконечную область значений x , продолжая начальные условия нечётным образом на отрицательную бесконечную полуось. Таким

образом, мы будем искать функцию $\tilde{u}(x, t)$, описывающую движение бесконечной струны и подчиняющуюся начальным условиям:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, 0) &= \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \\ \tilde{u}_x(x, 0) &= \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Записывая, в соответствии с формулой Даламбера (2.48), решение задачи для бесконечной струны

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{\tilde{\varphi}(x - at) + \tilde{\varphi}(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\bar{x}) d\bar{x}, \quad (2.53)$$

видим, что в области $x > 0$ оно удовлетворяет всем условиям исходной задачи для полубесконечной струны. При этом, в силу теоремы 1, граничное условие $u(0, t) = 0$ выполняется автоматически.

Возвращаясь к функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$ начальных условий исходной задачи, записываем решение в двух областях фазовой плоскости.

В области $x - at > 0$, то есть $t < x/a$, где влияние границы ещё не проявляется, имеем

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (2.54)$$

В области $x - at < 0$, то есть $t > x/a$, отбрасывая равный нулю интеграл от нечётной функции $\tilde{\psi}(x)$ в симметричных пределах $(x - at, at - x)$, получаем

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) - \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (2.55)$$

Аналогично в задаче о полубесконечной струне со свободным концом продолжим начальные условия, теперь уже чётным образом, на

отрицательную бесконечную полуось:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(x) &= \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \\ \tilde{\psi}(x) &= \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Для функции $\tilde{u}(x, t)$, описывающей движение бесконечной струны, мы имеем то же выражение (2.53). В области $x > 0$ оно удовлетворяет всем условиям исходной задачи для полубесконечной струны. В силу теоремы 2, граничное условие $u_x(0, t) = 0$ выполнено.

Вернёмся к функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$ начальных условий исходной задачи и запишем решение в тех же двух областях фазовой плоскости. В области $t < x/a$ влияние границы ещё не проявляется, здесь решение будет иметь тот же вид (2.54).

В области $t > x/a$ получаем

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{at-x} \psi(\bar{x}) d\bar{x} + \int_0^{x+at} \psi(\bar{x}) d\bar{x} \right], \quad (2.56)$$

где первый из интегралов получен заменой пределов интегрирования $(x - at, 0)$ чётной функции $\tilde{\psi}(x)$ на $(0, at - x)$.

Мы рассмотрели случаи однородных граничных условий. Решение задачи с неоднородным граничным условием (2.51) и начальными условиями (2.52) строится в виде суммы, каждое из слагаемых которой удовлетворяет одному из условий, а другое условие берётся нулевым.

Рассмотрим задачу с нулевыми начальными и заданным граничным условием

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= 0, & u_t(x, 0) &= 0 & (x > 0), \\ u(0, t) &= \mu(t) & (t > 0).\end{aligned} \quad (2.57)$$

Очевидно, что граничный режим будет возбуждать волну, распространяющуюся вдоль оси x со скоростью a . А вот волна, которая бы двигалась против оси x , возникнуть не может. Поэтому решение задачи следует искать в виде

$$u(x, t) = f(x - at). \quad (2.58)$$

Подставляя граничное условие в точке $x = 0$, находим функцию f :

$$u(0, t) = f(-at) = \mu(t), \quad f(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right).$$

Итак

$$u(x, t) = \mu\left(-\frac{x - at}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right). \quad (2.59)$$

Эта функция определена только для значений $t - x/a \geq 0$, то есть $x - at \leq 0$. Чтобы определить $u(x, t)$ при $x - at > 0$, необходимо дополнительно задать граничный режим при $t < 0$, например:

$$u(0, t) = \mu(t) = \begin{cases} \mu(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.60)$$

Как уже отмечалось, если наряду с граничным условием вида (2.60) имеются ненулевые начальные условия, то общим решением задачи будет сумма выражений (2.54), (2.55) и (2.59).

2.6 Метод распространяющихся волн на ограниченном отрезке

Ищем решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (2.61)$$

при $0 \leq x \leq \ell$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (2.62)$$

Вначале рассмотрим однородные граничные условия вида

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad (2.63)$$

которые соответствуют струне, закреплённой на обоих концах. Как и в случае полуограниченной прямой, будем продолжать функции начальных условий за пределы интервала $(0, \ell)$. Введём функции $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, которые внутри интервала $(0, \ell)$ совпадают с начальными условиями (2.62):

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= \varphi(x), \\ \tilde{\psi}(x) &= \psi(x), \end{aligned} \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (2.64)$$

Для того, чтобы обеспечить нулевое условие (2.63) в точке $x = 0$, продолжим функции нечётным образом на область отрицательных значений x :

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(x) &= -\varphi(-x), \\ \tilde{\psi}(x) &= -\psi(-x),\end{aligned}\quad -\ell \leq x \leq 0. \quad (2.65)$$

Нечётное продолжение следует сделать и на интервал правее точки $x = \ell$, чтобы в ней также обеспечить нулевое условие:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(x) &= -\varphi(2\ell - x), \\ \tilde{\psi}(x) &= -\psi(2\ell - x),\end{aligned}\quad \ell \leq x \leq 2\ell, \quad (2.66)$$

и так далее, то есть функции $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ следует распространить на всю бесконечную ось. Сравнивая (2.65) и (2.66), видим, что функции $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ должны быть периодическими с периодом 2ℓ . Решение задачи, обобщённой на бесконечную струну, описывается формулой Даламбера (2.53). Затем нужно строить решение в “физической области” – на интервале $(0, \ell)$, возвращаясь от функций $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ к функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$, аналогично тому, как это проделано в предыдущем параграфе для полубесконечной струны.

На рис. 2.9 методом характеристик на фазовой плоскости проиллюстрировано построение решения для случая, когда начальное смещение отлично от нуля на некотором отрезке струны, а начальные скорости равны нулю. Из рисунка видно, что в момент времени $t = T$ в точности воспроизводится начальное состояние. Таким образом, движение струны будет периодическим во времени с периодом $T = 2\ell/a$.

В случае неоднородного граничного условия, например:

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(\ell, t) = 0 \quad (t > 0), \quad (2.67)$$

и при нулевых начальных условиях решение, полученное в предыдущем параграфе для полубесконечной струны:

$$u_0(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

не будет удовлетворять нулевому граничному условию в точке $x = \ell$. Легко видеть, что данное условие будет выполняться, если рассмотреть нечётное продолжение граничного условия за пределы интервала $(0, \ell)$ и добавить условие

$$u(2\ell, t) = -\mu(t),$$

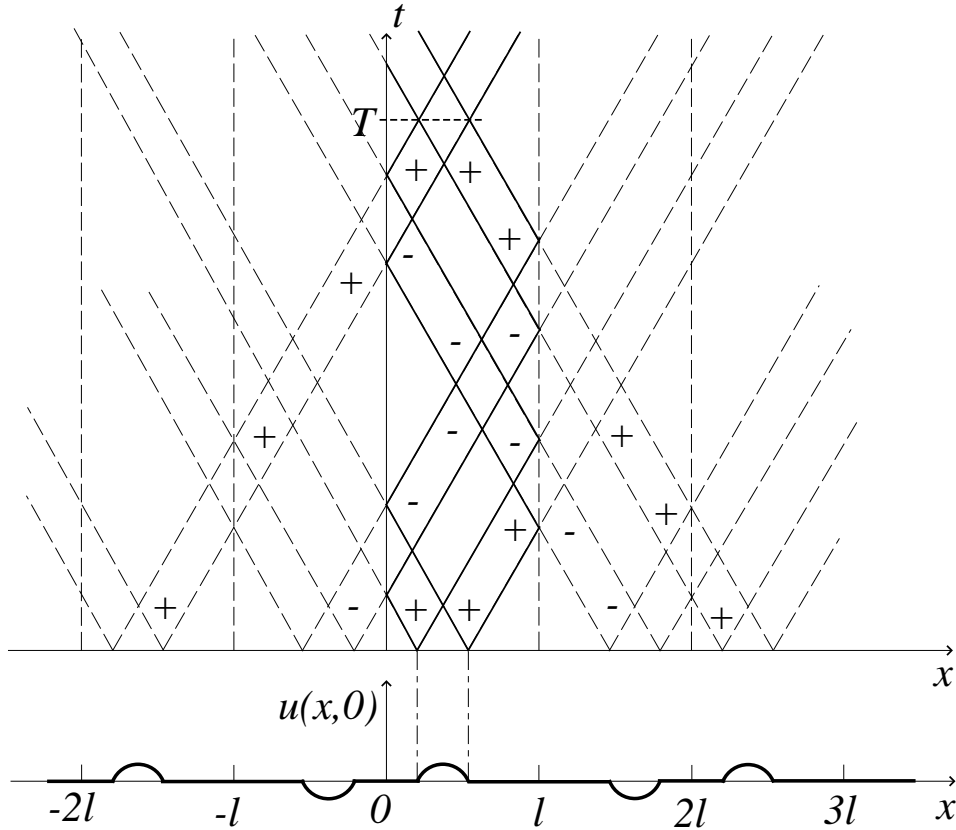


Рис. 2.9: Построение решения для ограниченного отрезка методом Даламбера. Внизу – начальное смещение и его продолжения за пределы интервала $(0, \ell)$. Вверху – характеристики на фазовой плоскости. Плюсы и минусы показывают знак смещения в соответствующей волне. В момент времени $t = T$ воспроизводится начальное состояние

которое будет создавать две волны, причём нас интересует только волна, движущаяся влево, в сторону “физической области”:

$$u_{2\ell}(x, t) = -\mu \left(t - \frac{2\ell}{a} + \frac{x}{a} \right),$$

при этом $u_0(\ell, t) + u_{2\ell}(\ell, t) = 0$. Затем, чтобы сохранить условие (2.67) в точке $x = 0$, необходимо, переходя к обобщению на бесконечную струну, добавить

$$u(-2\ell, t) = \mu(t),$$

и так далее.

Таким образом, описание колебаний ограниченной струны методом распространяющихся волн является достаточно громоздким. К счастью, для этой задачи существует намного более эффективный метод разделения переменных, или метод Фурье.

2.7 Метод разделения переменных в уравнениях гиперболического типа

Ищем решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (2.68)$$

на интервале $0 \leq x \leq \ell$, с однородными граничными условиями

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad (2.69)$$

соответствующими струне, закреплённой на обоих концах, и начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (2.70)$$

Поскольку уравнение является линейным и однородным, сумма частных решений также будет решением.

Поиск частного решения

Рассмотрим вспомогательную задачу. Будем искать частное решение уравнения (2.68) с однородными граничными условиями (2.69), но без накладывания начальных условий (они будут относиться только к сумме всех частных решений), нетривиальное, то есть не равное тождественно нулю, и представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (2.71)$$

При этом граничные условия (2.69)

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0, \quad u(\ell, t) = X(\ell) T(t) = 0$$

ограничивают именно координатную функцию:

$$X(0) = X(\ell) = 0, \quad (2.72)$$

поскольку другая возможность, $T(t) = 0$, ведёт к тривиальному решению.

Подставляя решение (2.71) в уравнение (2.68), разделим переменные и преобразуем полученное уравнение к виду

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (2.73)$$

Поскольку x и t – независимые переменные, равенство левой и правой частей может удовлетворяться, только если они равны некоторой константе:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda. \quad (2.74)$$

Таким образом, для каждой из функций мы получили своё обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (2.75)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (2.76)$$

Начнём с решения уравнения (2.75) с граничными условиями (2.72). Мы имеем пример задачи на собственные значения, или *задачи Штурма–Лиувилля*:

Найти значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (2.75).

Эти значения называются *собственными значениями задачи*, а соответствующие решения уравнения – *собственными функциями*. Поскольку параметр λ произвольный, рассмотрим различные возможности.

Случай $\lambda < 0$. Общее решение уравнения (2.75) при этом имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}. \quad (2.77)$$

Из граничных условий находим

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 + C_2 = 0, & C_2 &= -C_1, \\ X(\ell) &= C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\ell} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = C_1 \left(e^{\sqrt{-\lambda}\ell} - e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} \right) = 0, \end{aligned}$$

и поскольку выражение в скобках не обращается в ноль при $\lambda \neq 0$, получаем $C_1 = 0$, $X(x) \equiv 0$, то есть существует только тривиальное решение.

Случай $\lambda = 0$. Общее решение уравнения (2.75)

$$X(x) = C_1 x + C_2. \quad (2.78)$$

Из граничных условий находим

$$X(0) = C_2 = 0, \quad X(\ell) = C_1 \ell = 0,$$

то есть опять имеется только тривиальное решение.

Случай $\lambda > 0$. Общее решение уравнения (2.75)

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x). \quad (2.79)$$

Из граничных условий находим

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 = 0, \\ X(\ell) &= C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0, \end{aligned}$$

и поскольку $C_2 \neq 0$, иначе мы снова получили бы тривиальное решение, то

$$\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0, \quad \sqrt{\lambda}\ell = \pi n, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, получаем набор *собственных значений* задачи

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2, \quad (2.80)$$

которым соответствуют *собственные функции*

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{\ell}. \quad (2.81)$$

Найденным собственным значениям (2.80) соответствуют решения уравнения (2.76):

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n a t}{\ell} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{\ell}. \quad (2.82)$$

Окончательно, решение вспомогательной задачи (2.71) получаем в виде

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n a t}{\ell} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{\ell} \right) \sin \frac{\pi n x}{\ell}. \quad (2.83)$$

Построение общего решения

Возвращаемся к исходной задаче. Как уже отмечалось, для линейного и однородного уравнения любая сумма частных решений

также будет решением. Поскольку n – произвольный целочисленный параметр, общее решение получим, просуммировав по всем n :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi nat}{\ell} + B_n \sin \frac{\pi nat}{\ell} \right) \sin \frac{\pi nx}{\ell}. \quad (2.84)$$

Потребуем, чтобы решение (2.84) удовлетворяло начальным условиям (2.70):

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi nx}{\ell}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi na}{\ell} \sin \frac{\pi nx}{\ell}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Формулы (2.85) представляют собой не что иное, как разложение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье. Как известно из теории рядов Фурье, произвольная кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая функция, заданная на интервале $0 \leq x \leq \ell$, может быть разложена в ряд вида (2.85). Таким образом, для коэффициентов ряда (2.84) находим

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi, \\ B_n &= \frac{2}{\pi na} \int_0^{\ell} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Мы провели формальное построение решения исходной задачи (2.68). Строгое обоснование того, что ряд (2.84) является решением, состоит в доказательстве того, что этот бесконечный ряд можно дважды дифференцировать. Другими словами, необходимо доказать, что ряды, получаемые однократным и двукратным почленным дифференцированием ряда (2.84), сходятся. Как известно из теории рядов Фурье, для этого достаточно доказать сходимость так называемых *мажорантных рядов*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (|A_n| + |B_n|), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|).$$

В свою очередь, достаточными (но не необходимыми) условиями сходимости этих рядов являются следующие ограничения, накладываемые на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

1. Функция $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные до 2-го порядка включительно и кусочно-непрерывную 3-ю производную, причём

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(\ell) = 0.$$

2. Функция $\psi(x)$ непрерывна вместе с первой производной, имеет кусочно-непрерывную 2-ю производную, кроме того:

$$\psi(0) = \psi(\ell) = 0.$$

Физическая интерпретация решения

Запишем общий член суммы ряда (2.84) в виде

$$u_n(x, t) = \alpha_n \cos\left(\frac{\pi n a}{\ell} (t + \tau_n)\right) \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \quad (2.87)$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \frac{\pi n a}{\ell} \tau_n = -\operatorname{arctg} \frac{B_n}{A_n}.$$

Выбрав некоторую точку струны x_0 , получим для неё из (2.87) закон движения

$$u_n(x_0, t) = C_n(x_0) \cos\left(\frac{\pi n a}{\ell} (t + \tau_n)\right),$$

то есть точка совершает гармонические колебания с частотой ω_n и амплитудой $C_n(x_0)$:

$$\omega_n = \frac{\pi n a}{\ell}, \quad C_n(x_0) = \alpha_n \sin \frac{\pi n x_0}{\ell}.$$

Такое движение струны называется стоячей волной. Точки, для которых

$$\frac{\pi n x_0}{\ell} = \pi m, \quad \text{то есть} \quad x_0 = \frac{m}{n} \ell \quad (m = 1, 2, \dots, n - 1),$$

называются *узлами* стоячей волны, в них $C_n(x_0) = 0$. Точки, где $\sin(\pi n x_0 / \ell) = \pm 1$, называются *пучностями*.

Значения частоты $\omega_n = \pi n a / \ell$ называются *собственными частотами* колебаний струны. Вспоминая, что для поперечных колебаний

струны $a^2 = T/\rho$, получаем, что собственные частоты струны длины ℓ с линейной плотностью ρ и натяжением T равны

$$\omega_n = \frac{\pi n}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (2.88)$$

Вычислим энергию колебаний струны. Подставляя общее решение (2.84) в выражение (2.15) и интегрируя, получим, в силу ортогональности синусов:

$$\int_0^\ell \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} \sin \frac{\pi m \xi}{\ell} d\xi = \frac{\ell}{2} \delta_{nm},$$

где δ_{nm} – символ Кронеккера, что полная энергия разбивается на сумму энергий отдельных *гармоник*, то есть колебаний с определёнными частотами ω_n . Для энергии n -ой стоячей волны, то есть n -ой гармоники, находим

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\rho(x) \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \\ &= \rho \omega_n^2 \ell \frac{\alpha_n^2}{4} = \omega_n^2 M \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

здесь $M = \rho \ell$ – полная масса струны.

Проведённый анализ является основой для теории звучания струнных музыкальных инструментов. Колебание с наименьшей частотой

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

называется *основным тоном* струны, остальные колебания с частотами, кратными ω_1 , называются *обертонами*. Понятие *тембра* звука связано с уровнем присутствия обертонов, который зависит от распределения полной энергии колебаний струны по гармоникам (2.89).

2.8 Неоднородное уравнение гиперболического типа

В задаче о колебаниях струны под действием распределённой силы мы получили неоднородное уравнение (2.4). Вначале рассмотрим

более простой частный случай, когда внешняя сила не зависит от времени.

2.8.1 Случай стационарной неоднородности

Ищем решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x) \quad (2.90)$$

на интервале $0 \leq x \leq \ell$, с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2.91)$$

и с однородными граничными условиями

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0. \quad (2.92)$$

Из-за неоднородности уравнения (2.90) разделить в нём переменные не удастся. Будем искать решение в виде суммы двух функций:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x), \quad (2.93)$$

каждая из которых подчиняется нулевому граничному условию вида (2.92). Функция $w(x)$ называется стационарной частью решения. Потребуем, чтобы функция $v(x, t)$ удовлетворяла *однородному* уравнению

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}. \quad (2.94)$$

Начальные условия для неё находим из (2.91) и (2.93):

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= u(x, 0) - w(x) = \varphi(x) - w(x), \\ v_t(x, 0) &= u_t(x, 0) = \psi(x). \end{aligned} \quad (2.95)$$

Итак, для функции $v(x, t)$ мы получили задачу, которую можно решать методом разделения переменных.

Для того, чтобы найти уравнение для функции $w(x)$, подставим (2.93) в уравнение (2.90) и вычтем уравнение (2.94). В результате получаем уравнение

$$a^2 w_{xx} + f(x) = 0, \quad (2.96)$$

которое решается двукратным интегрированием, с учётом граничных условий $w(0) = w(\ell) = 0$. Подставляя найденную функцию $w(x)$ в начальное условие (2.95), можем найти функцию $v(x, t)$.

2.8.2 Общий случай неоднородного уравнения

В случае, если распределённая сила меняется со временем, имеем уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t). \quad (2.97)$$

Пусть начальные и граничные условия имеют вид (2.91), (2.92).

Будем искать решение в виде разложения по собственным функциям однородной задачи:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n x}{\ell}. \quad (2.98)$$

Представим функцию $f(x, t)$ и функции начальных условий в виде таких же рядов Фурье:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n x}{\ell}, & f_n(t) &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi, t) \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi, \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}, & \varphi_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi, \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}, & \psi_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Подставляя (2.98) и фурье-разложение функции $f(x, t)$ в уравнение (2.97), получаем уравнение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n''(t) + \omega_n^2 u_n(t) - f_n(t)] \sin \frac{\pi n x}{\ell} = 0,$$

где $\omega_n = \pi n a / \ell$. В силу ортогональности синусов каждый из коэффициентов ряда равен нулю, то есть для каждой из функций $u_n(t)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_n''(t) + \omega_n^2 u_n(t) = f_n(t). \quad (2.100)$$

Подставляя (2.98) в начальные условия, с учётом (2.99) получаем условия для функций $u_n(t)$

$$u_n(0) = \varphi_n, \quad u_n'(0) = \psi_n,$$

которые полностью определяют решения уравнений (2.100).

2.8.3 Неоднородные граничные условия

Ограничимся рассмотрением неоднородной первой краевой задачи. Требуется найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (2.101)$$

на интервале $0 \leq x \leq \ell$, с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2.102)$$

и с неоднородными граничными условиями

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(\ell, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0. \quad (2.103)$$

Введём вместо $u(x, t)$ новую неизвестную функцию $v(x, t)$, определяемую соотношением

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t), \quad (2.104)$$

где $U(x, t)$ – какая-то функция, которую будем полагать известной. В действительности позже мы её выберем сами. Уравнение для функции $v(x, t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{xx} + \tilde{f}(x, t), \\ \tilde{f}(x, t) &= f(x, t) - U_{tt} + a^2 U_{xx}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Начальные и граничные условия для функции $v(x, t)$ записываются в виде

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0), \\ v_t(x, 0) &= \tilde{\psi}(x) = \psi(x) - U_t(x, 0), \\ v(0, t) &= \tilde{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t), \\ v(\ell, t) &= \tilde{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(\ell, t). \end{aligned}$$

А вот теперь выберем функцию $U(x, t)$ так, чтобы граничные условия для функции $v(x, t)$ были однородными:

$$\tilde{\mu}_1(t) = 0, \quad \tilde{\mu}_2(t) = 0,$$

то есть условия для выбора функции $U(x, t)$ такие

$$U(0, t) = \mu_1(t), \quad U(\ell, t) = \mu_2(t).$$

Для этого достаточно взять простейший случай, с линейной зависимостью от x :

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{\ell} [\mu_2(t) - \mu_1(t)] . \quad (2.106)$$

Таким образом, для функции $v(x, t)$ мы имеем неоднородное уравнение (2.105) с однородными граничными условиями. Методика решения такой задачи была изложена ранее.

Контрольные задания к главе 2

1. Поставьте задачу о колебаниях струны, закреплённой на концах $x = 0$ и $x = \ell$, к которой в точках x_1 и x_2 приложены сосредоточенные силы $f_1(t)$ и $f_2(t)$.
2. Выведите двумерную формулу Грина (2.19), выражая производную по направлению через градиент, вектор нормали к контуру $\vec{\nu}$ через касательный вектор $\vec{\tau}$, $\vec{\nu} = (\vec{\tau} \times \vec{n}_z)$, и используя формулу Стокса.
3. Поставьте задачу о продольных колебаниях стержня в случае, если коэффициент упругости $k(x)$ представляет собой ступенчатую функцию, $k(x) = k_1$ при $x < x_0$ и $k(x) = k_2$ при $x > x_0$.

Глава 3

Уравнения параболического типа

В настоящей главе рассматриваются основные уравнения параболического типа, описывающие физические процессы теплопроводности и диффузии. Выводятся одномерное и трёхмерное уравнения теплопроводности и диффузии. Рассмотрены основные типы краевых задач для параболических уравнений. Приведена методика решения уравнений методом разделения переменных для ограниченного отрезка, неограниченной прямой. Дано определение функции мгновенного точечного источника, исследован её физический смысл. Получен явный вид функций источника для ограниченного отрезка, неограниченной прямой. Получено решение неоднородного уравнения теплопроводности через функцию мгновенного точечного источника.

3.1 Одномерное уравнение теплопроводности

Рассмотрим распределение температуры в тонком стержне, окружённом теплоизолирующей оболочкой. Понятие “тонкий” будет означать, что в пределах каждого сечения температуру мы будем считать постоянной. Направляя ось x вдоль стержня, мы сможем описывать температуру как функцию только одной координаты x и времени t , $u(x, t)$.

Как показывает опыт, если поддерживать температуру на концах стержня постоянной, u_1 в точке $x = 0$ и u_2 в точке $x = \ell$, то через некоторое время в стержне установится стационарное распределение

температуры по линейному закону:

$$u(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{\ell}.$$

При этом от более нагретого конца к менее нагретому будет перетекать тепло. Количество теплоты dQ , проходящее через сечение S стержня за время dt в положительном направлении оси x будет пропорционально перепаду температур, при этом можно записать

$$dQ = -k \frac{u_2 - u_1}{\ell} S dt = -k \frac{\partial u}{\partial x} S dt, \quad (3.1)$$

где k – коэффициент теплопроводности, зависящий от свойств материала. Знак “минус” показывает направление переноса тепла – если температура повышается с ростом x , поток тепла будет против оси x .

Найдём уравнение для функции $u(x, t)$. При неравномерном распределении температуры в стержне существуют тепловые потоки. Тепло, проходящее через сечение стержня в точке x в положительном направлении оси x за время от момента t до $t+dt$, в соответствии с (3.1), можно записать в виде

$$dQ = q S dt, \quad q = -k(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.2)$$

где q есть плотность потока тепла, то есть количество тепла, проходящее через единичную площадку за единицу времени. Заметим, что при переходе к трёхмерной задаче плотность потока тепла будет векторной величиной

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} u, \quad (3.3)$$

и количество переносимого тепла будет вычисляться как поток вектора \vec{q} . Соотношение (3.3) называется законом Фурье.

Количество тепла, проходящее через сечение стержня в точке x за конечный отрезок времени (t_1, t_2) в положительном направлении оси x найдём интегрированием выражения (3.2)

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt. \quad (3.4)$$

Из школьного курса физики мы помним, что количество теплоты, необходимое для нагревания однородного тела от температуры u_1 до температуры u_2 , равно

$$\Delta Q = c m (u_2 - u_1) = c \rho V (u_2 - u_1),$$

где c, ρ – удельная теплоёмкость и плотность вещества, m, V – масса и объём тела. Если в разных точках стержня изменения температуры за время от t_1 до t_2 различны, то количество теплоты, которое ушло на нагревание участка стержня (x_1, x_2) , равно

$$Q = S \int_{x_1}^{x_2} c \rho [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx. \quad (3.5)$$

Наконец, для составления полного уравнения теплового баланса необходимо учесть, что внутри стержня может возникать или поглощаться тепло, например, джоулево тепло при прохождении электрического тока, тепло при протекании экзотермических или эндотермических химических реакций и т.д. Введём функцию плотности тепловых источников $F(x, t)$, которая определяет количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объёма тела. Тогда тепло, которое выделится за счёт указанных источников на участке $(x, x + dx)$ за отрезок времени $(t, t + dt)$, равно

$$dQ = F(x, t) S dx dt.$$

Тепло, выделяющееся на конечном отрезке стержня за конечное время, найдём интегрированием

$$Q = S \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} dt F(x, t). \quad (3.6)$$

Уравнение теплового баланса на участке стержня (x_1, x_2) в течение интервала времени (t_1, t_2) получаем в виде

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right] dt + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} dt F(x, t) = \\ & = \int_{x_1}^{x_2} c \rho [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Это уравнение называется *уравнением теплопроводности в интегральной форме*. Переходя в уравнении (3.7) к пределу $x_2 \rightarrow x_1$, $t_2 \rightarrow t_1$ и считая, что соответствующие производные существуют, получаем *уравнение теплопроводности в дифференциальной форме*:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Если стержень однородный, уравнение (3.8) можно переписать в виде

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (3.9)$$

где $a^2 = k/(c\rho)$ называется *коэффициентом температуропроводности*, $f(x, t) = F(x, t)/(c\rho)$. В случае, если объёмные источники тепла отсутствуют, получаем

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (3.10)$$

2. До сих пор мы рассматривали стержень, окружённый теплоизолирующей оболочкой. Теплообмен с окружающей средой можно учесть, описывая его как наличие некоторых дополнительных источников тепла. Здесь принципиально то, что рассматривается именно тонкий стержень, так что, хотя тепло фактически поступает через боковую поверхность, можно его учитывать в рамках одномерного уравнения. Аналогично можно описывать теплообмен через боковую поверхность в уравнении для двумерной задачи, при рассмотрении процесса теплопроводности в тонкой пластине. В наиболее простом случае, если теплообмен через боковую поверхность подчиняется *закону Ньютона для теплообмена*, количество теплоты, теряемое из единицы объёма стержня за единицу времени, равно

$$F_0(x, t) = h(u - \theta), \quad (3.11)$$

где h – коэффициент, определяющий интенсивность теплообмена, $\theta = \theta(x, t)$ – температура окружающей среды. Таким образом, функцию плотности тепловых источников $F(x, t)$ в уравнении (3.8) следует переписать в виде

$$F(x, t) = F_1(x, t) - F_0(x, t) = F_1(x, t) - h(u - \theta),$$

где $F_1(x, t)$ есть функция плотности истинных тепловых источников (джоулево тепло и др.). Уравнение теплопроводности для однородного стержня с теплообменом через боковую поверхность принимает вид

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x, t), \quad (3.12)$$

где $\alpha = h/(c\rho)$, $f(x, t) = \alpha \theta(x, t) + F_1(x, t)/(c\rho)$ есть известная функция.

3. Как правило, величины k и c есть медленно меняющиеся функции температуры, так что рассмотренные уравнения справедливы только для относительно небольших интервалов изменения температуры. В общем же случае уравнение (3.8) следует переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = c(u, x) \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) является квазилинейным.

3.2 Уравнение диффузии

Начнём с описания одномерной задачи. Рассмотрим процесс диффузии в тонкой трубке постоянного малого сечения, так что можно считать концентрацию диффундирующего вещества в пределах каждого сечения постоянной. Трубка может быть полая или заполнена пористой средой. Направляя ось x вдоль трубки, мы сможем описывать концентрацию как функцию только одной координаты x и времени t , $u(x, t)$.

Математическое описание процесса диффузии идентично описанию процесса теплопроводности, с заменой температуры на концентрацию и количества теплоты – на массу диффундирующего вещества. Так, масса вещества, протекающего через сечение S за время dt , определяется *законом Нернста*:

$$dm = -D \frac{\partial u}{\partial x} S dt = W S dt, \quad W = -D \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.14)$$

где D – коэффициент диффузии, $W(x, t)$ – плотность диффузионного потока, равная массе вещества, протекающей за единицу времени

через единичную площадку. По определению концентрации масса, заключённая внутри объёма V , равна

$$m = u V, \quad (3.15)$$

В случае пористой среды вводится коэффициент пористости $C = V/V_0$, где V_0 – полный объём, V – объём пор, внутри которых и может происходить диффузия. Тогда изменение массы за время от t_1 до t_2 на отрезке (x_1, x_2) запишется в виде

$$\Delta m = S \int_{x_1}^{x_2} C(x) [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx.$$

Уравнение баланса массы на отрезке (x_1, x_2) имеет вид

$$S \int_{t_1}^{t_2} \left[D \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - D \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} \right] dt = S \int_{x_1}^{x_2} C(x) [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx. \quad (3.16)$$

Отсюда, предполагая существование соответствующих производных, получаем одномерное уравнение диффузии

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) = C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.17)$$

В случае, если присутствуют источники диффундирующего вещества, если имеет место диффузия через стенки трубки, уравнение (3.17) обобщается так же, как и уравнение теплопроводности.

Если $D = \text{const}$, получаем

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad a^2 = \frac{D}{C}. \quad (3.18)$$

Несложно обобщить уравнение диффузии на трёхмерный случай. При этом плотность диффузионного потока будет векторной величиной:

$$\vec{W} = -D \text{grad} u, \quad (3.19)$$

Это соотношение носит название *первый закон Фика*, он аналогичен закону Фурье для теплопроводности. Поток вектора \vec{W} через замкнутую поверхность S , ограничивающую объём V , равен массе

вещества, выходящего из объёма наружу за единицу времени. Преобразуя поток по формуле Гаусса–Остроградского, получим:

$$-\frac{\Delta m}{\Delta t} = \oint_S W_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{W} dV.$$

С другой стороны, изменение массы за время Δt :

$$\Delta m = \int_V [u(t + \Delta t) - u(t)] dV \simeq \Delta t \int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV.$$

Отсюда получаем

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div} \vec{W} dV = \int_V \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) dV. \quad (3.20)$$

Поскольку объём V – произвольный, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u). \quad (3.21)$$

Если коэффициент диффузии $D = \operatorname{const}$, уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u, \quad (3.22)$$

где Δ – оператор Лапласа. Уравнение (3.22) есть трёхмерное уравнение диффузии, или второй закон Фика.

Аналогично можно получить трёхмерное уравнение теплопроводности

$$c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F(x, y, z, t). \quad (3.23)$$

3.3 Постановка краевых задач для параболических уравнений

Для нахождения единственного решения уравнения теплопроводности или диффузии необходимо задать *начальные и граничные условия*. Поскольку в уравнении параболического типа содержится только первая производная по времени, начальное условие одно – оно определяет значения функции в начальный момент времени:

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (3.24)$$

Основными видами граничных условий являются краевые задачи первого, второго и третьего типа. Рассмотрим для определённости процесс теплопроводности, для процесса диффузии граничные условия формулируются аналогично.

Первая краевая задача поставлена, если температура на конце стержня поддерживается по определённому закону, например:

$$u(0, t) = \mu(t), \quad (3.25)$$

где $\mu(t)$ – заданная функция времени.

Вторая краевая задача поставлена, если на конце стержня задан тепловой поток q , например:

$$q(\ell, t) = -k \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\ell}, \quad (3.26)$$

следовательно, граничное условие имеет вид:

$$u_x(\ell, t) = \nu(t) = -\frac{1}{k} q(\ell, t). \quad (3.27)$$

В частности, в случае теплоизолированного конца тепловой поток через него отсутствует, то есть $\nu(t) = 0$.

Третья краевая задача формулируется, когда на конце стержня происходит теплообмен с окружающей средой по закону *Ньютона*

$$q(\ell, t) = H [u(\ell, t) - \theta(t)], \quad (3.28)$$

где $\theta(t)$ – температура окружающей среды, H – коэффициент теплообмена, то есть количество тепла, прошедшее через единичную площадку сечения стержня за единицу времени при изменении температуры на один градус. Коэффициент H , очевидно, связан с коэффициентом h , введённым в соотношении (3.11), например, для тонкого стержня круглого сечения радиуса R имеем $h = 2H/R$. Граничное условие, с учётом (3.26), получаем в виде

$$u_x(\ell, t) = -\lambda [u(\ell, t) - \theta(t)], \quad (3.29)$$

где $\lambda = H/k$.

Существуют также более сложные граничные условия. Например, если теплообмен в точке $x = 0$ с окружающей средой происходит за счёт излучения, получаем нелинейное граничное условие,

определяемое законом Стефана–Больцмана

$$k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sigma \{ [u(0, t)]^4 - [\theta(t)]^4 \}, \quad (3.30)$$

где σ – постоянная Стефана–Больцмана.

Рассматриваются также некоторые предельные случаи. Например, если процесс теплопроводности изучается на ограниченном участке стержня, концы которой находятся достаточно далеко, их влияние практически не будет сказываться. При этом стержень можно считать бесконечным, и задать только начальное условие $u(x, 0) = \varphi(x)$. В случае, если рассматриваемый участок стержня находится вблизи от одного его конца, но далеко от другого, можно ставить задачу для полубесконечного стержня, формулируя начальное и одно граничное условие.

Другой предельный случай реализуется, если процесс теплопроводности в стержне изучается в течение длительного времени. При этом влияние начальных условий будет с течением времени ослабевать, и распределение температуры практически будет определяться только граничными условиями. Можно считать, что опыт производится бесконечно долго, и формулировать задачу без начальных условий.

Перечислим основные вопросы, которые приходится рассматривать при решении краевой задачи.

1. Единственность решения. Поскольку физический процесс протекает единственным образом, наличие нескольких решений означает, что решение не найдено.
2. Существование решения. Практически это наиболее важный и сложный вопрос. Доказательство существования решения обычно сопровождается указанием способа нахождения решения.
3. Устойчивость решения. При малых изменениях исходных данных задачи – начальных и граничных условий, правой части неоднородного уравнения – изменения решения должны быть малыми. Устойчивость особенно важна при построении приближённых решений численным методом, где погрешности вычислений можно рассматривать как малые возмущения исходных данных.

3.4 Метод разделения переменных в уравнениях параболического типа. Функция мгновенного точечного источника

Будем искать решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (3.31)$$

на интервалах координаты $0 \leq x \leq \ell$ и времени $0 \leq t \leq T$, с однородными граничными условиями

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.32)$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (3.33)$$

Поскольку уравнение является линейным и однородным, сумма частных решений также будет решением.

Рассмотрим вспомогательную задачу. Будем искать частное решение уравнения (3.31) с однородными граничными условиями (3.32), но без накладывания начального условия (оно будет относиться только к сумме всех частных решений), нетривиальное, то есть не равное тождественно нулю, и представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (3.34)$$

При этом граничные условия (3.32)

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0, \quad u(\ell, t) = X(\ell) T(t) = 0$$

ограничивают именно координатную функцию:

$$X(0) = X(\ell) = 0, \quad (3.35)$$

поскольку другая возможность, $T(t) = 0$, ведёт к тривиальному решению.

Подставляя решение (3.34) в уравнение (3.31), разделим переменные и учтём, что x и t – независимые переменные, следовательно,

равенство левой и правой частей может удовлетворяться, только если они равны некоторой константе:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda. \quad (3.36)$$

Таким образом, для каждой из функций мы получили своё обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.37)$$

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (3.38)$$

Уравнение (3.37) с граничными условиями (3.35) было решено ранее в параграфе 2.7, и были найдены *собственные значения* (2.80) и *собственные функции* (2.81). Решая уравнение (3.38), находим частное решение (3.34) в виде

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-(\pi n a / \ell)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{\ell}. \quad (3.39)$$

Общее решение уравнения (3.31) есть сумма ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(\pi n a / \ell)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{\ell}. \quad (3.40)$$

Подставляя начальное условие (3.33)

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{\ell},$$

находим коэффициенты C_n разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi. \quad (3.41)$$

Ряды вида (3.40) подробно исследованы, они имеют хорошие свойства сходимости и дифференцируемости.

Преобразуем полученное решение (3.40), подставив в него коэффициенты (3.41) и меняя порядок суммирования и интегрирования. При этом решение можно представить в виде

$$u(x, t) = \int_0^{\ell} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (3.42)$$

где введена функция

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\pi na/\ell)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin \frac{\pi n \xi}{\ell}, \quad (3.43)$$

называемая *функцией мгновенного точечного источника*.

Физический смысл функции $G(x, \xi, t)$ состоит в том, что она как функция аргумента x представляет собой распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq \ell$ в момент времени t , если при $t = 0$ температура была равна нулю, и в этот момент в точке $x = \xi$ мгновенно выделилось некоторое количество тепла Q , а на концах стержня постоянно поддерживается температура, равная нулю.

Докажем это и найдём величину Q . Предположим, что в момент времени $t = 0$ тепло Q выделилось не в точке, а на интервале $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. Это можно задать с помощью функции $\varphi_\varepsilon(x)$, описывающей начальную температуру и отличной от нуля только на этом интервале, причём в соответствии с (3.5)

$$c \rho \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \varphi_\varepsilon(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} = Q, \quad (3.44)$$

где ρ – линейная плотность массы. Подставим начальную температуру $\varphi_\varepsilon(x)$ в формулу (3.42):

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_0^\ell G(x, \tilde{\xi}, t) \varphi_\varepsilon(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} = \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} G(x, \tilde{\xi}, t) \varphi_\varepsilon(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi},$$

и применим теорему о среднем значении

$$u_\varepsilon(x, t) = G(x, \xi^*, t) \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \varphi_\varepsilon(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} = G(x, \xi^*, t) \frac{Q}{c \rho}, \quad (3.45)$$

где ξ^* – некоторая точка интервала. Устремляя затем $\varepsilon \rightarrow 0$, при этом $\xi^* \rightarrow \xi$, получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t) = \frac{Q}{c \rho} G(x, \xi, t). \quad (3.46)$$

Итак, утверждение о смысле функции $G(x, \xi, t)$ доказано, причём величина Q численно равна $c\rho$.

Таким образом, соотношение (3.42) представляет собой выражение принципа суперпозиции – температура $u(x, t)$ есть сложение воздействий точечных источников, находившихся в момент $t = 0$ в точках ξ , причём в каждой из них при этом выделилось количество тепла, равное $c\rho\varphi(\xi)$.

3.5 Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (3.47)$$

с однородными граничными условиями

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.48)$$

а начальное условие для простоты выберем однородным, $u(x, 0) = 0$.

Будем искать решение в виде разложения по собственным функциям однородной задачи:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n x}{\ell}. \quad (3.49)$$

Разложим функцию $f(x, t)$ в ряд Фурье:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n x}{\ell}, \quad f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi, t) \sin \frac{\pi n \xi}{\ell} d\xi. \quad (3.50)$$

Подставляя (3.49) и фурье-разложение функции $f(x, t)$ в уравнение (3.47), получаем уравнение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[u'_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{\ell} \right)^2 u_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{\pi n x}{\ell} = 0.$$

В силу ортогональности синусов каждый из коэффициентов ряда равен нулю, то есть для каждой из функций $u_n(t)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u'_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{\ell} \right)^2 u_n(t) = f_n(t). \quad (3.51)$$

Нулевое начальное условие на функцию $u(x, t)$ даёт для каждой из функций: $u_n(0) = 0$.

Неоднородное уравнение (3.51) решается стандартным методом вариации постоянной. Заменяя константу в общем решении однородного уравнения на функцию $C(t)$:

$$u_n(t) = C(t) e^{-(\pi na/\ell)^2 t}$$

и подставляя это решение в уравнение (3.51), для функции $C(t)$ найдём:

$$C'(t) = f_n(t) e^{(\pi na/\ell)^2 t}.$$

Интегрируя это соотношение, находим

$$C(t) = C_0 + \int_0^t f_n(\tau) e^{(\pi na/\ell)^2 \tau} d\tau,$$

причём из начального условия получим $C_0 = 0$. Таким образом, решение неоднородного уравнения (3.51) запишется в виде

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-(\pi na/\ell)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \quad (3.52)$$

Подставляя его в выражение (3.49):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi nx}{\ell} \int_0^t e^{-(\pi na/\ell)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau, \quad (3.53)$$

подставим сюда функцию $f_n(t)$ из (3.50). Меняя затем порядок суммирования и интегрирования, мы можем выразить решение через уже знакомую функцию мгновенного точечного источника:

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^{\ell} d\xi G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau), \quad (3.54)$$

где

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\pi na/\ell)^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi nx}{\ell} \sin \frac{\pi n\xi}{\ell}. \quad (3.55)$$

Исследуем физический смысл решения (3.54). Предположим, что функция $f(\xi, \tau)$ отлична от нуля только на отрезке $(\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi)$ в течение интервала времени $(\tau_0, \tau_0 + \Delta\tau)$. Плотность тепловых источников равна $F(\xi, \tau) = c\rho f(\xi, \tau)$, так что выделившееся тепло запишется в виде

$$Q = c\rho \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} d\tau \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} d\xi f(\xi, \tau).$$

Подставим эту функцию $f(\xi, \tau)$ в (3.54) и применим теорему о среднем значении:

$$u^*(x, t) = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} d\tau \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} d\xi G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) = G(x, \xi^*, t - \tau^*) \frac{Q}{c\rho},$$

где точки ξ^*, τ^* принадлежат интервалам $(\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi)$ и $(\tau_0, \tau_0 + \Delta\tau)$. Переходя к пределам $\Delta\xi \rightarrow 0, \Delta\tau \rightarrow 0$, получим

$$u(x, t) = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0, \Delta\tau \rightarrow 0} u^*(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi_0, t - \tau_0).$$

Итак, аналогично предыдущему параграфу, функция $G(x, \xi_0, t - \tau_0)$ даёт распределение температуры по x в момент t , обусловленное точечным источником тепла в точке ξ_0 , где в момент времени τ_0 выделилось тепло Q , численно равное $c\rho$.

Таким образом, решение (3.54) представляет собой суперпозицию решений от точечных источников, непрерывно распределённых на всём интервале $(0, \ell)$ в течение временного интервала $(0, t)$.

3.6 Распространение тепла на неограниченной прямой

Поставим задачу: найти *ограниченную* функцию $u(x, t)$, описывающую распределение температуры в области $-\infty < x < \infty$ при $t \geq 0$ и удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{3.56}$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (3.57)$$

Будем искать решение методом разделения переменных, записывая частное решение в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (3.58)$$

Разделяя переменные и учитывая, что x и t – независимы:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad (3.59)$$

для каждой из функций получим дифференциальное уравнение:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.60)$$

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (3.61)$$

Очевидно, что условию ограниченности удовлетворяют решения уравнения (3.60) только при $\lambda > 0$. Обозначая $\lambda = \mu^2$, находим функции (3.58) в виде

$$X(x) = C_1 e^{i\mu x} + C_2 e^{-i\mu x}, \quad T(t) = e^{-a^2 \mu^2 t}. \quad (3.62)$$

Поскольку μ здесь произвольное число, $-\infty < \mu < \infty$, достаточно взять только одно из слагаемых в функции $X(x)$.

Общим решением уравнения (3.56) будет полная суперпозиция всех частных решений, то есть:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\mu) e^{-a^2 \mu^2 t + i\mu x} d\mu. \quad (3.63)$$

Подставляя это решение в начальное условие

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\mu) e^{i\mu x} d\mu = \varphi(x),$$

получаем не что иное, как разложение функции $\varphi(x)$ в интеграл Фурье. Таким образом, функция $A(\mu)$ является фурье-образом функции $\varphi(x)$.

Существует условие ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mu-\mu')x} dx = 2\pi \delta(\mu - \mu'), \quad (3.64)$$

где $\delta(\mu - \mu')$ – дельта-функция Дирака. О некоторых свойствах дельта-функции см. приложение в конце этого параграфа. Используя условие (3.64), можно найти функцию $A(\mu)$ в виде так называемого обратного преобразования Фурье:

$$A(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\mu\xi} d\xi. \quad (3.65)$$

Подставим (3.65) в решение (3.63) и сменим порядок интегрирования, в результате решение можно представить в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (3.66)$$

где $G(x, \xi, t)$ есть функция мгновенного точечного источника:

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\mu^2 t + i\mu(x-\xi)} d\mu. \quad (3.67)$$

Выделяя в показателе экспоненты под интегралом полный квадрат

$$-a^2\mu^2 t + i\mu(x-\xi) = -\left(\sqrt{a^2 t} \mu - \frac{i(x-\xi)}{2\sqrt{a^2 t}}\right)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t},$$

получим, после замены переменной, гауссов интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

В результате функция мгновенного точечного источника запишется в виде

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right). \quad (3.68)$$

Если за начало отсчёта времени взять не момент $t = 0$, а $t = t_0$, получим

$$G(x, \xi, t - t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t - t_0)}} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2(t - t_0)}\right). \quad (3.69)$$

Как и в случае ограниченного отрезка, можно показать (выбирая начальную функцию $\varphi_\varepsilon(x) \neq 0$ только на интервале $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$), что функция $G(x, \xi, t - t_0)$, как функция аргумента x , представляет собой распределение температуры в бесконечном стержне в момент времени t , если при $t = t_0$ температура была равна нулю, и в этот момент в точке $x = \xi$ мгновенно выделилось количество тепла Q , численно равное $c\rho$.

Суммарное количество тепла, содержащееся на всём бесконечном интервале $-\infty < x < \infty$, найдём интегрированием

$$\begin{aligned} c\rho \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - t_0) dx &= \\ &= \frac{c\rho}{2\sqrt{\pi a^2(t - t_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2(t - t_0)}\right) dx = c\rho, \end{aligned} \quad (3.70)$$

то есть полное количество тепла не меняется с течением времени.

Графики зависимости функции $G(x, \xi, t - t_0)$ от x в различные моменты времени изображены на рис. 3.1. В любой момент t эта зависимость имеет вид так называемого *гауссова колокола*, при этом площадь под каждым из них остаётся равной единице, что и обеспечивает сохранение полного количества тепла.

Графики зависимости функции $G(x, \xi, t - t_0)$ от t в различных точках x , как при $x = \xi$, так и при $x \neq \xi$, изображены на рис. 3.2. Как видно из формулы (3.69):

$$\lim_{t \rightarrow t_0} G(x \neq \xi) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} G(x = \xi) \rightarrow \infty.$$

Как и в предыдущем параграфе, нетрудно показать, что решение неоднородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (3.71)$$

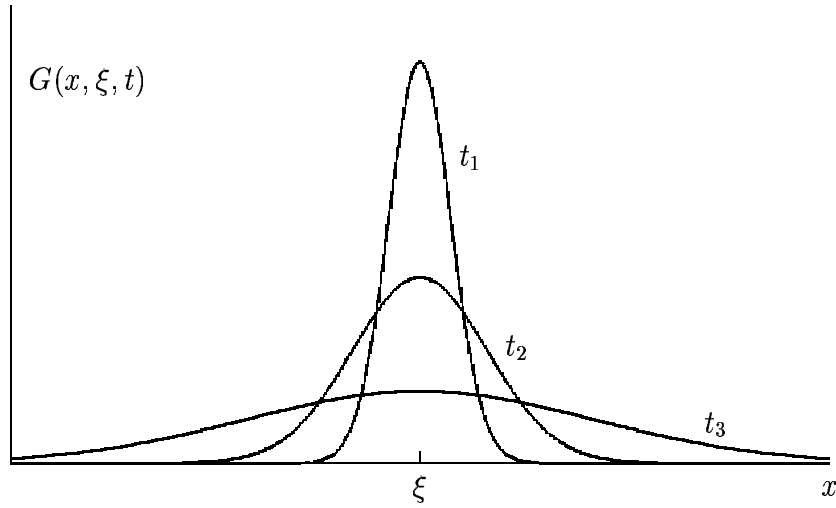


Рис. 3.1: Зависимость функции мгновенного точечного источника от x в различные моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$

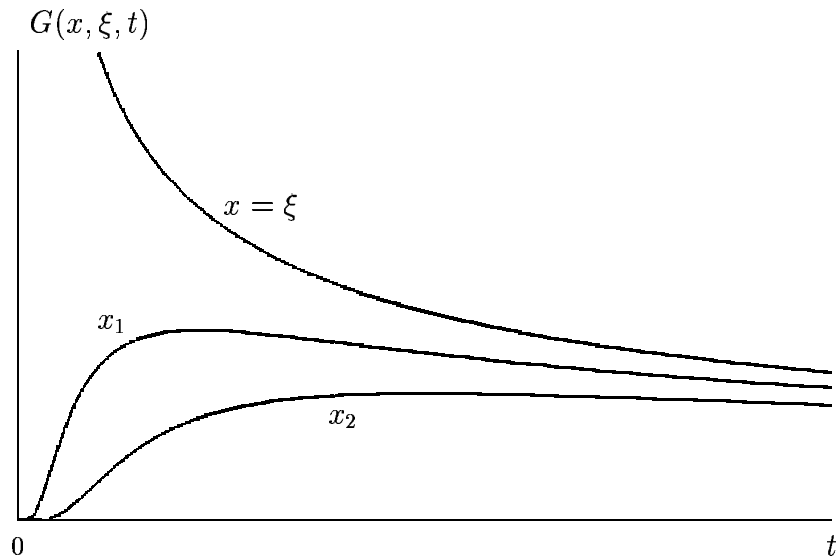


Рис. 3.2: Зависимость функции мгновенного точечного источника от t в различных точках x , здесь $x_2 > x_1$

с нулевым начальным условием, $u(x, 0) = 0$, может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau). \quad (3.72)$$

Дельта-функция Дирака

Дельта-функция, одна из так называемых обобщённых функций, была введена английским физиком П.А.М. Дираком при построении квантовой теории. Позднее был разработан самостоятельный раздел математики, посвящённый обобщённым функциям.

Дельта-функция Дирака определяется следующим образом:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = x_0, \\ 0 & \text{при } x \neq x_0, \end{cases} \quad (3.73)$$

при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (3.74)$$

Полезное свойство дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (3.75)$$

Существует много представлений дельта-функции как предельных значений различных функций, имеющих колоколообразную форму. Потребовав, чтобы площадь под кривой оставалась равной единице, устремим ширину колокола к нулю, при этом его высота будет стремиться к бесконечности, и мы получим дельта-функцию. Например, из (3.68) и рис. 3.1 видно, что в пределе $t \rightarrow 0$ функция $G(x, \xi, t)$ превратится именно в дельта-функцию $\delta(x - \xi)$, так что можно записать

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi} \varepsilon} e^{-x^2/\varepsilon^2}. \quad (3.76)$$

Ещё одно представление:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi (x^2 + \varepsilon^2)}, \quad (3.77)$$

и так далее.

Контрольные задания к главе 3

1. Выведите трёхмерное уравнение диффузии для случая, когда диффундирующее вещество распадается, причём скорость распада в каждой точке пропорциональна концентрации.
2. Найдите связь между коэффициентом h в соотношении (3.11) для теплообмена через боковую поверхность тонкого стержня круглого сечения радиуса R и коэффициентом теплообмена H в формуле (3.28).
3. Докажите условие ортогональности (3.64).
4. Вычислите интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(g(x)) dx,$$

где $g(x)$ – некоторая функция.

Глава 4

Уравнения эллиптического типа

В настоящей главе рассматриваются основные виды уравнений эллиптического типа – уравнения Лапласа, Пуассона и Гельмгольца. Приведены примеры физических задач, в которых возникают такие уравнения. Сформулированы и проанализированы основные типы краевых задач для уравнений эллиптического типа. Найдены фундаментальные решения уравнения Лапласа в сферических и цилиндрических координатах. Выведены первая, вторая и основная интегральная формулы Грина. Исследованы свойства гармонических функций. Найдены функции точечного источника для уравнений Лапласа и Гельмгольца. Методом электростатических изображений вычислена функция источника уравнения Лапласа для сферы.

4.1 Уравнение Лапласа

Уравнение Лапласа возникает в целом ряде далёких друг от друга физических задач. Рассмотрим некоторые из них.

Установившийся процесс теплопроводности или диффузии. Вспомним уравнение теплопроводности в трёхмерном случае при наличии стационарных источников тепла (3.23)

$$c \rho u_t = k \Delta u + F(x, y, z), \quad (4.1)$$

или аналогичное уравнение диффузии. Если в рассматриваемой области установилось распределение температуры (концентрации), не меняющееся со временем, то есть стационарный процесс ($u_t = 0$), то уравнение (4.1) сводится к *уравнению Пуассона* вида

$$\Delta u = -f(x, y, z), \quad \text{где} \quad f(x, y, z) = \frac{F(x, y, z)}{k}. \quad (4.2)$$

Если источники тепла в данной области отсутствуют, $F(x, y, z) = 0$, получаем *уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0. \quad (4.3)$$

Безвихревое стационарное течение несжимаемой жидкости. Движение сплошной среды описывается полем скоростей $\vec{v}(x, y, z, t)$. Течение стационарно, если вектор скорости в каждой точке не меняется со временем, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$. Условие отсутствия вихревых движений жидкости имеет вид

$$\text{rot } \vec{v} = 0.$$

Вспомним курс векторного анализа, раздел – дифференциальные операции второго порядка, где доказывалось, что ротор от градиента произвольного поля тождественно равен нулю. Это означает, что можно ввести скалярное поле – потенциал поля скоростей $\varphi(x, y, z)$

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi. \quad (4.4)$$

Уравнение непрерывности сплошной среды (другими словами, закон сохранения массы в дифференциальной форме) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.5)$$

где $\rho(x, y, z, t)$ – поле плотности массы. В случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) уравнение (4.5) принимает вид

$$\text{div } \vec{v} = 0.$$

Подставляя сюда вектор \vec{v} из (4.4), получаем, что потенциал поля скоростей подчиняется уравнению Лапласа:

$$\text{div grad } \varphi = 0, \quad \text{или} \quad \Delta \varphi = 0. \quad (4.6)$$

Электростатическое поле. Напряжённость электростатического поля выражается через скалярный потенциал:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi.$$

Подставляя это в четвёртое уравнение Максвелла

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho,$$

где ρ есть объёмная плотность заряда, получаем уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho,$$

или, если в рассматриваемой области зарядов нет, потенциал электростатического поля подчиняется уравнению Лапласа.

Стационарные токи в однородной проводящей среде. Векторное поле плотности стационарных токов $\vec{j}(x, y, z)$, связанное с плотностью заряда ρ уравнением непрерывности,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0,$$

при отсутствии в рассматриваемой области источников тока – меняющихся со временем зарядов – подчиняется уравнению

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0.$$

С другой стороны, плотность тока связана с напряжённостью электрического поля законом Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E},$$

где σ – удельная проводимость.

Второе уравнение Максвелла (закон электромагнитной индукции),

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

в стационарном случае содержит в правой части ноль, следовательно, для электрического поля можно ввести скалярный потенциал φ , $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, который в случае однородной среды, $\sigma = \operatorname{const}$, также подчиняется уравнению Лапласа.

Краевые задачи

Итак, требуется найти некоторую физическую величину $u(x, y, z)$, которая в области пространства V , ограниченной поверхностью S , подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{4.7}$$

или уравнению Пуассона

$$\Delta u = -f(x, y, z). \quad (4.8)$$

При этом должно быть задано одно из граничных условий (иными словами, должна быть поставлена краевая задача). Рассмотрим основные из них.

1. Первая краевая задача, или задача Дирихле, поставлена в том случае, если на границе области задана сама неизвестная функция:

$$u|_S = f_1(x, y, z). \quad (4.9)$$

2. Вторая краевая задача, или задача Неймана, поставлена, если на границе области задана производная неизвестной функции по направлению внешней нормали:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f_2(x, y, z). \quad (4.10)$$

При этом существует такой вопрос, как правильность постановки второй краевой задачи. Его физический смысл очевиден, например, для стационарного процесса теплопроводности, в котором условие вида (4.10) означает, что на границе области задан тепловой поток. Однако, если в случае уравнения Лапласа суммарный поток тепла внутрь области (или наружу) отличен от нуля, температура не может оставаться постоянной, и процесс не будет стационарным. Следовательно, условие правильности постановки второй краевой задачи для уравнения Лапласа должно иметь вид

$$\oint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0, \quad \text{или} \quad \oint_S f_2(x, y, z) dS = 0. \quad (4.11)$$

3. Третья краевая задача поставлена, если на границе области задана комбинация неизвестной функции и её производной по направлению внешней нормали:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h u \right) \Big|_S = f_3(x, y, z). \quad (4.12)$$

В случае процесса теплопроводности это соответствует теплообмену с внешней средой по закону Ньютона.

Кроме перечисленной классификации, краевые задачи подразделяют также на внутренние (если область V лежит внутри поверхности S) и внешние (если область V – вне поверхности S).

Фундаментальные решения

Так называются наиболее простые решения уравнения Лапласа, существующие при наличии сферической или осевой симметрии.

Уравнение Лапласа в сферических координатах для функции $u(r, \theta, \varphi)$ имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] = 0. \quad (4.13)$$

Если в задаче заведомо имеется сферическая симметрия, $u = u(r)$, уравнение значительно упрощается:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0, \quad (4.14)$$

и может быть легко проинтегрировано, в результате получаем при $r \neq 0$

$$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2. \quad (4.15)$$

Решение (4.15) при выборе констант вида $C_1 = 1, C_2 = 0$:

$$u(r) = \frac{1}{r} \quad (4.16)$$

принято называть фундаментальным решением уравнения Лапласа в сферических координатах.

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах для функции $u(\rho, \varphi, z)$ имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (4.17)$$

Если в задаче имеется осевая симметрия, $u = u(\rho)$, уравнение также упрощается:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = 0. \quad (4.18)$$

Интегрируя, получаем решение при $\rho \neq 0$ в виде

$$u(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2. \quad (4.19)$$

Решение (4.19) при выборе констант вида $C_1 = -1$, $C_2 = 0$:

$$u(\rho) = \ln \frac{1}{\rho} \quad (4.20)$$

называют фундаментальным решением уравнения Лапласа в цилиндрических координатах.

4.2 Первая и вторая формулы Грина

Для дальнейшего исследования решений уравнений Лапласа и Пуассона нам потребуются вспомогательные интегральные соотношения, называемые формулами Грина.

Начнём с хорошо известной из курса векторного анализа формулы Гаусса–Остроградского для векторного поля \vec{A} :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} \, dV = \oint_S A_n \, dS. \quad (4.21)$$

Введём две функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$, которые непрерывны вместе с первыми производными в области V с границей S и имеют непрерывные вторые производные в области V . Построим из них векторную функцию

$$\vec{A} = u \left(\vec{\nabla} v \right) = u \operatorname{grad} v, \quad \text{при этом} \quad A_n = u \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Раскрывая дивергенцию вектора

$$\operatorname{div} \vec{A} = (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) + u \operatorname{div} \operatorname{grad} v = (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) + u \Delta v$$

и подставляя её в формулу (4.21), получаем

$$\int_V u \Delta v \, dV = \oint_S u \frac{\partial v}{\partial n} \, dS - \int_V (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) \, dV. \quad (4.22)$$

Это первая формула Грина.

Меняя в формуле (4.22) функции u и v местами:

$$\int_V v \Delta u \, dV = \oint_S v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS - \int_V (\text{grad } v \cdot \text{grad } u) \, dV,$$

и вычитая из одной формулы другую, получаем *вторую формулу Грина*:

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) \, dV = \oint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, dS. \quad (4.23)$$

Из (4.23) легко получить вторую формулу Грина для двумерного случая. Полагая, что функции u и v зависят только от переменных x и y , выберем поверхность S в виде цилиндра, параллельного оси z , произвольного сечения и произвольной высоты H . Интеграл по объёму в левой части (4.23) сводится к интегралу по сечению цилиндра σ , умноженному на H . В правую часть (4.23) даёт вклад только интеграл по боковой поверхности цилиндра (поскольку на его основаниях $\partial/\partial n = \partial/\partial z = 0$), равный интегралу по контуру L – границе области σ – умноженному на H . Сокращая на H , получаем

$$\int_{\sigma} (u \Delta_2 v - v \Delta_2 u) \, d\sigma = \oint_L \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, d\ell, \quad (4.24)$$

где $d\ell$ – элемент длины контура L , $\partial/\partial \nu$ – производная по направлению внешней к контуру нормали $\vec{\nu}$.

4.3 Основная интегральная формула Грина

Вывод формулы

Рассмотрим внутри области V две точки – фиксированную точку $M_0(x, y, z)$ и текущую точку $M(x, y, z)$. Функция

$$v(x, y, z) \equiv v(M) = \frac{1}{R}, \quad \text{где } R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad (4.25)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа относительно переменных x, y, z , как его фундаментальное решение, везде, кроме точки M_0 :

$$\Delta v = 0 \quad (M \neq M_0).$$

Пусть $u(M)$ – некоторая функция, непрерывная вместе с первыми производными в области $V + S$ и имеющая непрерывные вторые производные внутри области V . Мы не можем применить к этим функциям в области V вторую формулу Грина (4.23), поскольку функция v имеет разрыв в точке M_0 . Но если мы вырежем из рассматриваемой области малую окрестность K_ε точки M_0 , например, шар радиуса ε с центром в точке M_0 , то в области $V - K_\varepsilon$ вторая формула Грина станет применимой. Запишем её, с учётом того, что границей области $V - K_\varepsilon$ кроме внешней поверхности S будет также сфера радиуса ε , S_ε :

$$\begin{aligned} \int_{V-K_\varepsilon} \left(u \Delta \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \Delta u \right) dV &= \oint_S \left(u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + \\ &+ \oint_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} dS - \oint_{S_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} dS. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Вычислим интегралы по сфере S_ε . Поскольку внешняя по отношению к области $V - K_\varepsilon$ нормаль направлена внутрь сферы, в первом из интегралов по S_ε получаем

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} \right|_{S_\varepsilon} = - \left. \frac{d}{dR} \frac{1}{R} \right|_{R=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Вычисляем интеграл, используя теорему о среднем значении:

$$\oint_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{S_\varepsilon} u dS = \frac{1}{\varepsilon^2} u^* 4\pi \varepsilon^2 = 4\pi u^*,$$

где u^* – среднее значение функции $u(M)$ на сфере S_ε . Аналогично для второго интеграла по S_ε получаем:

$$\oint_{S_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\varepsilon} \oint_{S_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* 4\pi \varepsilon^2 = 4\pi \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*,$$

где $(\partial u / \partial n)^*$ – среднее значение производной функции по нормали на сфере S_ε .

Первое слагаемое под интегралом в левой части формулы (4.26) равно нулю, $\Delta(1/R) = 0$.

Устремим $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^* = u(M_0),$$

поскольку u – непрерывная функция,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 0,$$

поскольку первые производные непрерывны. Для оставшегося интеграла в левой части формулы (4.26) можем записать

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V-K_\varepsilon} \frac{1}{R} \Delta u \, dV = \int_V \frac{1}{R} \Delta u \, dV,$$

поскольку в отброшенном интеграле по области K_ε малость в знаменателе от $1/R \rightarrow 1/\varepsilon$ компенсируется малостью объёма в числителе $\sim \varepsilon^3$.

В результате, с учётом вышесказанного, из формулы (4.26) получаем

$$4\pi u(M_0) = - \oint_S \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{M_0P}} - \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n}(P) \right] dS - \int_V \frac{\Delta u}{R} dV, \quad (4.27)$$

где P – текущая точка на поверхности S . Формула (4.27) называется *основной интегральной формулой Грина*.

Произвольное положение точки M_0

Мы рассмотрели случай, когда точка M_0 находится внутри поверхности S . Если же точка M_0 находится вне поверхности S , можно сразу применять вторую формулу Грина, при этом получим уравнение вида (4.27), где, однако, в левой части будет стоять ноль.

Теперь рассмотрим случай, когда точка M_0 принадлежит поверхности S , причём поверхность вблизи M_0 гладкая. Для применимости второй формулы Грина (4.23) также нужно вырезать из рассматриваемой области малую окрестность K_ε точки M_0 , но теперь это будет (в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$) половина шара радиуса ε с центром в точке M_0 , см. рис. 4.1(а). Повторяя все рассуждения, мы вновь получим уравнение вида (4.27), но в левой части вместо 4π появится множитель

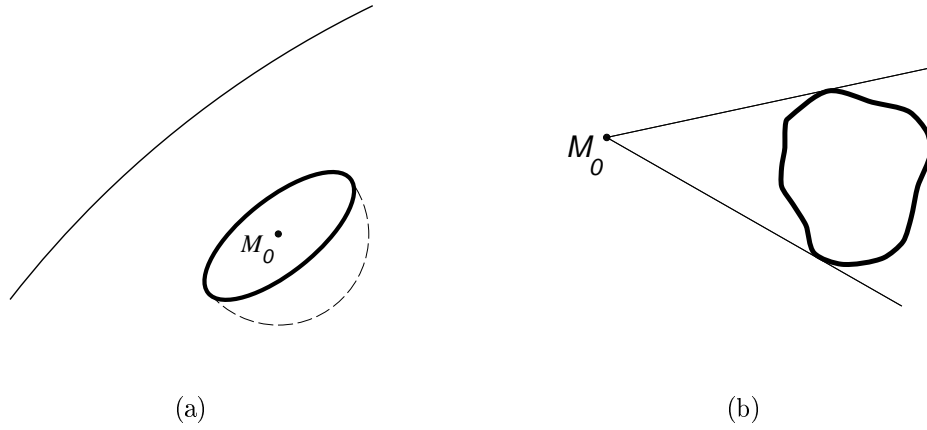


Рис. 4.1: Варианты расположения точки M_0 : (a) на гладкой границе области; (b) вне области

2 π . Объединяя эти три случая, можем записать

$$\Omega u(M_0) = - \oint_S \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{M_0 P}} - \frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n}(P) \right] dS - \int_V \frac{\Delta u}{R} dV, \quad (4.28)$$

где

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi, & \text{если } M_0 \in V, \\ 2\pi, & \text{если } M_0 \in S \text{ (поверхность гладкая)}, \\ 0, & \text{если } M_0 \notin V + S. \end{cases} \quad (4.29)$$

Величину Ω естественно интерпретировать как телесный угол, открытый из точки M_0 внутрь поверхности S . Его нулевое значение в случае, если точка M_0 лежит снаружи, следует понимать как сумму двух одинаковых по величине телесных углов, положительного для части поверхности, обращённой к точке M_0 внутренней стороной, и отрицательного для той части, что обращена к точке M_0 наружной стороной, см. рис. 4.1(b). При этом формула (4.29) очевидно обобщается на негладкие поверхности, и для точки M_0 , лежащей на ребре или в вершине конического острия, Ω есть соответствующий телесный угол.

Гармонические функции

Введём следующее определение:

Функция $u(M)$, непрерывная вместе с первыми производными в области $V + S$, имеющая непрерывные вторые производные внутри области V и удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической функцией* в области V .

В том случае, если функция $u(M)$ является гармонической, из формулы (4.27) получаем для точки M_0 , лежащей внутри поверхности

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{M_0P}} - \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n}(P) \right] dS. \quad (4.30)$$

Таким образом, значение гармонической функции в произвольной точке области выражается через значения функции и её нормальной производной на поверхности.

Из формулы (4.30) следует, что функция $u(M_0)$, гармоническая в области V , дифференцируема в этой области бесчисленное множество раз, поскольку зависимость от координат точки M_0 содержится только в функции $1/R_{M_0P}$, которая дифференцируема бесчисленное множество раз. Дифференцирование под знаком интеграла является здесь законной процедурой, поскольку под интегралом стоят только непрерывные функции.

Двумерный случай

Основная интегральная формула Грина для функции двух переменных может быть получена аналогичным образом, при подстановке в формулу (4.24) функции v в виде фундаментального решения двумерного уравнения Лапласа:

$$v(x, y) = \ln \frac{1}{R}, \quad \text{где } R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (4.31)$$

Вырезая из области σ круг радиуса ε с центром в точке M_0 , получим из (4.24) двумерную формулу, аналогичную (4.26), при этом границей области будет внешняя кривая L и окружность радиуса ε ,

L_ε . Вычисляя интегралы по окружности L_ε и учитывая, что на этой окружности

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{R} \Big|_{L_\varepsilon} = - \frac{d}{dR} \ln \frac{1}{R} \Big|_{R=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon},$$

так же, как и в трёхмерном случае, получаем от соответствующего интеграла конечный вклад в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\oint_{L_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{R} d\ell = \frac{1}{\varepsilon} \oint_{L_\varepsilon} u d\ell = \frac{1}{\varepsilon} u^* 2\pi \varepsilon = 2\pi u^* \rightarrow 2\pi u(M_0).$$

Окончательно для произвольного положения точки M_0 можем записать общую формулу

$$\begin{aligned} \Phi u(M_0) &= - \oint_L \left[u(P) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{R_{M_0P}} - \ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(P) \right] d\ell - \\ &- \int_\sigma \Delta_2 u \ln \frac{1}{R} d\sigma, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где

$$\Phi = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } M_0 \in \sigma, \\ \pi, & \text{если } M_0 \in L \text{ (кривая - гладкая)}, \\ 0, & \text{если } M_0 \notin \sigma + L, \end{cases} \quad (4.33)$$

с очевидным обобщением на случай негладкой кривой.

В том случае, если двумерная функция $u(M)$ является гармонической, из формулы (4.32) получаем для точки M_0 , лежащей внутри области σ

$$u(M_0) = - \frac{1}{2\pi} \oint_L \left[u(P) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{R_{M_0P}} - \ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(P) \right] d\ell. \quad (4.34)$$

4.4 Свойства гармонических функций

Гармонические функции, определённые на с. 90, имеют ряд замечательных свойств, которые мы сформулируем в виде трёх теорем.

Теорема об отсутствии источников

Если $u(M)$ – функция, гармоническая в области V , ограниченной поверхностью S , то

$$\oint_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0, \quad (4.35)$$

где σ – любая замкнутая поверхность, лежащая целиком внутри поверхности S .

Доказательство очевидно, достаточно во второй формуле Грина (4.23) положить $v \equiv 1$, и сразу получаем (4.35).

Следствием теоремы (4.35) является такое понятие, как правильность постановки второй краевой задачи для уравнения Лапласа (4.10), которое мы ранее сформулировали из физических соображений, см. (4.11).

Почему это свойство называется отсутствием источников, можно понять на примере электростатики. Если u – потенциал электростатического поля, интеграл в соотношении (4.35) есть поток вектора напряженности поля через замкнутую поверхность. Равенство нулю потока через *любую* замкнутую поверхность означает, что в области V нет зарядов – источников электростатического поля.

Теорема о среднем значении

Если $u(M)$ – функция, гармоническая в области V , а M_0 – точка внутри V , то

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{\Sigma_a} u d\sigma, \quad (4.36)$$

где Σ_a – сфера радиуса a с центром в точке M_0 , лежащая целиком в области V .

Доказательство. Применим формулу (4.30) к сфере радиуса a . Учитывая, что $1/R_{M_0P} = 1/a$, получаем, в соответствии с (4.35), что второе слагаемое в правой части (4.30) обращается в ноль. С учётом соотношения

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{M_0P}} \right|_{\Sigma_a} = \left. \frac{d}{dR} \frac{1}{R} \right|_{R=a} = -\frac{1}{a^2} \quad (4.37)$$

получаем формулу (4.36). Значение гармонической функции в центре сферы всегда равно среднему значению по поверхности сферы.

Теорему о среднем значении можно сформулировать и иначе. Записывая формулу (4.36) для сферы меньшего радиуса $\rho < a$

$$4\pi\rho^2 u(M_0) = \oint_{\Sigma_\rho} u d\sigma \quad (4.38)$$

и интегрируя по ρ от 0 до a , получим

$$\frac{4}{3}\pi a^3 u(M_0) = \int_{V_a} u dV,$$

или

$$u(M_0) = \frac{1}{V_a} \int_{V_a} u dV. \quad (4.39)$$

Таким образом, значение гармонической функции в центре шара является средним также и по объёму шара.

Принцип максимального значения

Функция $u(M)$, гармоническая в области V с границей S , может достигать своих максимальных и минимальных значений только на поверхности S .

Доказательство производится от противного. Предположим, что максимум функции достигается в некоторой внутренней точке M_0 области V , так что $u(M_0) \geq u(M)$, где M – любая точка области V . Окружим точку M_0 сферой Σ_ρ радиуса ρ , лежащей целиком внутри V . Имеем $u|_{\Sigma_\rho} \leq u(M_0)$. По теореме о среднем значении получаем

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \oint_{\Sigma_\rho} u(M) d\sigma \leq \frac{1}{4\pi\rho^2} \oint_{\Sigma_\rho} u(M_0) d\sigma = u(M_0). \quad (4.40)$$

Но если хотя бы где-то на сфере $u(M) < u(M_0)$, неравенство (4.40) становится строгим, что приводит к противоречию. Следовательно, на всей поверхности сферы Σ_ρ должно быть $u(M) \equiv u(M_0)$. Легко видеть, что отсюда следует равенство $u(M) \equiv u(M_0)$ во всей области V , а в силу непрерывности функции u – и в области $V + S$,

включая границу. Итак, гармоническая функция может достигать максимального значения внутри области, только если это константа. Аналогично можно доказать теорему и для минимального значения.

Следствие. Если функции u и U являются гармоническими в области V , непрерывны в замкнутой области $V + S$, и на поверхности S имеет место неравенство $u \leq U$, то оно сохраняется всюду в области V .

Рассмотрим разность функций, для которой, очевидно, сохраняются свойства гармоничности и непрерывности. На поверхности S имеем

$U - u \geq 0$. Но это означает, что $U - u \geq 0$ всюду в области V , иначе, если где-то было бы $U - u < 0$, функция $U - u$ должна была бы иметь минимум внутри V .

4.5 Единственность и устойчивость первой краевой задачи для уравнения Лапласа

Внутренняя краевая задача

Сформулируем более точно первую внутреннюю краевую задачу (4.9). Требуется найти функцию $u(x, y, z)$:

- а) определённую и непрерывную в области V вместе с границей S ;
- б) удовлетворяющую внутри V уравнению Лапласа $\Delta u = 0$;
- в) принимающую на границе S заданные значения $f(x, y, z)$.

Из данной формулировки следует, что такая функция $u(x, y, z)$ является гармонической в области V .

Докажем, что *первая краевая задача для уравнения Лапласа имеет единственное решение.*

Доказательство производится от противного. Допустим, что существуют две функции, $u_1(x, y, z)$ и $u_2(x, y, z)$, удовлетворяющие поставленным условиям. Рассмотрим разность этих функций, $u \equiv u_1 - u_2$. Очевидно, она также удовлетворяет уравнению Лапласа,

$\Delta u = 0$, но с нулевым граничным условием: $u|_S = 0$. Тогда из принципа максимального значения сразу получаем, что $u \equiv 0$ везде внутри области, иначе функция имела бы там максимум при $u > 0$ или минимум при $u < 0$, что запрещено. Таким образом, решения u_1 и u_2 совпадают.

Легко показать также, что *решение первой краевой задачи является устойчивым, то есть при малом изменении граничного условия, $f_1 \rightarrow f_2$, изменение решения, $u_1 \rightarrow u_2$, также является малым.*

Доказательство основано на следствии из принципа максимального значения. Допустим, на поверхности имеет место условие $|f_1 - f_2| \leq \varepsilon$. Тогда сразу получаем, что везде внутри области $|u_1 - u_2| \leq \varepsilon$.

Внешняя краевая задача

Пусть T – область, внешняя по отношению к замкнутой поверхности S . Требуется найти функцию $u(x, y, z)$:

- а) непрерывную всюду в области T вместе с границей S ;
- б) удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной области T ;
- в) принимающую на границе S заданные значения $u|_S = f(x, y, z)$;
- г) равномерно стремящуюся к нулю на бесконечности, $u(M) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$.

Докажем, что *первая внешняя краевая задача для уравнения Лапласа имеет единственное решение.*

Доказательство. Предположим, что существуют два решения, u_1 и u_2 . Тогда разность этих функций, $u \equiv u_1 - u_2$, также есть решение уравнения Лапласа, но с нулевым граничным условием. Условие (г) для функции u также выполнено. Это значит, что для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно найти такое достаточно большое R^* , что

$$|u(M)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad r \geq R^*,$$

здесь r – модуль радиус-вектора точки M .

Рассмотрим функцию u в области T' между поверхностью S и сферой радиуса R^* , S_{R^*} . На границах области T' имеем: $u|_S = 0$ и $|u|_{S_{R^*}} < \varepsilon$. Тогда, в соответствии со следствием из принципа максимального значения, $|u(M)| < \varepsilon$ во всей области T' . Поскольку ε произвольное, имеем $u \equiv 0$ всюду в T , то есть решения совпадают.

4.6 Функция источника для уравнения Лапласа

Вспомним основную интегральную формулу Грина (4.27)

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{M_0P}} - \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n}(P) \right] dS - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Delta u}{R} dV. \quad (4.41)$$

Если функция u гармоническая, последний интеграл равен нулю. Если же функция u удовлетворяет уравнению Пуассона, последний интеграл есть известная функция. Значение функции u в точке M_0 определяется поверхностным интегралом. Чтобы его вычислить, нужно знать значения на поверхности как функции $u(P)$, так и её нормальной производной $\partial u / \partial n(P)$. Но задана бывает только либо $u(P)$ (первая краевая задача), либо $\partial u / \partial n(P)$ (вторая краевая задача).

Введём некоторую вспомогательную функцию w , гармоническую в области V . Вторую формулу Грина (4.23) для функций u и w , с учётом того, что $\Delta w = 0$, перепишем в виде

$$0 = -\oint_S \left[u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS - \int_V w \Delta u dV. \quad (4.42)$$

Складывая почленно (4.41) и (4.42), видим, что можно ввести двухточечную функцию

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + w(M, M_0), \quad (4.43)$$

такую, что

$$u(M_0) = -\oint_S \left[u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS - \int_V G \Delta u dV. \quad (4.44)$$

А теперь воспользуемся произволом функции w . Подберём её так, чтобы в случае первой краевой задачи, когда заданы значения функции на поверхности, $u|_S = f(x, y, z)$, функция G обращалась в ноль на этой поверхности, $G|_S = 0$. Соответственно, в случае второй краевой задачи функция w подбирается так, чтобы обращалась в ноль производная, $(\partial G/\partial n)|_S = 0$.

Таким образом, функция источника для уравнения Лапласа в случае первой краевой задачи определяется условиями:

1. Функция $G(M, M_0)$, как функция точки $M(x, y, z)$, при фиксированном положении точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta G = 0$ при $M \neq M_0$.
2. При $M \rightarrow M_0$ функция $G(M, M_0) \rightarrow \infty$ и представима в виде (4.43), где $w(M, M_0)$ – гармоническая всюду в области V функция.
3. $G(P, M_0) = 0$, если $P \in S$.

Последнее условие удовлетворяется, если

$$w|_S = -\frac{1}{4\pi R}. \quad (4.45)$$

Существует красивая возможность объединить первые два условия, доопределяя сингулярность при $M = M_0$. Вспомним, что имеется функция, равная нулю везде, кроме одной точки, где она обращается в бесконечность – дельта-функция Дирака, см. параграф 3.6. Предположим, что лапласиан от функции источника можно представить в виде

$$\Delta G = C \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (4.46)$$

где \vec{r} и \vec{r}_0 – радиус-векторы точек M и M_0 . Предположение верно, если интеграл от левой части (4.46) по области, содержащей точку M_0 , является конечным, при этом можно найти константу C . Подставляя (4.43) в (4.46), имеем, с учётом того, что $\Delta w = 0$:

$$\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{R_{MM_0}} = C \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по объёму шара радиуса a с центром в точке M_0 , при этом в правой части интеграл от дельта-функции даст единицу:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{V_a} \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{R} dV = C \int_{V_a} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = C.$$

Преобразуя интеграл в левой части по формуле Гаусса–Остроградского и используя соотношение (4.37) на сфере, получаем

$$\frac{1}{4\pi} \int_{V_a} \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{R} dV = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma_a} \left(\operatorname{grad} \frac{1}{R} \right)_n d\sigma = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma_a} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} d\sigma = -1.$$

Таким образом, в формуле (4.46) константа $C = -1$.

Так определяется G – функция источника первой краевой задачи для уравнения Лапласа. Из формулы (4.44) имеем

$$u(M_0) = - \oint_S u \frac{\partial G}{\partial n} dS = - \oint_S f \frac{\partial G}{\partial n} dS, \quad (4.47)$$

если $u|_S = f$.

Итак, задача поиска функции u сводится к нахождению функции G , то есть функции w , являющейся решением первой краевой задачи для уравнения $\Delta w = 0$ с граничным условием (4.45). Очевидно, задача упростилась, поскольку вместо произвольной функции f на поверхности S имеем заданную – (4.45).

Задача имеет наглядную электростатическую интерпретацию. Функция источника $G(M, M_0)$ в формуле (4.43) представляет собой потенциал в точке M электростатического поля единичного точечного заряда, находящегося в точке M_0 внутри заземлённой (то есть имеющей нулевой потенциал) проводящей поверхности S . Возможна и другая формулировка: слагаемое w в (4.43) есть потенциал электростатического поля системы зарядов, такой, что на поверхности S суммарный потенциал поля этой системы и заряда в точке M_0 равен нулю.

Дополнительно можно указать следующие свойства функции источника:

1. Функция G всюду положительна внутри области V . Действительно, на границе области $G = 0$, а на достаточно малой сфере вблизи точки M_0 функция положительна. Следовательно, в силу принципа максимального значения имеем $G \geq 0$ везде внутри V . Отсюда следует, что

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_S \leq 0.$$

2. Функция G симметрична относительно своих аргументов (без доказательства)

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

В двумерном случае, проводя аналогичные рассуждения, получим функцию источника в виде:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + w(M, M_0), \quad (4.48)$$

где функция w в области σ с границей L удовлетворяет уравнению $\Delta_2 w = 0$, при граничном условии

$$w|_L = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}. \quad (4.49)$$

4.7 Метод электростатических изображений и функция источника уравнения Лапласа для сферы

Как уже отмечалось, в функции источника, возникающей при решении уравнения Лапласа для электростатического потенциала:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + w \quad (4.50)$$

слагаемое w имеет смысл поля системы зарядов, расположенных так, чтобы выполнялось условие

$$w|_S = -\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}. \quad (4.51)$$

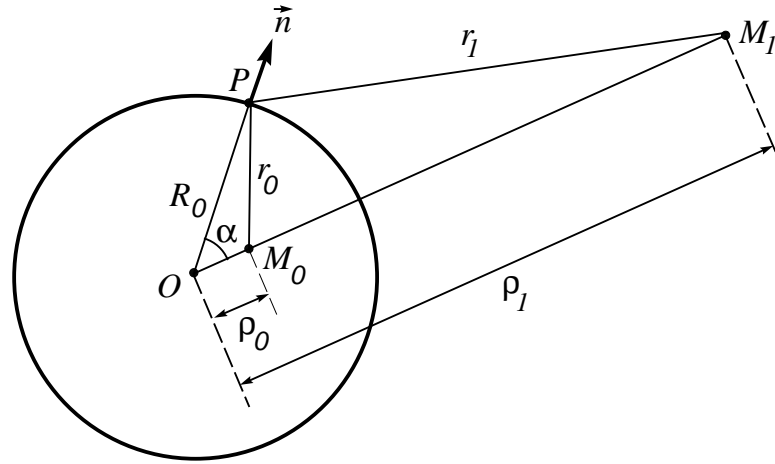


Рис. 4.2: Поиск функции источника уравнения Лапласа для сферы. Точка M_1 – изображение точки M_0

Эта система зарядов называется электростатическим изображением единичного заряда, находящегося в точке M_0 и создающего в отсутствие поверхности S поле с потенциалом $1/(4\pi R)$.

Рассмотрим одну из немногих задач, где поиск изображения, с одной стороны, является нетривиальным, а с другой – может быть проведён до конца.

Дана сфера радиуса R_0 с центром в точке O . Требуется найти функцию источника для первой краевой задачи уравнения Лапласа. В точку M_0 внутри сферы, на расстоянии ρ_0 от её центра, поместим единичный заряд. Пусть P – произвольная точка на сфере. Рассмотрим точку M_1 , лежащую на продолжении луча OM_0 на расстоянии ρ_1 от центра сферы, см. рис. 4.2, такую, что

$$\rho_0 \rho_1 = R_0^2, \quad \rho_0 = OM_0, \quad \rho_1 = OM_1. \quad (4.52)$$

Точка M_1 называется сопряжённой с точкой M_0 , или – изображением точки M_0 . Докажем, что для произвольной точки P сферы расстояния от неё до точек M_0 и M_1 пропорциональны:

$$\frac{PM_0}{PM_1} = \text{const} \quad \forall P.$$

Треугольники POM_0 и M_1OP – подобны, поскольку угол при вершине O один и тот же, а длины прилежащих сторон пропорциональ-

ны, в силу соотношения (4.52):

$$\frac{OM_1}{OP} = \frac{OP}{OM_0}, \quad \text{или} \quad \frac{\rho_1}{R_0} = \frac{R_0}{\rho_0}.$$

Из подобия треугольников следует (здесь $r_0 = PM_0$, $r_1 = PM_1$)

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{R_0}{\rho_1} = \frac{\rho_0}{R_0} = \text{const} \quad \forall P, \quad (4.53)$$

что и требовалось доказать. Из соотношения (4.53) сразу получаем, что

$$\frac{1}{r_0} - \frac{R_0}{\rho_0} \frac{1}{r_1} = 0 \quad \forall P. \quad (4.54)$$

Рассмотрим функцию

$$w = -\frac{1}{4\pi} \frac{R_0}{\rho_0} \frac{1}{r_1},$$

где r_1 есть расстояние от точки M_1 до некоторой текущей точки M внутри сферы. Функция w является гармонической везде внутри сферы, поскольку представляет собой фундаментальное решение уравнения Лапласа, $\Delta w = 0$. С другой стороны, в силу соотношения (4.54) эта функция удовлетворяет на сфере, когда $M = P$, условию (4.51). Очевидно, функция w представляет собой потенциал заряда величиной $(-R_0/\rho_0)$, помещённого в точку M_1 .

Итак, функция

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{R_0}{\rho_0} \frac{1}{r_1} \right), \quad (4.55)$$

где r_0 и r_1 есть расстояния от точек M_0 и M_1 до некоторой текущей точки M , есть искомая функция источника для сферы. Действительно, это функция, гармоническая всюду внутри сферы, кроме точки M_0 , где она имеет особенность вида $1/(4\pi r_0)$. На сфере функция (4.55) обращается в ноль, $G(P, M_0) = 0$.

Таким образом, решение первой краевой задачи уравнения Лапласа ($u|_S = f$) определяется формулой

$$u(M_0) = - \oint_S f \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (4.56)$$

Для его нахождения при заданной функции $f(x, y, z)$ требуется вычислить производную

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) - \frac{R_0}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right]. \quad (4.57)$$

Для вычисления производной нужно рассмотреть точку M , которая скользит по радиальному лучу, и если расстояние от неё до центра сферы равно R (не путать с $R_0!$), то производная $\partial/\partial n$ есть $\partial/\partial R$. Получаем

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_0} = \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{\rho}_0|} = \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \alpha}} = -\frac{R - \rho_0 \cos \alpha}{r_0^3}.$$

Поскольку нам нужна производная на сфере, теперь полагаем $R = R_0$.

Найдём $\cos \alpha$ по теореме косинусов из треугольника OPM_0 :

$$r_0^2 = R_0^2 + \rho_0^2 - 2R_0\rho_0 \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{R_0^2 + \rho_0^2 - r_0^2}{2R_0\rho_0},$$

а также, попутно, и из треугольника OPM_1 :

$$r_1^2 = R_0^2 + \rho_1^2 - 2R_0\rho_1 \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{R_0^2 + \rho_1^2 - r_1^2}{2R_0\rho_1}.$$

Подставляя $\cos \alpha$ в производную, получаем

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_0} \right|_S = -\frac{R_0^2 - \rho_0^2 + r_0^2}{2r_0^3 R_0}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_1} = \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{\rho}_1 - \vec{R}|} = \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{\sqrt{\rho_1^2 + R^2 - 2R\rho_1 \cos \alpha}} = -\frac{R - \rho_1 \cos \alpha}{r_1^3},$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_1} \right|_S = -\frac{R_0^2 - \rho_1^2 + r_1^2}{2r_1^3 R_0}.$$

Подставляя найденные производные в формулу (4.57), получаем после преобразований, с использованием соотношений (4.53), следующее простое выражение

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_S = -\frac{1}{4\pi R_0} \frac{R_0^2 - \rho_0^2}{r_0^3}. \quad (4.58)$$

Подставляя (4.58) в интеграл (4.56), можем записать:

$$u(M_0) = \frac{R_0^2 - \rho_0^2}{4\pi R_0} \oint_S \frac{f(P)}{r_0^3} dS_P. \quad (4.59)$$

Здесь удобно ввести сферическую систему координат. Тогда $f(P) = f(\theta, \varphi)$, точка внутри сферы $M_0(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$, текущая точка на сфере $P(R_0, \theta, \varphi)$, элемент площади $dS_P = R_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Интеграл (4.59) переписывается в виде

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R_0(R_0^2 - \rho_0^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{f(\theta, \varphi)}{(R_0^2 + \rho_0^2 - 2R_0\rho_0 \cos \alpha)^{3/2}}, \quad (4.60)$$

где

$$\cos \alpha = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Формула (4.60) называется интегралом Пуассона для сферы.

Совершенно аналогично можно построить функцию источника для первой *внешней* краевой задачи уравнения Лапласа:

$$G(M, M_1) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{R_0}{\rho_1} \frac{1}{r_0} \right), \quad (4.61)$$

где $r_1 = MM_1$ – расстояние от произвольной точки M до фиксированной точки M_1 , лежащей вне сферы на расстоянии ρ_1 до её центра, $r_0 = MM_0$ – расстояние от M до точки M_0 , лежащей внутри сферы и сопряженной с точкой M_1 .

4.8 Основные задачи, приводящие к уравнению Гельмгольца

Колебания мембраны. Как мы видели, см. параграф 2.2, малые поперечные колебания мембраны в случае отсутствия внешней силы описываются уравнением

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}). \quad (4.62)$$

Для нахождения решения должны быть заданы начальные условия:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (4.63)$$

а также граничное условие. При выводе уравнения (4.62) существенно использовалось условие поперечности колебаний мембраны, реализуемое при достаточно сильном её натяжении. Очевидно, при этом наиболее естественным будет условие закреплённости на границе

$$u|_L = 0, \quad (4.64)$$

где L — кривая, ограничивающая мембрану.

Как мы видели, в данном случае можно искать частное решение методом разделения переменных, в виде произведения координатной и временной частей:

$$u(x, y, t) = v(x, y) \cdot T(t). \quad (4.65)$$

После подстановки решения (4.65) в уравнение колебаний (4.62) и разделения переменных получаем, как обычно, что равенство функций от независимых переменных, в левой части — от времени t , а в правой части — от координат x, y имеет смысл только в случае, если обе эти функции равны константе:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v} = -\lambda, \quad (4.66)$$

где λ — произвольная постоянная.

Таким образом, получаем, что функция координат $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению вида

$$\Delta_2 v + \lambda v = 0. \quad (4.67)$$

Оно называется уравнением Гельмгольца для двумерной задачи.

Установившиеся колебания мембраны. Уравнение колебаний мембраны при наличии внешней силы имеет вид

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t). \quad (4.68)$$

В случае, если внешняя сила зависит от времени по закону синуса или косинуса, её удобно представить в виде

$$f(x, y, t) = a^2 F_0(x, y) e^{i\omega t}, \quad (4.69)$$

здесь ω — циклическая частота колебаний внешней силы. Решение для установившихся колебаний мембраны будем искать в виде

$$u(x, y, t) = v(x, y) e^{i\omega t}, \quad (4.70)$$

где $v(x, y)$ – амплитуда колебаний в точке (x, y) . Подставляя решение (4.70) в уравнение (4.68), получаем, что функция $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_2 v + k^2 v = -F_0(x, y), \quad k = \frac{\omega}{a}, \quad (4.71)$$

то есть двумерному неоднородному уравнению Гельмгольца, с естественным условием закреплённости на границе $v|_L = 0$.

Волны в пространстве. Процесс распространения волн в пространстве описывается уравнением

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad (4.72)$$

где функция $u(x, y, z, t)$ имеет смысл давления или плотности (для акустических волн), компоненты электрического или магнитного полей (для электромагнитных волн), и т.д., a – скорость волны. Отыскивая частное решение методом разделения переменных, в виде произведения координатной и временной частей:

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z) \cdot T(t), \quad (4.73)$$

получим для координатной части уравнение Гельмгольца

$$\Delta v + \lambda v = 0. \quad (4.74)$$

Функция $T(t)$, описывающая зависимость от времени, подчиняется уравнению

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

и при $\lambda > 0$ имеет вид

$$T(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = \tilde{C}_1 \cos \omega t + \tilde{C}_2 \sin \omega t, \quad (4.75)$$

где $\omega = \sqrt{\lambda} a$ имеет смысл частоты колебаний.

Диффузия газа при наличии реакций распада или размножения. Процесс диффузии газа с распадом молекул или атомов диффундирующего вещества (например, радиоактивный распад радона) эквивалентен наличию отрицательных источников. В простейшем случае, когда скорость распада пропорциональна концентрации, в уравнении диффузии

$$u_t = D \Delta u + f(x, y, z, t) \quad (4.76)$$

последнее слагаемое, имеющее смысл удельной мощности источников, примет вид:

$$f(x, y, z, t) = k u(x, y, z, t), \quad (4.77)$$

причём $k < 0$ – за счёт распада концентрация убывает со временем.

Если убыль концентрации в каждой точке компенсируется за счёт притока диффундирующего вещества, возможно формирование установившегося процесса, когда концентрация не меняется со временем, $u = u(x, y, z)$. Уравнение такого процесса

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad \lambda = \frac{k}{D} < 0 \quad (4.78)$$

является уравнением Гельмгольца.

Процесс диффузии, происходящий с размножением диффундирующих частиц (например, диффузия нейтронов при цепной ядерной реакции), описывается теми же уравнениями (4.76) - (4.78), но при этом $k > 0$ и $\lambda > 0$.

4.9 Краевые задачи и фундаментальные решения уравнения Гельмгольца

Таким образом, мы имеем задачу нахождения функции $u(M)$, непрерывной вместе с первыми и вторыми производными в области V с границей S , которая удовлетворяет в области V уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad (4.79)$$

и на границе области подчиняется определённому краевому условию, например, в случае первой краевой задачи – условию $u|_S = f(x, y, z)$.

Как и для уравнения Лапласа, см. параграф 4.5, единственность решения первой краевой задачи для уравнения (4.79), но только при $\lambda < 0$, основывается на принципе максимального значения.

Принцип максимального значения для уравнения Гельмгольца

Функция $u(M)$, непрерывная вместе с 1-й и 2-й производными в области V с границей S и удовлетворяющая в области V урав-

нению Гельмгольца $\Delta u + \lambda u = 0$ при $\lambda < 0$, не может достигать во внутренних точках области V положительных максимальных или отрицательных минимальных значений.

Доказательство производится от противного. Допустим, что в некоторой внутренней точке области $M_0 \in V$ функция достигает положительного максимального значения $u(M_0) > 0$. Поскольку в точке максимума для гладкой функции многих переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \leq 0,$$

получаем, что в этой точке $\Delta u \leq 0$. Но при этом $u(M_0) > 0$ и $\lambda < 0$ – уравнение (4.79) не может удовлетворяться!

Совершенно аналогично для отрицательных минимальных значений имеем $\Delta u \geq 0$, $u(M_0) < 0$ и $\lambda < 0$, и также приходим к противоречию.

Единственность решения первой краевой задачи для уравнения Гельмгольца

Может существовать только одно решение уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ ($\lambda < 0$), определённое и непрерывное вместе с 1-й и 2-й производными в замкнутой области $V + S$, принимающее на границе S заданное значение $u|_S = f$.

Доказательство. Допустим, что существуют две функции, $u_1(x, y, z)$ и $u_2(x, y, z)$, удовлетворяющие поставленным условиям. Рассмотрим разность этих функций, $u \equiv u_1 - u_2$. Очевидно, она также удовлетворяет уравнению Гельмгольца, но с нулевым граничным условием: $u|_S = 0$. Тогда из принципа максимального значения сразу получаем, что $u \equiv 0$ везде внутри области, иначе функция имела бы там положительный максимум, $u > 0$, или отрицательный минимум, $u < 0$, что запрещено. Таким образом, решения u_1 и u_2 совпадают.

Отметим, что для уравнения (4.79) при $\lambda > 0$ единственность решения может не иметь места. Более того, как мы увидим в главе 6, при нулевом граничном условии уравнение вида (4.79) будет иметь бесконечно много решений (задача на собственные функции и собственные значения).

Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

Найдём фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в сферической системе координат. При наличии сферической симметрии, $u = u(r)$, уравнение приобретает вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \lambda u = 0. \quad (4.80)$$

Введём новую неизвестную функцию $v(r) = r u(r)$. Выражая через неё $u(r)$ и подставляя в уравнение (4.80), получим для функции $v(r)$ простое уравнение

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \lambda v = 0. \quad (4.81)$$

Вид его решений зависит от знака константы λ . Рассмотрим обе возможности.

Случай $\lambda < 0$

При этом удобно ввести обозначение: $\lambda \equiv -\varkappa^2$. Уравнение

$$\frac{d^2 v}{dr^2} - \varkappa^2 v = 0$$

имеет общее решение вида

$$v(r) = C_1 e^{-\varkappa r} + C_2 e^{\varkappa r},$$

таким образом, уравнение (4.80) имеет при $\lambda < 0$ следующее общее решение

$$u(r) = C_1 \frac{e^{-\varkappa r}}{r} + C_2 \frac{e^{\varkappa r}}{r}. \quad (4.82)$$

В случае внутренней краевой задачи, если точка $r = 0$ принадлежит области V , дополнительное требование конечности решения устанавливает соотношение между константами: $C_1 = -C_2$, что приводит к решению вида $\text{sh}(\varkappa r)/r$.

В случае внешней краевой задачи экспоненциально растущее при $r \rightarrow \infty$ второе слагаемое в решении (4.82) не имеет физического смысла, поэтому необходимо положить $C_2 = 0$.

Случай $\lambda > 0$

Здесь удобно ввести обозначение: $\lambda \equiv k^2$. Уравнение

$$\frac{d^2v}{dr^2} + k^2 v = 0$$

имеет общее решение вида

$$v(r) = C_1 e^{-ikr} + C_2 e^{ikr},$$

а уравнение (4.80) имеет при $\lambda > 0$ решение

$$u(r) = C_1 \frac{e^{ikr}}{r} + C_2 \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (4.83)$$

которое можно также представить в виде

$$u(r) = \tilde{C}_1 \frac{\cos(kr)}{r} + \tilde{C}_2 \frac{\sin(kr)}{r}. \quad (4.84)$$

Требование конечности в точке $r = 0$ приводит к условию $\tilde{C}_1 = 0$ и решению вида $\sin(kr)/r$.

Физический смысл слагаемых в решении (4.83) легко понять, вернувшись к задаче о распространении волн (4.72). Выбирая зависимость от времени вида $T(t) = \exp(-i\omega t)$, получаем решение волнового уравнения при наличии сферической симметрии в виде

$$u(r, t) = C_1 \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r} + C_2 \frac{e^{-i(\omega t + kr)}}{r}. \quad (4.85)$$

Здесь первое слагаемое, зависящее от фазы $(\omega t - kr)$, соответствует расходящейся от центра сферической волне.

Второе слагаемое, содержащее фазу $(\omega t + kr)$, соответствует сходящейся сферической волне. Следует отметить, что в случае внешней краевой задачи второе слагаемое в решении (4.85) теряет смысл, поскольку не может быть волны, идущей из бесконечности. В этом случае нужно полагать $C_2 = 0$.

При выборе зависимости от времени вида $T(t) = \exp(i\omega t)$ (комплексно сопряжённого решения) смысл слагаемых в решении (4.83) меняется на противоположный, теперь e^{-ikr}/r будет соответствовать расходящейся, а e^{ikr}/r – сходящейся волне.

Линейно независимые слагаемые в решениях (4.82) и (4.83):

$$\frac{e^{\pm\kappa r}}{r}, \quad \frac{e^{\pm ikr}}{r}$$

называются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца в сферических координатах соответственно при $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$.

4.10 Функция точечного источника для уравнения Гельмгольца

Анализ уравнения Гельмгольца, проводимый в данном параграфе, во многом аналогичен тому, что проводился для уравнения Лапласа в параграфе 4.6. Допустим, что поставлена первая краевая задача для уравнения Гельмгольца: найти функцию $u(x, y, z)$, непрерывную вместе с первыми и вторыми производными в области V с границей S , удовлетворяющую в этой области уравнению

$$\Delta u + \lambda u = -F(x, y, z),$$

при граничном условии $u|_S = f_1(x, y, z)$.

Введем следующий оператор \mathcal{L} , действующий на функцию $u(x, y, z)$

$$\mathcal{L}(u) \equiv \Delta u + \lambda u.$$

Тогда уравнение Гельмгольца запишется в виде

$$\mathcal{L}(u) = -F(x, y, z).$$

Используя вторую формулу Грина (4.23), легко получить соотношение

$$\int_V [u \mathcal{L}(v) - v \mathcal{L}(u)] dV = \oint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (4.86)$$

Пусть для определённости $\lambda = -\kappa^2$. Выберем в качестве функции v одно из фундаментальных решений уравнения Гельмгольца

$$v(R) = \frac{e^{-\kappa R}}{R},$$

где R — расстояние между фиксированной точкой M_0 и текущей точкой M . Когда текущая точка M приближается к точке M_0

($R \rightarrow 0$), функция v ведет себя практически, как функция $1/R$. Следовательно, здесь можно использовать результаты, полученные для уравнения Лапласа. Окружая точку M_0 малой сферой S_ε радиуса ε и вырезая из области V внутренность этой сферы, шар K_ε , мы можем использовать уравнение (4.86) в области $V - K_\varepsilon$, где $\mathcal{L}(v) = 0$. Граница области $V - K_\varepsilon$ состоит из наружной поверхности S и сферы S_ε . При этом интегралы по сфере в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ будут совпадать с полученными для уравнения Лапласа, поскольку $\exp(-\varkappa\varepsilon) \rightarrow 1$.

В результате получаем следующую *основную интегральную формулу Грина для уравнения Гельмгольца*

$$\begin{aligned} u(M_0) = & - \frac{1}{4\pi} \int_S \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-\varkappa R}}{R} \right) - \frac{e^{-\varkappa R}}{R} \frac{\partial u}{\partial n}(P) \right] dS - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_V \mathcal{L}(u) \frac{e^{-\varkappa R}}{R} dV. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Далее запишем формулу (4.86) для той же функции u и для вспомогательной функции w , которая не имеет особенностей везде внутри области V , ограниченной поверхностью S , и является решением однородного уравнения Гельмгольца с тем же параметром λ :

$$\mathcal{L}(w) = \Delta w + \lambda w = 0, \quad \lambda = -\varkappa^2.$$

При этом слагаемое $u\mathcal{L}(w)$ в уравнении вида (4.86), но для функций u и w , обращается в ноль. Переписывая это уравнение в форме

$$0 = - \oint_S \left[u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS - \int_V w \mathcal{L}(u) dV,$$

и складывая его почленно с формулой (4.87), имеем

$$\begin{aligned} u(M_0) = & - \oint_S \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + w \right) - \left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + w \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS - \\ & - \int_V \mathcal{L}(u) \left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + w \right) dV. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Введём функцию

$$G(M, M_0) = \frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + w, \quad (4.89)$$

которая называется *функцией точечного источника для уравнения Гельмгольца*. Используя произвольность функции w , выберем её такой, чтобы функция G подчинялась следующим условиям:

1. Она должна вести себя, как $1/(4\pi R)$ при $M \rightarrow M_0$, то есть функция w не должна иметь особенностей в точке M_0 .
2. Функция G должна подчиняться уравнению Гельмгольца $\mathcal{L}(G) = 0$ всюду, кроме точки M_0 (поскольку само уравнение в данной точке не имеет смысла).
3. На граничной поверхности функция G должна обращаться в ноль

$$G(P, M_0) = 0, \quad P \in S.$$

Из условия 3) следует, что на поверхности S функция w должна иметь вид

$$w(P, M_0)|_{P \in S} = -\frac{e^{-\kappa R}}{4\pi R}.$$

Если функция w найдена, то решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения Гельмгольца $\mathcal{L}(u) = -F(M)$ будет иметь вид

$$u(M_0) = - \oint_S u(P) \frac{\partial}{\partial n} G(P, M_0) dS + \int_V G(M, M_0) F(M) dV. \quad (4.90)$$

Контрольные задания к главе 4

1. Найдите условие правильности постановки второй краевой задачи для уравнения Пуассона.
2. Найдите среднее значение на сфере радиуса a функции u , которая подчиняется уравнению Лапласа с граничным условием третьего типа (4.12).
3. Выведите формулу (4.48) для функции точечного источника двумерного уравнения Лапласа.

Глава 5

Нелинейные уравнения математической физики

В настоящей главе дано краткое введение в очень обширную область математической физики – теорию нелинейных уравнений – которая наиболее интенсивно развивалась во второй половине XX века. Излагаются основы анализа систем квазилинейных уравнений методом характеристик, затем такой анализ проводится для нескольких конкретных примеров, подробно анализируется модель одномерного адиабатического течения газа. Излагается алгоритм численного решения систем квазилинейных уравнений методом характеристик.

Последний параграф главы посвящён интереснейшей странице науки о нелинейных уравнениях математической физики – теории уединённых нелинейных волн. Дана историческая справка об открытии уединённой волны. Сформулировано уравнение Кортевега–де Фриса (КдФ), проанализирован физический смысл его слагаемых, описывающих эффекты дисперсии и нелинейности. Найдено решение уравнения КдФ, описывающее устойчивую уединённую волну. Приведены некоторые примеры уединённых волн в природе.

5.1 Системы квазилинейных уравнений

Вспомним самое начало курса, см. параграф 1.1, когда при перечислении основных типов уравнений в частных производных было выделено квазилинейное уравнение второго порядка для функции

двух переменных, записанное в следующем виде:

$$a_{11}(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + 2a_{12}(\dots) u_{xy} + a_{22}(\dots) u_{yy} + g(\dots) = 0, \quad (5.1)$$

где многоточие означает тот же набор аргументов, что и у первого коэффициента. На первый взгляд, уравнение имеет слишком общий вид, чтобы можно было провести какое-либо его рассмотрение. Тем не менее, существует частный случай уравнения (5.1), позволяющий продвинуться дальше в его анализе, используя метод характеристик. Это случай, когда среди аргументов функций a_{11}, \dots, g нет самой искомой функции $u(x, y)$. При этом частные производные u_x, u_y объявляются новыми неизвестными функциями $v(x, y), w(x, y)$:

$$u_x \equiv v, \quad u_y \equiv w, \quad (5.2)$$

и уравнение (5.1) заменяется системой уравнений первого порядка для этих функций

$$\begin{cases} v_y - w_x = 0, \\ a_{11}v_x + a_{12}v_y + a_{12}w_x + a_{22}w_y + g = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

где $a_{11} = a_{11}(x, y, v, w)$, и т.д. Эта система уравнений является, очевидно, частным случаем системы

$$\begin{cases} A_1v_x + B_1v_y + C_1w_x + D_1w_y = E_1, \\ A_2v_x + B_2v_y + C_2w_x + D_2w_y = E_2, \end{cases} \quad (5.4)$$

где $A_1 = A_1(x, y, v, w)$, и т.д. Системы вида (5.4) называются квазилинейными.

Вспомним понятие *характеристики* для уравнения в частных производных. В ходе приведения уравнения второго порядка к каноническому виду, см. параграф 1.1, мы анализировали линейное уравнение первого порядка следующего вида

$$A(x, y) v_x + B(x, y) v_y = 0. \quad (5.5)$$

Сравнивая его с определением производной функции $v = v(x, y)$ в точке (x, y) по направлению единичного вектора $\vec{\tau} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \cos \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial v}{\partial y},$$

видим, что его левую часть можно рассматривать, как производную функции $v(x, y)$ в точке (x, y) по направлению единичного вектора с компонентами $\{A/N, B/N\}$, где $N = \sqrt{A^2 + B^2}$.

С другой стороны, решение уравнения (5.5), функция $v = v(x, y)$, представляет собой уравнение поверхности. Линия уровня L для этой поверхности, $v(x, y)|_L = \text{const}$, определяется уравнением $dv|_L = 0$, или

$$v_x dx + v_y dy = 0. \quad (5.6)$$

Из (5.5) и (5.6) получаем уравнение *характеристики*, то есть линии на плоскости (x, y) , в которую проектируется линия уровня L :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y} = \frac{B(x, y)}{A(x, y)}. \quad (5.7)$$

Очевидно, что касательная к характеристике в точке (x, y) совпадает по направлению с вектором $\{A/N, B/N\}$. Находя решение уравнения (5.7) $y = y(x, C)$, содержащее одну произвольную постоянную C , мы тем самым находим семейство характеристик $v(x, y) = C$, то есть семейство линий уровня, однозначно определяющее поверхность $v = v(x, y)$.

Аналогичный ход рассуждений применим и в случае, когда уравнение вида (5.5) является квазилинейным:

$$A(x, y, v) v_x + B(x, y, v) v_y = 0. \quad (5.8)$$

Введём квазилинейный оператор

$$h[v] = A(x, y, v) v_x + B(x, y, v) v_y. \quad (5.9)$$

Направление $\vec{\tau} = \{A/N, B/N\}$, $N = \sqrt{A^2 + B^2}$, называется характеристическим направлением оператора $h[v]$ в точке (x, y) . Заметим, что, в отличие от линейного оператора, входившего в уравнение (5.5), квазилинейный оператор (5.9) будет иметь характеристические направления, зависящие от функции v .

Для каждой функции $v(x, y)$ семейство характеристик $y(x)$, являющихся решениями уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x, y, v)}{A(x, y, v)}, \quad (5.10)$$

представляет собой набор линий L , на которых $v(x, y)|_L = \text{const}$, а оператор $h[v] = 0$.

Квазилинейный оператор от двух функций

$$H[v, w] = h_1[v] + h_2[w] = A v_x + B v_y + C w_x + D w_y, \quad (5.11)$$

где $A = A(x, y, v, w)$, и т.д., не будет в общем случае иметь характеристических направлений и характеристик, если операторы h_1 и h_2 соответствуют производным по различным направлениям, то есть векторы $\vec{\tau}_1 = \{A/N_1, B/N_1\}$, $N_1 = \sqrt{A^2 + B^2}$, и $\vec{\tau}_2 = \{C/N_2, D/N_2\}$, $N_2 = \sqrt{C^2 + D^2}$, не совпадают.

Условие совпадения направлений дифференцирования $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$, то есть наличия характеристических направлений и характеристик у оператора $H[v, w]$, имеет вид

$$\frac{C}{A} = \frac{D}{B}, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 0. \quad (5.12)$$

Уравнение характеристик имеет тот же вид $dy/dx = B/A$, или $dy/dx = D/C$.

Такой оператор можно представить в характеристическом виде:

$$H[v, w] = \frac{\partial v}{\partial \tau} + k \frac{\partial w}{\partial \tau}, \quad (5.13)$$

где $\partial/\partial \tau$ есть производная по направлению касательной к характеристике:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y}, \quad (5.14)$$

а коэффициент

$$k = k(x, y, v, w) = \frac{C}{A} = \frac{D}{B}. \quad (5.15)$$

Если имеется два квазилинейных оператора от двух функций:

$$\begin{aligned} H_1[v, w] &= A_1 v_x + B_1 v_y + C_1 w_x + D_1 w_y, \\ H_2[v, w] &= A_2 v_x + B_2 v_y + C_2 w_x + D_2 w_y, \end{aligned} \quad (5.16)$$

для каждого из которых условия вида (5.12), вообще говоря, отсутствуют, следовательно, операторы H_1 , H_2 не имеют характеристик,

то из них можно построить другие два оператора, которые будут иметь характеристики:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_1[v, w] &= H_1[v, w] + \lambda_1 H_2[v, w], \\ \tilde{H}_2[v, w] &= H_1[v, w] + \lambda_2 H_2[v, w].\end{aligned}\quad (5.17)$$

Величины $\lambda_i = \lambda_i(x, y, v, w)$, называемые характеристическими значениями пары операторов H_1, H_2 , определяются, как корни квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} A_1 + \lambda A_2 & B_1 + \lambda B_2 \\ C_1 + \lambda C_2 & D_1 + \lambda D_2 \end{vmatrix} = 0.\quad (5.18)$$

Для каждого из операторов \tilde{H}_1, \tilde{H}_2 имеется своё семейство характеристик, определяемое соответственно из уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_1 + \lambda_1 B_2}{A_1 + \lambda_1 A_2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B_1 + \lambda_2 B_2}{A_1 + \lambda_2 A_2}.\quad (5.19)$$

Операторы можно представить в характеристическом виде:

$$\tilde{H}_1[v, w] = \frac{\partial v}{\partial \tau_1} + k_1 \frac{\partial w}{\partial \tau_1}, \quad \tilde{H}_2[v, w] = \frac{\partial v}{\partial \tau_2} + k_2 \frac{\partial w}{\partial \tau_2},\quad (5.20)$$

где $\partial/\partial \tau_{1,2}$ есть производные по направлениям касательных к характеристикам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau_1} &= (A_1 + \lambda_1 A_2) \frac{\partial}{\partial x} + (B_1 + \lambda_1 B_2) \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau_2} &= (A_1 + \lambda_2 A_2) \frac{\partial}{\partial x} + (B_1 + \lambda_2 B_2) \frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}\quad (5.21)$$

а коэффициенты

$$k_i = k_i(x, y, v, w) = \frac{C_1 + \lambda_i C_2}{A_1 + \lambda_i A_2} = \frac{D_1 + \lambda_i D_2}{B_1 + \lambda_i B_2} \quad (i = 1, 2).\quad (5.22)$$

В зависимости от характеристических значений существует следующая классификация пар операторов H_1, H_2 :

- 1) если величины λ_1 и λ_2 вещественны и различны, пара операторов называется гиперболической;
- 2) если величины λ_1 и λ_2 комплексные, пара операторов называется эллиптической;

3) если $\lambda_1 = \lambda_2$, пара операторов называется параболической.

Вернёмся к системе уравнений (5.4), которая с учётом (5.16) может быть переписана в виде:

$$H_1[v, w] = E_1, \quad H_2[v, w] = E_2. \quad (5.23)$$

Для системы сохраняется то же название, что и для пары операторов: гиперболическая, эллиптическая либо параболическая.

Используя соотношения (5.17)–(5.22), можно заменить систему (5.23) на эквивалентную ей, которая называется характеристической формой системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau_1} + k_1 \frac{\partial w}{\partial \tau_1} &= E_1 + \lambda_1 E_2, \\ \frac{\partial v}{\partial \tau_2} + k_2 \frac{\partial w}{\partial \tau_2} &= E_1 + \lambda_2 E_2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Метод характеристик позволяет, после преобразования системы уравнений (5.4) к характеристической форме (5.24):

- обнаруживать существенно новые, по сравнению с линейными уравнениями, явления, например, образование разрывов в решениях;
- разработать эффективный метод приближенного численного решения систем квазилинейных уравнений.

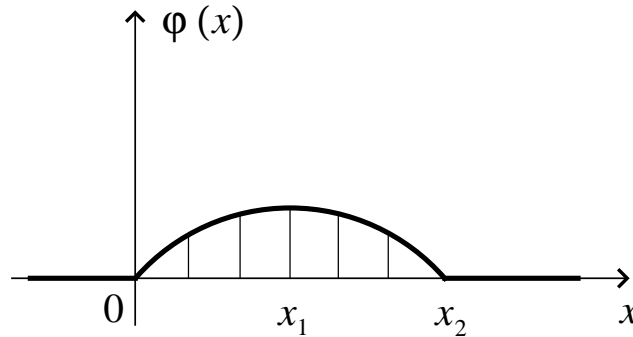
5.2 Примеры образования разрывов в решениях

Рассмотрим два простых примера образования разрывов в решениях квазилинейных уравнений. Используя метод характеристик, эти разрывы можно обнаружить, не находя самих решений.

Пример 1

Уравнение для функции двух переменных $u(x, t)$ имеет вид:

$$u_t + u u_x = 0. \quad (5.25)$$

Рис. 5.1: Начальное условие $\varphi(x)$ для функции $u(x, t)$

В механике сплошных сред такое уравнение описывает свободное одномерное движение среды, здесь t – время, x – координата, $u(x, t)$ – поле скоростей сплошной среды. Сравнивая (5.25) с уравнением (5.8), находим коэффициенты: $A(x, t, u) = 1$, $B(x, t, u) = u$. Уравнение характеристик (5.10) имеет вид: $dx/dt = u$. С другой стороны, производная по направлению касательной к характеристике, согласно (5.14), равна

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u = \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u = 0, \quad (5.26)$$

где равенство нулю очевидным образом следует из того, что мы получили здесь левую часть уравнения (5.25). Таким образом, $u = \text{const}$ вдоль характеристики, и уравнение $dx/dt = u = \text{const}$ означает, что характеристики являются *прямыми линиями*.

Пусть для уравнения (5.25) поставлена задача Коши, то есть задано начальное условие

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (5.27)$$

где функция $\varphi(x)$ имеет вид, изображённый на рис. 5.1. Семейство характеристик уравнения (5.25) построено на рис. 5.2. Характеристики, выходящие из точек на оси $t = 0$ при $x \leq 0$ и $x \geq x_2$, где функция $\varphi(x) = 0$, очевидно, есть прямые, параллельные оси t . Характеристики, выходящие из точек $0 < x \leq x_1$, есть расходящиеся лучи, поскольку их наклон $dx/dt = u = \varphi(x)$ возрастает на этом интервале. Самое интересное происходит с характеристиками, выходящими из точек $x_1 < x < x_2$. На этом интервале функция $\varphi(x)$ убывает, и наклон характеристик уменьшается, следовательно, они будут пересекаться! В некоторой точке (x_c, t_c) , где произойдет пересечение

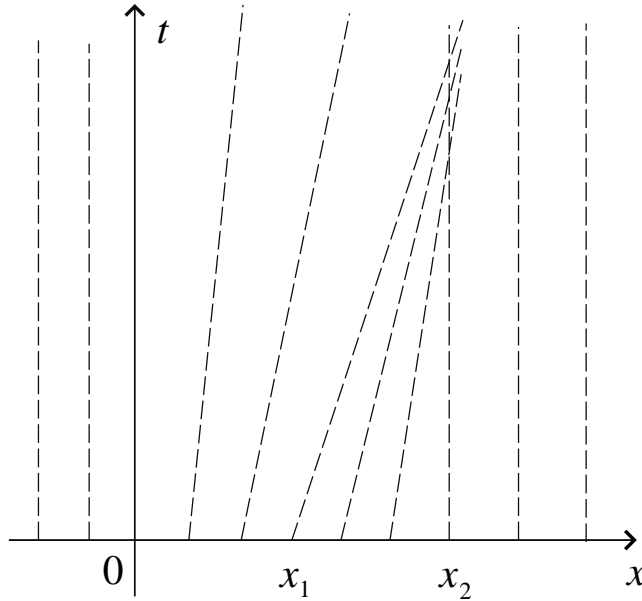


Рис. 5.2: Семейство характеристик уравнения (5.25) при начальном условии (5.27)

характеристик (следует брать минимальное значение t_c), функция $u(x, t)$ будет иметь два значения. Но при этом

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Big|_{t=\text{const}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_1 - u_2}{\Delta x} \rightarrow \infty, \quad (5.28)$$

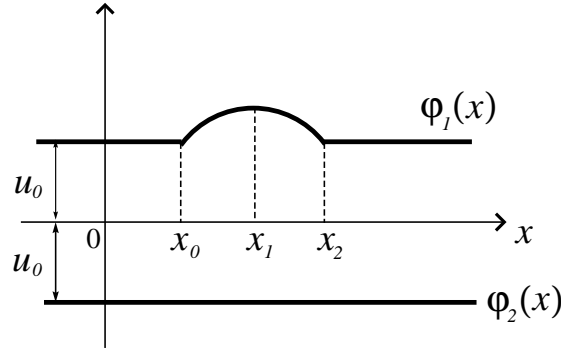
а следовательно, в соответствии с уравнением (5.25), $\partial u / \partial t \rightarrow \infty$. Эта ситуация носит название *градиентная катастрофа*, или разрыв в решении.

Пример 2

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений

$$\begin{cases} u_t + (\alpha u + \beta v) u_x = 0, \\ v_t + (\alpha v + \beta u) v_x = 0, \end{cases} \quad (5.29)$$

где $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, $\alpha > \beta$. Эта система имеет вид (5.4), со значениями коэффициентов: $A_1 = 1$, $B_1 = \alpha u + \beta v$, $C_1 = D_1 = E_1 = 0$, $A_2 = B_2 = 0$, $C_2 = 1$, $D_2 = \alpha v + \beta u$, $E_2 = 0$. Поскольку условия (5.12) выполняются, у системы (5.29) существуют характе-

Рис. 5.3: Начальные условия $\varphi_{1,2}(x)$ для функций $u(x, t)$, $v(x, t)$

ристики, которые определяются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha u + \beta v & (1\text{-е семейство}), \\ \frac{dx}{dt} &= \alpha v + \beta u & (2\text{-е семейство}). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Преобразуя систему (5.29) к характеристическому виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau_1} &= 0, & \frac{\partial}{\partial \tau_1} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha u + \beta v) \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial \tau_2} &= 0, & \frac{\partial}{\partial \tau_2} &= \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha v + \beta u) \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

замечаем, что вдоль характеристик 1-го семейства $u = \text{const}$, а вдоль характеристик 2-го семейства $v = \text{const}$.

Пусть для системы (5.29) поставлена задача Коши, то есть заданы начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad v(x, 0) = \varphi_2(x), \quad (5.32)$$

где функции $\varphi_{1,2}(x)$ имеют вид, изображённый на рис. 5.3.

Для характеристик 1-го семейства, с учётом условия $\alpha > \beta$, имеем для любого x :

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \alpha \varphi_1(x) + \beta \varphi_2(x) > 0, \quad (5.33)$$

следовательно, начальное возмущение функции $u(x, t)$ распространяется вправо. Для характеристик 2-го семейства имеем:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \alpha \varphi_2(x) + \beta \varphi_1(x), \quad (5.34)$$

при этом за пределами интервала (x_0, x_2) производная в (5.34) отрицательна, то есть характеристики 2-го семейства при $t = 0$ имеют наклон влево. Внутри интервала (x_0, x_2) знак производной зависит от соотношения величин u_0 и $\varphi_1(x)$ вблизи максимума, так, при соотношении $\varphi_1(x_1) > (\alpha/\beta) u_0$ часть характеристик, начинающихся около точки x_1 , будет иметь наклон вправо. Однако, поскольку на всех характеристиках 2-го семейства $v(x, t) = \text{const}$, а начальное условие для этой функции $v(x, 0) = -u_0$, получаем, что $v(x, t) = -u_0$ везде. Таким образом, возвращаясь к характеристикам 1-го семейства, получаем, что они являются прямыми линиями:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha u - \beta u_0 = \text{const}. \quad (5.35)$$

При этом характеристики, начинающиеся на отрезке (x_0, x_1) , где функция $\varphi_1(x)$ возрастает, есть расходящиеся лучи, а те, что начинаются на отрезке (x_1, x_2) , где функция $\varphi_1(x)$ убывает, будут сходящимися, следовательно, будут пересекаться. В точке (x_c, t_c) , с минимальным t_c , где произойдет пересечение характеристик, производные u_x и u_t , как и в Примере 1, обращаются в бесконечность, то есть происходит градиентная катастрофа. С этого момента в решении образуется разрыв.

5.3 Одномерные адиабатические течения газа

К уравнениям динамики одномерного адиабатического течения газа относятся: уравнение непрерывности, или закон сохранения массы в дифференциальной форме:

$$\rho_t + v \rho_x + \rho v_x = 0, \quad (5.36)$$

уравнение Эйлера, обобщающее 2-й закон Ньютона на непрерывные среды:

$$v_t + v v_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0, \quad (5.37)$$

а также уравнение адиабатического процесса:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} \equiv k, \quad (5.38)$$

где $v(x, t)$, $\rho(x, t)$, $p(x, t)$ – соответственно поля скоростей, плотностей и давлений среды, γ – показатель адиабаты. Удобно перейти к двум независимым функциям $v(x, t)$, $c(x, t)$, описывающим поля скоростей среды и скоростей звука в среде. Скорость звука c при адиабатическом (изоэнтропическом) процессе определяется выражением

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma k \rho^{\gamma-1} \equiv c^2. \quad (5.39)$$

Вычисляя частные производные от (5.39) по t и по x , получаем

$$\gamma(\gamma - 1) k \rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 2c \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \gamma(\gamma - 1) k \rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 2c \frac{\partial c}{\partial x},$$

откуда для последнего слагаемого в (5.37) имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} k \frac{\partial}{\partial x} \rho^\gamma = \frac{2}{\gamma - 1} c \frac{\partial c}{\partial x}.$$

С учётом этих соотношений исходные уравнения динамики преобразуются к виду

$$\begin{aligned} v_t + v v_x + \frac{2}{\gamma - 1} c c_x &= 0, \\ c_t + v c_x + \frac{\gamma - 1}{2} c v_x &= 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Видно, что условие (5.12) здесь не выполняется, то есть система не имеет характеристик. Для приведения её к характеристическому виду решим уравнение (5.18), имеющее в данном случае вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & v + \lambda(\gamma - 1)c/2 \\ \lambda & 2c/(\gamma - 1) + \lambda v \end{vmatrix} = 0, \quad (5.41)$$

откуда находим характеристические значения: $\lambda_{1,2} = \pm 2/(\gamma - 1)$. Из (5.21) - (5.22) получаем, что $k_{1,2} = \lambda_{1,2} = \pm 2/(\gamma - 1)$,

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} = \frac{\partial}{\partial t} + (v + c) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau_2} = \frac{\partial}{\partial t} + (v - c) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (5.42)$$

и уравнения (5.24) приобретают вид:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau_1} + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{\partial c}{\partial \tau_1} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau_2} - \frac{2}{\gamma - 1} \frac{\partial c}{\partial \tau_2} = 0. \quad (5.43)$$

Итак, вдоль каждой характеристики 1-го семейства имеем:

$$v + \frac{2}{\gamma - 1} c = \text{const},$$

а вдоль каждой характеристики 2-го семейства:

$$v - \frac{2}{\gamma - 1} c = \text{const}.$$

Введём вместо функций $v(x, t)$ и $c(x, t)$ новые функции, постоянные вдоль характеристик:

$$r = v + \frac{2}{\gamma - 1} c, \quad s = v - \frac{2}{\gamma - 1} c. \quad (5.44)$$

Подставляя в уравнения $\partial r / \partial \tau_1 = 0$ и $\partial s / \partial \tau_2 = 0$ производные (5.42) и выражая $v \pm c$ через r и s : $v = (r + s)/2$, $c = (\gamma - 1)(r - s)/4$:

$$\begin{aligned} v + c &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} \right) r + \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4} \right) s, \\ v - c &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4} \right) r + \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} \right) s, \end{aligned} \quad (5.45)$$

получаем систему

$$\begin{cases} r_t + (\alpha r + \beta s) r_x = 0, \\ s_t + (\alpha s + \beta r) s_x = 0, \end{cases} \quad (5.46)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}.$$

Таким образом, задача свелась к системе (5.29), исследованной нами в Примере 2 предыдущего параграфа. Пусть для иллюстрации начальные условия для $r(x, t)$, $s(x, t)$ есть функции $\varphi_{1,2}(x)$, см. рис. 5.3. При этом функция $s(x, t)$ остаётся константой, $s(x, t) = -u_0$, а в решении для $r(x, t)$ наступит разрыв в момент t_c . Следовательно, и функция $v = (r + s)/2$ будет разрывной.

Физическая интерпретация такого поведения решения видна из формулы $v = (r - u_0)/2$, а именно, получаем, что точки волн с большими значениями амплитуды r будут двигаться быстрее, чем точки с меньшими r . Передний фронт волны становится круче, см. рис. 5.4. В момент $t = t_c$ получаем $\partial r / \partial x \rightarrow \infty$, и передний фронт становится вертикальным. Это и есть градиентная катастрофа.

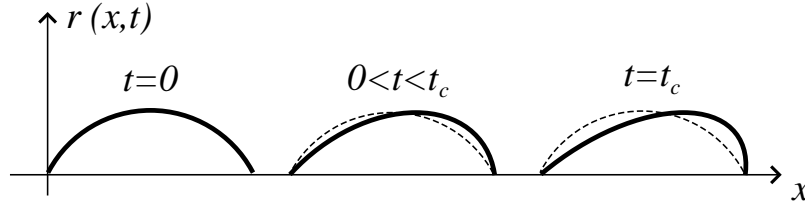


Рис. 5.4: Укрупнение переднего фронта волны и градиентная катастрофа в момент $t = t_c$

5.4 Численное решение систем квазилинейных уравнений методом характеристик

Рассмотрим один класс гиперболических систем квазилинейных уравнений, где коэффициенты не зависят от x, y :

$$\begin{cases} A_1(u, v) u_x + B_1(u, v) u_y + C_1(u, v) v_x + D_1(u, v) v_y = 0, \\ A_2(u, v) u_x + B_2(u, v) u_y + C_2(u, v) v_x + D_2(u, v) v_y = 0. \end{cases} \quad (5.47)$$

По разработанной ранее схеме приведём систему к характеристическому виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau_1} + k_1(u, v) \frac{\partial v}{\partial \tau_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau_2} + k_2(u, v) \frac{\partial v}{\partial \tau_2} = 0. \quad (5.48)$$

Выберем на оси x дискретную последовательность точек – *узловые точки нулевого слоя*. Пусть переменная y есть время, и заданы начальные условия, тогда в узловых точках известны значения функций u и v . В каждой из этих точек можно определить направления характеристик обоих семейств:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{A_1 + \lambda_1 A_2}{B_1 + \lambda_1 B_2}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{A_1 + \lambda_2 A_2}{B_1 + \lambda_2 B_2}. \quad (5.49)$$

Через каждую узловую точку нулевого слоя проводим в направлениях (5.49) прямые до пересечения с соседними, см. рис. 5.5. Это позволяет нам определить набор *узловых точек первого слоя*. При этом из системы (5.48) можно приближенно найти значения функций u и v в этих точках. Пусть прямые из соседних точек 1 и 2 нулевого слоя пересекаются в точке 3, принадлежащей первому слою. Обозначим через u_i, v_i ($i = 1, 2, 3$) значения функций в этих точках. Значения $u_{1,2}$ и $v_{1,2}$ известны.

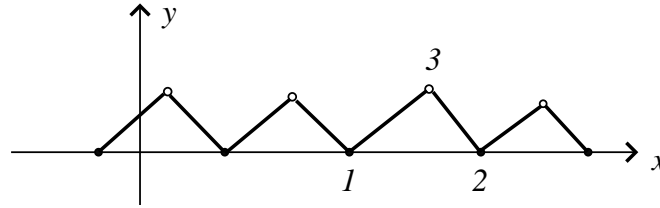


Рис. 5.5: Построение массива узловых точек первого слоя (светлые кружки) на основе массива узловых точек нулевого слоя (чёрные кружки)

Систему уравнений (5.48) можно заменить на такую:

$$\begin{aligned} du + k_1(u, v) dv &= 0 && \text{(вдоль характеристик 1-го семейства),} \\ du + k_2(u, v) dv &= 0 && \text{(вдоль характеристик 2-го семейства).} \end{aligned}$$

Заменим дифференциалы конечными приращениями:

$$\begin{aligned} du &\simeq u_3 - u_1, & dv &\simeq v_3 - v_1 && \text{(на линии 1-3),} \\ du &\simeq u_3 - u_2, & dv &\simeq v_3 - v_2 && \text{(на линии 2-3),} \end{aligned}$$

при этом получаем систему

$$\begin{cases} u_3 + k_1(u_1, v_1) v_3 = u_1 + k_1(u_1, v_1) v_1, \\ u_3 + k_2(u_2, v_2) v_3 = u_2 + k_2(u_2, v_2) v_2. \end{cases} \quad (5.50)$$

Отсюда находим u_3 и v_3 , и так для каждой узловой точки первого слоя. Затем так же рассчитываем второй слой, и т.д.

5.5 Уравнение Кортевега–де Фриса. Солитонные решения

По-видимому, интереснейшей страницей науки о нелинейных уравнениях математической физики является теория уединённых нелинейных волн. Наиболее интенсивное развитие эта теория получила во второй половине XX века, однако начало истории относится ещё к первой половине XIX века. Точно известны как время и место первого зафиксированного наблюдения уединённой волны, так и человек, увидевший и описавший её.

Шотландский инженер-кораблестроитель Джон Скотт Рассел (1808–1882) в августе 1834 г. занимался исследованием движения

барж по каналу, соединяющему Эдинбург и Глазго, с целью перехода с лошадиной тяги на паровую. По описанию Рассела, когда баржа, которую тянула пара лошадей, резко остановилась, водяной холм перед её носом оторвался от баржи и продолжил быстрое движение вперёд в виде устойчивой волны неизменного профиля. Рассел преследовал эту волну, проскакав на лошади около двух километров, и убедился, что она двигалась, практически не меняя скорости и округлой формы, очень медленно уменьшаясь по высоте, пока не потерялась в изгибах канала.

Рассел серьёзно заинтересовался обнаруженным явлением, он продолжал наблюдения и даже ставил эксперименты на уменьшенных моделях каналов. В 1844 г. была опубликована работа Рассела “Доклад о волнах”, в которой он дал подробное описание открытой им *большой уединённой волны* (great solitary wave). Однако эта работа не вызвала интереса у специалистов по физике волн, поскольку уединённая волна никак не следовала из *линейных* волновых уравнений, которыми тогда занимались учёные. Эйри и Стокс подвергли сомнению результаты экспериментов Рассела и критически отнеслись к возможности существования устойчивой уединённой волны.

Прошло более 60 лет после открытия уединённой волны, когда наконец в 1895 г. известный голландский физик и механик Дидерик Иоханнес Кортевег (1848–1941) и его ученик Густав де Фрис сформулировали уравнение, описывающее такую волну на поверхности воды в мелком канале. Если h – глубина канала, а уровень поверхности воды над дном в точке x в момент t записать, как $h + u(x, t)$, то уравнение Кортевега–де Фриса (КдФ–уравнение) для функции $u(x, t)$ имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(u + \frac{3}{4h} u^2 + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (5.51)$$

где $v_0 = \sqrt{gh}$, g – ускорение свободного падения. Второй член в скобках является нелинейным. Как мы видели в разделах 5.2 и 5.3, нелинейность приводит к зависимости скорости волны от амплитуды и к укрупнению её переднего фронта. С другой стороны, последний член в скобках обуславливает дисперсию, то есть зависимость скорости волны от её длины.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда оба эти фактора, и нели-

нейность и дисперсия, несущественны. Из уравнения (5.51) видно, что эффект нелинейности мал (второе слагаемое в скобках много меньше первого), если высота волн значительно меньше глубины канала, $u/h \ll 1$. В свою очередь дисперсия несущественна, если можно пренебречь последним слагаемым. Для волн с длиной λ можно по порядку величины оценить производную выражением: $\partial^2 u / \partial x^2 \sim u / \lambda^2$. Следовательно, условие малости эффектов дисперсии имеет вид: $h^2 / \lambda^2 \ll 1$, то есть волны должны быть достаточно длинными. Если оба эти предельных случая, невысоких и длинных волн, реализуются, то уравнение (5.51) упрощается:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (5.52)$$

Его общее решение очевидно:

$$u(x, t) = f(x - v_0 t),$$

где f – произвольная функция, то есть уравнение (5.52) описывает волну, движущуюся со скоростью v_0 в положительном направлении оси x . Таким образом, параметр v_0 в уравнении (5.51) есть скорость волны, которую бы она имела при отсутствии эффектов нелинейности и дисперсии.

В случае, если из этих двух эффектов существенна только нелинейность, уравнение (5.51) приобретает вид

$$u_t + \left(\frac{3v_0}{2h} u + v_0 \right) u_x = 0. \quad (5.53)$$

Легко видеть, что уравнение (5.53) есть частный случай системы (5.29) из разд. 5.2, когда вторая функция – константа, что согласуется с рассмотренными там начальными условиями. Таким образом, нелинейность приведёт к укрупнению переднего фронта волн и градиентной катастрофе, см. рис. 5.4. Мы проанализируем также эффект дисперсии без нелинейности, но это удобнее сделать позднее.

Вернёмся к уравнению (5.51). Отметим, что его иногда записывают в системе отсчёта, движущейся вправо со скоростью v_0 . В этой системе в уравнении отсутствует первое слагаемое в скобках.

Будем искать решение уравнения (5.51) в форме устойчивой уединённой волны Рассела вида:

$$u = u(\xi), \quad \xi = \frac{x - v t}{\ell}, \quad (5.54)$$

где v – скорость волны (вообще говоря, не совпадающая с v_0), ℓ – некоторая величина, имеющая размерность длины. Из условия уединённости волны, в частности, следует, что $u, u', u''|_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$.

Подставляя решение (5.54) в уравнение (5.51):

$$-\frac{v}{\ell} u' + \frac{v_0}{\ell} \frac{d}{d\xi} \left(u + \frac{3}{4h} u^2 + \frac{h^2}{6\ell^2} u'' \right) = 0,$$

где штрихами обозначены производные по переменной ξ , видим, что в уравнении выделяется полная производная

$$\frac{d}{d\xi} \left[- \left(\frac{v}{v_0} - 1 \right) u + \frac{3}{4h} u^2 + \frac{h^2}{6\ell^2} u'' \right] = 0. \quad (5.55)$$

Обозначим

$$\frac{v}{v_0} - 1 \equiv \frac{a}{2h}. \quad (5.56)$$

Знак параметра a пока не определён, поскольку неизвестно соотношение между v и v_0 . Итак, из (5.55) выделяется первый интеграл КдФ–уравнения (5.51):

$$\frac{2h^3}{3\ell^2} u'' + 3u^2 - 2au = \text{const}. \quad (5.57)$$

Из условия, что функция и её производные зануляются на бесконечности, сразу получаем, что константа в (5.57) равна нулю.

Вот теперь удобно вернуться к упоминавшемуся случаю, когда существенна только дисперсия. Пренебрегая нелинейным членом в уравнении (5.51), попробуем искать его решение в виде устойчивой уединённой волны (5.54), при этом мы также придём к уравнению (5.57), но без второго, нелинейного члена. Переходя из неподвижной системы отсчёта K в систему K' , движущуюся вправо со скоростью v ($x' = x - vt = \ell\xi$), перепишем получающееся уравнение в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{6}{h^2} \left(1 - \frac{v}{v_0} \right) u = 0. \quad (5.58)$$

Прежде всего видно, что уравнение (5.58) будет иметь ограниченные решения только при $v < v_0$. Вводя волновое число k :

$$\frac{6}{h^2} \left(1 - \frac{v}{v_0} \right) \equiv k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2, \quad (5.59)$$

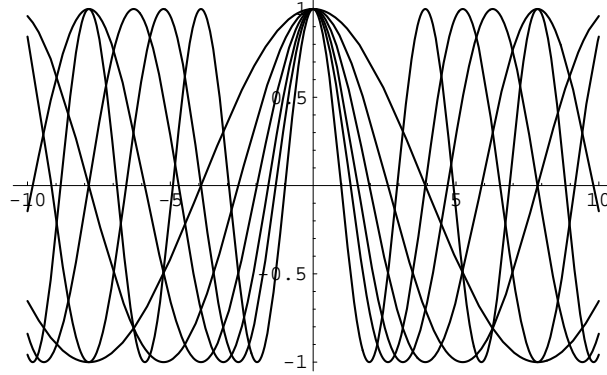


Рис. 5.6: Набор сфазированных монохроматических волн

можем записать общее решение уравнения (5.58) в виде

$$u(x') = C_1 \cos kx' + C_2 \sin kx'. \quad (5.60)$$

Таким образом, как видно из (5.59), волны, описываемые уравнением (5.58), действительно обладают дисперсией – скорость волны относительно неподвижной системы отсчёта K зависит от длины волны:

$$v = v_0 \left(1 - \frac{2\pi^2}{3} \frac{h^2}{\lambda^2} \right). \quad (5.61)$$

Наибольшую скорость имеют длинные волны, причём $v \rightarrow v_0$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Нетрудно показать, что не может существовать решений уравнения (5.58) в виде устойчивой уединённой волны. Поскольку в решении (5.54) v является свободным параметром, можно взять набор решений с разными v , получая монохроматические волны (5.60) с разными λ . Из этих монохроматических решений можно построить локализованную волну, так называемый *волновой пакет*. Для этого нужно взять суперпозицию волн (5.60) со значениями волновых чисел, лежащими в некотором интервале $k \div k + \Delta k$, следовательно, длины волн будут лежать в интервале $\lambda \div \lambda + \Delta \lambda$. Волны должны быть сфазированы так, чтобы в одной точке их максимумы совпадали, см. рис. 5.6. В точке совпадения x_0 волны усиливают друг друга, и результирующая волна будет иметь максимум. Чем дальше от x_0 , тем сильнее волны взаимно гасят друг друга, в результате получается волна, практически целиком сосредоточенная в ограниченной области – волновой пакет, см. рис. 5.7. Однако при наличии дисперсии вида (5.61) монохроматические волны (5.60) с разными λ движутся

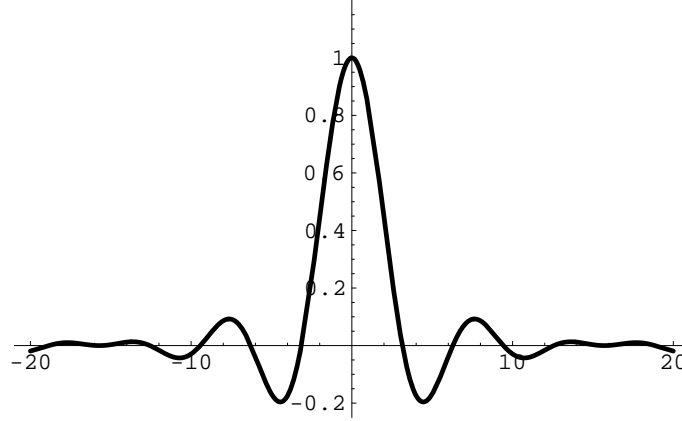


Рис. 5.7: Волновой пакет

с различными скоростями, что неизбежно приведет к расплыванию пакета. Таким образом, при наличии дисперсии без нелинейности существование устойчивой уединённой волны невозможно.

Вернёмся к уравнению (5.57). Удобно перейти к безразмерной функции

$$y(\xi) = \frac{u(\xi)}{a}, \quad (5.62)$$

тогда все константы в уравнении объединяются в один безразмерный параметр, который удобно определить так:

$$\frac{2h^3}{3\ell^2 a} \equiv \frac{1}{2s}, \quad (5.63)$$

причём знак параметра s , как и знак a , пока не определён. Уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{2s} y'' + 3y^2 - 2y = 0. \quad (5.64)$$

Домножая на y' , ещё раз выделяем полную производную, то есть находим второй интеграл КдФ–уравнения (5.51):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2s} y' y'' + 3y^2 y' - 2y y' &= \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{4s} y'^2 + y^3 - y^2 \right) = 0, \\ \frac{1}{4s} y'^2 + y^3 - y^2 &= \text{const}, \end{aligned} \quad (5.65)$$

где константа вновь зануляется в силу требования уединённости решения. В результате получаем обыкновенное дифференциальное

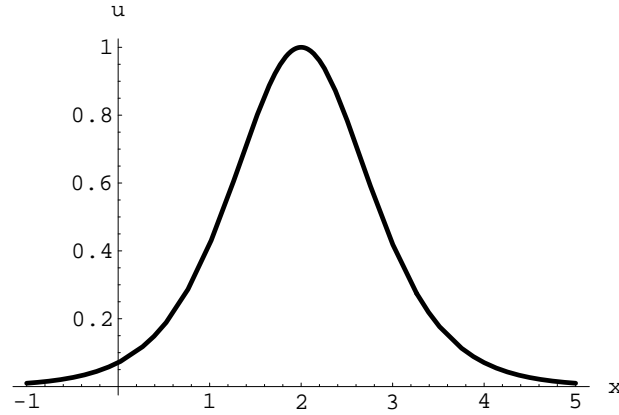


Рис. 5.8: Решение КдФ-уравнения в виде устойчивой уединённой волны

уравнение:

$$\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 = 4s y^2(1-y), \quad (5.66)$$

где из поведения на бесконечности сразу видим, что $s > 0$, следовательно, $a > 0$ и $v > v_0$, то есть скорость получаемой уединённой волны всегда больше, чем в предельном случае (5.52). Из положительности s также следует, что всегда $y \leq 1$, то есть $u \leq a$. Заметим, что величина ℓ до сих пор остаётся свободным параметром. Зафиксируем её, положив $s = 1$, и преобразуем уравнение (5.66) к виду:

$$\frac{dy}{d\xi} = -2y\sqrt{1-y}, \quad (5.67)$$

где знак минус также следует из поведения на бесконечности, а именно, поскольку $y(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, то при $y > 0$ должно быть $y' < 0$, соответственно при $y < 0$ должно быть $y' > 0$.

Уравнение (5.67) легко интегрируется, при этом постоянная интегрирования определяет начало отсчёта по оси x . Окончательно решение уравнения (5.51) для устойчивой уединённой волны Рассела (5.54) записывается в виде:

$$u(x, t) = a \operatorname{ch}^{-2} \frac{x - vt - x_0}{\ell}, \quad (5.68)$$

см. рис. 5.8. Параметры волны – высота a , скорость v и параметр ℓ , определяющий ширину, связаны между собой:

$$v = v_0 \left(1 + \frac{a}{2h}\right), \quad \ell = \sqrt{\frac{4h^3}{3a}}. \quad (5.69)$$

На первый взгляд кажется странным, что открытие Рассела и математическое описание уединённой волны, данное Кортевегом и де Фрисом, не получили заметного резонанса в науке. После выхода статьи о КдФ–уравнении эти результаты вновь оказались забыты почти на 70 лет. Когда в 1949 г. научная общественность отмечала 100-летие со дня рождения Кортевега, в списке лучших публикаций работа, выполненная им с де Фрисом, даже не значилась. Только спустя ещё четверть века именно эта работа стала считаться главным научным достижением Кортевега. Причину такого невнимания к уединённой волне можно понять, если учесть, что долгое время физический мир казался линейным. Поэтому исследователи не придавали открытию экзотической волны на воде серьёзного значения.

Начиная со второй половины XX века роль нелинейных явлений в физике получила должную оценку. Например, было показано, что ионно–звуковые волны в плазме описываются КдФ–уравнением, затем были обнаружены и другие физические (и не только) процессы, в которых возникают устойчивые уединённые нелинейные волны, такие, как перемещение дислокации в кристаллической решётке, эффект самонаведённой прозрачности при распространении ультракоротких световых импульсов в оптических средах, распространение нервного импульса и даже образование автомобильных пробок на дорогах.

В 1965 г. американские физики–теоретики Мартин Дэвид Крускал и Норман Забуски, проводя численное моделирование столкновений уединённых волн, обнаружили большое сходство этого процесса и соударения упругих шаров, то есть волны Рассела оказались во многом подобны частицам. Чтобы подчеркнуть это подобие, Крускал и Забуски предложили для такой волны термин “солитон”, образованный от слова *solitary* – уединённая, и созвучный названиям элементарных частиц. Позднее были исследованы и другие нелинейные уравнения математической физики, имеющие солитоноподобные решения, такие, как нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение синус–Гордона.

Но, по-видимому, наиболее впечатляющим примером устойчивой уединённой волны являются длинные волны, которые образуются на поверхности океана после подводных землетрясений и извержений вулканов. Вдали от эпицентра они принимают вид одномерной

уединённой волны (5.68) с параметрами $h \sim 1$ км, $a \sim 10$ м, $\ell \sim 10$ км, $v \sim v_0 = \sqrt{gh} \sim 100$ м/с. Такая волна имеет устойчивую форму, двигаясь вдали от берега, однако при подходе к берегу и уменьшении глубины h роль эффекта нелинейности, как видно из КдФ–уравнения (5.51), возрастает, передний фронт волны становится всё более крутым, и на берег обрушивается многометровая вертикальная стена воды – *цунами*.

До сих пор мы говорили об одномерных устойчивых волнах. Отдельную главу в физике нелинейных явлений образует изучение трёхмерных устойчивых объектов, имеющих форму вихрей. Здесь также весьма широк круг изучаемых явлений, от вихрей Абрикосова в сверхпроводниках и смерчей в атмосфере до спиральных галактик во Вселенной. Однако эти вопросы выходят за рамки данного курса.

Контрольные задания к главе 5

1. Используя определение, данное в тексте, получите формулу для волнового пакета, изображённого на рис. 5.7.
2. Найдите из уравнения (5.67) решение для устойчивой уединённой волны (5.68).

Глава 6

Специальные функции

В настоящей главе рассматриваются основные классы специальных функций, возникающие в широком круге задач математической физики.

Сначала решаются задачи разделения переменных в цилиндрических и сферических координатах, и рассматриваются возникающие в них цилиндрические функции, полиномы Лежандра, присоединённые функции Лежандра и сферические функции. Затем сформулировано общее уравнение для специальных функций, описывающее, в частности, все рассмотренные ранее семейства таких функций. Приведены некоторые общие свойства специальных функций. Далее, как частные случаи решений общего уравнения, рассматриваются полиномы Чебышёва – Эрмита и Чебышёва – Лагерра. В качестве иллюстрации использования этих полиномов приведены задачи об осцилляторе и атоме водорода в квантовой механике.

6.1 Разделение переменных в цилиндрических координатах. Уравнение Бесселя

Анализируя задачу о колебаниях мембраны, см. параграф 4.8, мы пришли к двумерному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta_2 v + \lambda v = 0, \quad (6.1)$$

решение которого определяется условием на границе области. В случае мембраны естественно считать, что она закреплена на границе,

и граничным условием будет

$$v|_L = 0, \quad (6.2)$$

где L — кривая, ограничивающая мембрану. Из принципа максимума для уравнения Гельмгольца следует, что λ может быть только положительным числом, $\lambda > 0$, иначе уравнение (6.1) будет иметь лишь тривиальное решение. При таком условии задача, которая здесь возникает, является примером *задачи Штурма–Лиувилля*, или *задачи на собственные значения*. Формулировка ее следующая: надо найти такие числа λ , при которых уравнение (6.1) имеет нетривиальное решение при однородном граничном условии.

Вид решения зависит от формы контура — кривой L . Если L образует прямоугольник, то решения достаточно просты, они выражаются через элементарные функции. Сложнее задача (решить которую нам и предстоит), когда L — окружность. В этом случае естественно использовать полярные координаты:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Уравнение Гельмгольца (6.1), переписанное в полярных координатах, приобретает вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0, \quad (6.4)$$

при граничном условии:

$$v(\rho_0, \varphi) = 0, \quad (6.5)$$

ρ_0 — радиус окружности. Поскольку и уравнение (6.4), и граничное условие являются однородными, можно разделять переменные. Ищем частное решение $v(\rho, \varphi)$ в виде произведения двух функций

$$v(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi). \quad (6.6)$$

Подставляя (6.6) в (6.4) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{1}{R} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \lambda \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \mu = \operatorname{const}.$$

Разберёмся сначала с угловой зависимостью. Имеем следующее уравнение для функции $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0.$$

Как известно, решение этого уравнения зависит от знака μ : это будут экспоненты либо с вещественными, либо с мнимыми показателями. Но здесь можно сказать более определенно и о знаке, и о решении. Функция $\Phi(\varphi)$ должна быть однозначной, а следовательно, периодической с периодом 2π :

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Это возможно, во-первых, если $\mu > 0$, во-вторых, при условии $\mu = n^2$, где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Таким образом, решение для угловой части принимает вид:

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi. \quad (6.7)$$

Вернёмся к уравнению для радиальной части:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0, \quad (6.8)$$

где граничным условием будет

$$R(\rho_0) = 0.$$

Один из двух параметров, содержащихся в уравнении (6.8), а именно – параметр λ можно устранить масштабным преобразованием, введя новую безразмерную переменную ξ следующим образом (учитывая, что $\lambda > 0$):

$$\frac{1}{\rho^2} = \lambda \frac{1}{\xi^2}.$$

При этом уравнение (6.8) преобразуется к виду:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dR}{d\xi} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{\xi^2} \right) R = 0. \quad (6.9)$$

Уравнение (6.9) носит название уравнения Бесселя. Его решениями являются так называемые функции Бесселя, или цилиндрические функции.

6.2 Функции Бесселя

Уравнение Бесселя (6.9) возникает во многих физических задачах, где имеет место осевая симметрия. При этом параметр n в ряде задач не является целочисленным. Вводя для него обозначение ν (для определённости будем считать, что $\nu > 0$) и переходя к каноническому обозначению для функций Бесселя – $J(x)$, перепишем уравнение (6.9) в виде:

$$J'' + \frac{1}{x} J' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J = 0. \quad (6.10)$$

Из граничного условия на радиальную функцию имеем:

$$J\left(\sqrt{\lambda} \rho_0\right) = 0. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.10) есть уравнение с переменными коэффициентами. Основным методом решения подобных уравнений – поиск решений в виде степенного ряда. Поскольку $x = 0$ – особая точка, так как коэффициенты уравнения (6.10) обращаются в ней в бесконечность, в решении необходимо выделить степенной множитель. Будем искать функцию $J(x)$ в следующем виде:

$$J(x) = x^\sigma \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots\right), \quad (6.12)$$

где σ – некоторое произвольное число.

Подставляем решение (6.12) в (6.10). В результате в левой части уравнения образуется ряд по степеням x , который может быть равен нулю только при равенстве нулю коэффициентов при каждой степени x^k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Отсюда получаем следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов a_k :

$$\left[\sigma^2 - \nu^2\right] a_0 = 0, \quad (6.13)$$

$$\left[(\sigma + 1)^2 - \nu^2\right] a_1 = 0, \quad (6.14)$$

$$\left[(\sigma + k)^2 - \nu^2\right] a_k + a_{k-2} = 0, \quad k = 2, 3, \dots \quad (6.15)$$

Как видно из (6.12), случай $a_0 = 0$ сводится к простому переопределению σ , так что будем считать, что $a_0 \neq 0$. Из уравнения (6.13)

следует, что $\sigma^2 = \nu^2$, то есть $\sigma = \pm\nu$. Подставляя σ в уравнение (6.14), получаем:

$$[\pm 2\nu + 1] a_1 = 0.$$

Видно, что здесь есть особый случай. Если $\nu = \pm 1/2$, то коэффициент a_1 может быть отличен от нуля. Эту возможность мы будем анализировать позже, как мы увидим, в этом случае решение уравнения (6.10) выражается через элементарные функции. Пока что будем считать, что $\nu \neq \pm 1/2$, тогда коэффициент $a_1 = 0$. Это приводит к тому, что $a_3 = a_5 = \dots = a_{2k+1} = 0$, в силу рекуррентного соотношения (6.15). Таким образом, ряд (6.12) содержит внутри скобок только члены с чётными степенями x , коэффициенты при которых определяются последовательно:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu)}. \quad (6.16)$$

Рассмотрим сначала случай $\sigma = +\nu$, тогда

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k + 2\nu)},$$

где k – чётное. Обозначим $k = 2m$, тогда, применяя раз за разом рекуррентное соотношение, получим:

$$\begin{aligned} a_{2m} &= -\frac{a_{2m-2}}{2m(2m + 2\nu)} = \frac{a_{2m-4}}{2m(2m-2)(2m+2\nu)(2m+2\nu-2)} = \\ &= (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m! (m + \nu)(m + \nu - 1) \dots (1 + \nu)}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Коэффициент a_0 остаётся произвольным. Доопределим его следующим образом:

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)},$$

где введена гамма-функция $\Gamma(s)$, определяемая выражениями:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (n - \text{целое}), \quad s \Gamma(s) = \Gamma(s+1). \quad (6.18)$$

Благодаря последнему свойству гамма-функции произведение скобок в знаменателе коэффициента a_{2m} последовательно собирается в функцию:

$$(m + \nu)(m + \nu - 1) \dots (1 + \nu) \Gamma(1 + \nu) = \Gamma(m + 1 + \nu),$$

что даёт:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} \Gamma(m+1) \Gamma(m+1+\nu)}.$$

Окончательно ряд для функции Бесселя (6.12) при $\sigma = +\nu$ принимает вид:

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}, \quad (6.19)$$

или

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left[1 - \frac{x^2}{2^2 1! (\nu+1)} + \frac{x^4}{2^4 2! (\nu+1)(\nu+2)} - \dots \right]. \quad (6.20)$$

Её другое название – цилиндрическая функция 1-го рода. Такой ряд сходится при любых x .

Для случая $\sigma = -\nu$, проделав аналогичные преобразования, но предполагая, что ν не целое число, получим второе решение уравнения Бесселя (6.10):

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}, \quad (6.21)$$

или

$$J_{-\nu}(x) = \frac{2^\nu}{x^\nu \Gamma(-\nu+1)} \left[1 - \frac{x^2}{2^2 1! (-\nu+1)} + \dots \right]. \quad (6.22)$$

Таким образом, в точке $x = 0$ функция $J_\nu(x)$ имеет ноль порядка ν , а функция $J_{-\nu}(x)$ – полюс порядка ν (при нецелых ν), то есть они являются двумя линейно независимыми решениями уравнения Бесселя (6.10). Общее решение уравнения $y_\nu(x)$ при нецелом ν имеет вид

$$y_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x), \quad (6.23)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Если в конкретной задаче ищется ограниченное в нуле решение, то следует брать только первое слагаемое.

Однако эти рассуждения, как и процедура получения решения $J_{-\nu}(x)$, несправедливы при целочисленных ν . Дело в том, что гамма-функция при целых неположительных значениях аргумента обращается в бесконечность, $\Gamma(0), \Gamma(-1), \Gamma(-2) \dots \rightarrow \infty$. Следовательно, и соотношение (6.17), и доопределение коэффициента a_0 теряют смысл при целых отрицательных ν .

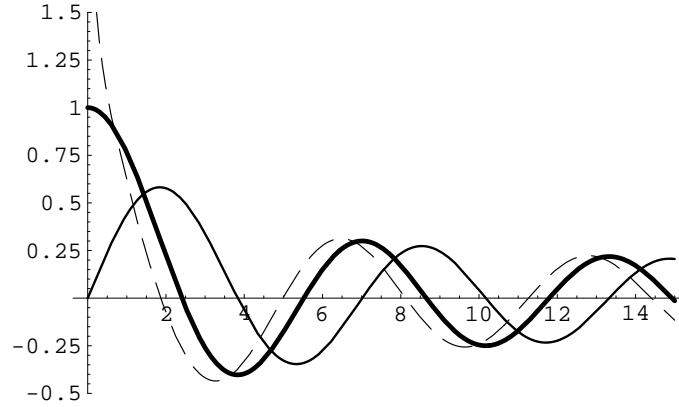


Рис. 6.1: Графики функций Бесселя $J_0(x)$ (толстая линия), $J_1(x)$ (тонкая сплошная линия), $J_{-1/3}(x)$ (штриховая линия)

Тем не менее, формула (6.21) может быть использована для определения функции Бесселя с отрицательным целым индексом, если совершить в ней предельный переход $\nu \rightarrow n$. Учтём, что при этом слагаемые, где в знаменателе будут возникать $\Gamma(0)$, $\Gamma(-1)$, $\Gamma(-2) \dots$, обратятся в ноль, и суммирование оставшихся членов будет начинаться с $m = n$. Сдвигая индекс суммирования, получим:

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1-n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \Big|_{m-n=m'} = \\ &= \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m'+n}}{\Gamma(m'+n+1)\Gamma(m'+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m'+n}, \end{aligned}$$

то есть, с точностью до знакового множителя, здесь воспроизводится функция Бесселя $J_n(x)$. Таким образом, при целых $\nu = n$ два решения уравнения Бесселя (6.23) оказываются линейно зависимыми:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (6.24)$$

Однако, поскольку уравнение Бесселя (6.10) является дифференциальным уравнением 2-го порядка, его второе независимое решение при $\nu = n$ должно существовать. Оно будет найдено в следующем параграфе.

На рис. 6.1 изображены графики нескольких функций Бесселя. Функция Бесселя любого порядка имеет бесконечное число нулей, $J_\nu(\mu_i^{(\nu)}) = 0$, $i = 1, 2, \dots$. Граничное условие (6.11) определяет,

таким образом, бесконечное дискретное множество значений параметра λ , которые выражаются через нули функции Бесселя: $\lambda_i = (\mu_i/\rho_0)^2$.

Между функциями Бесселя разных порядков существуют *рекуррентные формулы*, которые оказываются полезными в практических приложениях.

Разделим $J_\nu(x)$ на x^ν и продифференцируем по x , в полученной сумме сдвинем индекс суммирования на 1 и после этого домножим и разделим на x^ν :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} &= \frac{1}{2^\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1} \Big|_{m-1=m'} = \\ &= \frac{1}{2^\nu} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m'+1}}{\Gamma(m'+1)\Gamma(m'+2+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m'+1} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \end{aligned}$$

Удобнее переписать это соотношение иначе:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}. \quad (6.25)$$

Повторяя многократно процедуру дифференцирования и деления на x , видим, что каждый раз порядок функции Бесселя и степень x в знаменателе будут увеличиваться на 1:

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = (-1)^n \frac{J_{\nu+n}(x)}{x^{\nu+n}}. \quad (6.26)$$

Аналогично можно получить формулы

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x), \quad (6.27)$$

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n [x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-n} J_{\nu-n}(x). \quad (6.28)$$

Раскроем производную в формуле (6.25):

$$\frac{1}{x} \left[\frac{J'_\nu(x)}{x^\nu} - \nu \frac{J_\nu(x)}{x^{\nu+1}} \right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}},$$

откуда получаем рекуррентное соотношение, связывающее функцию Бесселя и её производную:

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \nu \frac{J_\nu(x)}{x}. \quad (6.29)$$

В частности, при $\nu = 0$ отсюда получаем $J'_0(x) = -J_1(x)$.

Раскроем производную (6.27):

$$\frac{1}{x} [x^\nu J'_\nu(x) + \nu x^{\nu-1} J_\nu(x)] = x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x),$$

откуда получаем

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1} - \nu \frac{J_\nu(x)}{x}. \quad (6.30)$$

Комбинируя формулы (6.29) и (6.30), находим ещё два соотношения:

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x), \quad (6.31)$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = 2\nu \frac{J_\nu(x)}{x}. \quad (6.32)$$

Соотношение (6.32) позволяет, в частности, зная функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ (которые могут быть найдены суммированием рядов (6.19)), находить функции Бесселя любого целочисленного порядка простыми алгебраическими операциями.

Для функций Бесселя целочисленного порядка существуют соотношения ортогональности:

$$\int_0^1 J_n(\mu_i^{(n)} x) J_n(\mu_j^{(n)} x) x dx = \delta_{ij} \frac{1}{2} [J_{n+1}(\mu_j^{(n)})]^2, \quad (6.33)$$

где δ_{ij} – символ Кронеккера, $\mu_i^{(n)}$, $\mu_j^{(n)}$ – два нуля функции $J_n(x)$.

6.3 Функции Неймана, Ханкеля, Макдональда

Как видно из (6.24), два решения уравнения Бесселя $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ перестают быть линейно независимыми при целочисленных индексах $\nu = n$. Однако, поскольку уравнение имеет второй порядок, его второе решение, независимое от $J_n(x)$, при этом должно существовать. Как мы сейчас увидим, мы не могли его найти, записывая решение уравнения Бесселя в виде степенного ряда. Существует иной способ получения второго независимого решения. В общем решении (6.23) выберем коэффициенты в виде:

$$C_1 = \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sin \nu\pi}, \quad (6.34)$$

при этом мы получим функцию

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}, \quad (6.35)$$

которая называется функцией Неймана, или цилиндрической функцией 2-го рода.

При ν , равном целому числу, в выражении (6.35) возникает неопределённость типа $0/0$. Устремляя $\nu \rightarrow n$ и раскрывая неопределённость по правилу Лопиталя, получаем:

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} = \\ &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)]}{\frac{\partial}{\partial \nu} [\sin \nu\pi]} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) \Big|_{\nu=n} - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \Big|_{\nu=n} \right]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Производные функций Бесселя по индексу найдём, дифференцируя ряды (6.19) и (6.21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x) \Big|_{\nu=n} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(m+\nu+1)} \right] \Big|_{\nu=n} = J_n(x) \ln \frac{x}{2} - R_n(x), \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(x) \Big|_{\nu=n} = -J_{-n}(x) \ln \frac{x}{2} + R_{-n}(x), \quad (6.38)$$

где обозначено

$$R_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma'(m+n+1)}{\Gamma(m+1) [\Gamma(m+n+1)]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}.$$

Подставляя (6.37) и (6.38) в (6.36) и принимая во внимание, что $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, получаем

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[2 J_n(x) \ln \frac{x}{2} - R_n(x) - (-1)^n R_{-n}(x) \right]. \quad (6.39)$$

Формула (6.39) есть выражение для функции Неймана целочисленного индекса. Возникает вопрос: почему данное решение уравнения

Бесселя не было выявлено ранее, при подстановке степенного ряда? Ответ прост: функция $\ln(x/2)$ не разлагается в ряд при малых x , то есть решение в виде степенного ряда, вообще говоря, не является самым общим.

Итак, когда параметр ν в уравнении Бесселя целочисленный, $\nu = n$, его общее решение имеет следующий вид

$$y_n(x) = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x).$$

Функции Ханкеля

Иногда оказывается удобным вместо функций Бесселя и Неймана использовать другие, комплексные функции – функции Ханкеля:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &\equiv J_\nu(x) + i N_\nu(x), \\ H_\nu^{(2)}(x) &\equiv J_\nu(x) - i N_\nu(x), \end{aligned} \quad (6.40)$$

где $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ называются функциями Ханкеля первого и второго рода соответственно, ν – произвольный вещественный индекс.

В определённом смысле функции Ханкеля удобнее функций Бесселя тем, что формулы (6.40) не требуют доопределения, является ли индекс целым или нецелым. При нецелых ν из (6.40) и (6.35) имеем:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{J_{-\nu}(x) - J_\nu(x) e^{-i\nu\pi}}{i \sin \nu\pi}, \quad (6.41)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{J_{-\nu}(x) - J_\nu(x) e^{i\nu\pi}}{-i \sin \nu\pi}. \quad (6.42)$$

Функция Макдональда

В некоторых задачах возникает уравнение, очень похожее на уравнение Бесселя, а именно:

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (6.43)$$

Оно называется уравнением Макдональда. Нетрудно увидеть, что его можно свести к уравнению Бесселя, если считать x чисто мнимой величиной и произвести замену $x \rightarrow ix$, где новое x – уже вещественная переменная. Таким образом, решения уравнения (6.43) имеют вид $y(x) = J_\nu(ix)$.

Преобразуем $J_\nu(ix)$:

$$\begin{aligned} J_\nu(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{ix}{2}\right)^{2n+\nu} = \\ &= i^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \equiv \\ &\equiv i^\nu I_\nu(x). \end{aligned}$$

Функция $I_\nu(x)$ называется модифицированной функцией Бесселя:

$$I_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}. \quad (6.44)$$

Точно так же вводится модифицированная функция Бесселя отрицательного индекса

$$I_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}. \quad (6.45)$$

Функции $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$ образуют при нецелых ν два независимых решения уравнения Макдональда (6.43), а общее решение — их линейная комбинация.

Можно показать, однако, что модифицированные функции Бесселя с целочисленным индексом n и $-n$ совпадают

$$I_{-n}(x) = I_n(x),$$

то есть снова нужно искать второе независимое решение уравнения Макдональда. Как и в случае с уравнением Бесселя, строится функция, которая при целом индексе $\nu = n$ обращается в неопределенность типа $0/0$. Соответствующая функция называется функцией Макдональда и имеет следующее определение

$$K_\nu(x) \equiv \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]. \quad (6.46)$$

В случае целочисленного индекса она принимает вид

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} I_{-\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial \nu} I_\nu(x) \right] \Big|_{\nu=n}. \quad (6.47)$$

Модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда называются также цилиндрическими функциями мнимого аргумента

6.4 Интеграл Бесселя

Наряду с представлением функции Бесселя в виде ряда (6.19), существует также её представление в виде интеграла. Чтобы найти его, рассмотрим функцию $f(\theta, x) = e^{ix \cos \theta}$, где θ будем считать аргументом функции, а x – параметром. Видно, что функция $f(\theta, x)$ является четной и периодической, поэтому её можно разложить в ряд Фурье по косинусам:

$$e^{ix \cos \theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (6.48)$$

Для коэффициентов a_n имеем следующее выражение

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \cos \theta} \cos n\theta \, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.49)$$

Интеграл (6.49) не вычисляется в элементарных функциях. Для его нахождения поступим следующим образом. Уравнение (6.48) содержит $\cos \theta$ и $\cos n\theta$. Преобразуем их по формуле Эйлера:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \quad \cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}.$$

Введем новую переменную $\tau \equiv e^{i\theta}$. Выразим косинусы в уравнении (6.48) через переменную τ

$$\exp \left[\frac{ix}{2} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) \right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left(\tau^n + \frac{1}{\tau^n} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{2} \tau^n, \quad (6.50)$$

где $a_{-n} = a_n$. Теперь представим левую часть этого равенства также в виде ряда по переменной τ , используя разложение экспонент в степенной ряд

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{ix\tau}{2} \right) \exp \left(\frac{ix}{2\tau} \right) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l x^l \tau^l}{2^l l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m x^m}{2^m \tau^m m!} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{l+m} x^{l+m} \tau^{l-m}}{2^{l+m} l! m!}. \end{aligned}$$

Для сравнения рядов в левой и правой частях равенства (6.50), произведем сдвиг переменной суммирования, вводя вместо l новую переменную n следующим образом: $n = l - m$. При этом возникает знакомый ряд для функции Бесселя:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \tau^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n \tau^n J_n(x).$$

Таким образом, коэффициенты a_n выражаются через функции Бесселя

$$\frac{a_n}{2} = i^n J_n(x). \quad (6.51)$$

С другой стороны, учитывая выражение коэффициентов a_n через интеграл (6.49), мы получаем новое, интегральное представление функций Бесселя:

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \cos \theta} \cos n\theta \, d\theta = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \cos \theta} e^{-in\theta} \, d\theta.$$

Здесь мы добавили интеграл от нечетной функции $e^{ix \cos \theta} \sin n\theta$, равный нулю в симметричных пределах.

Подставляя $i^{-n} = e^{-in\pi/2}$, перейдем от переменной θ к переменной φ следующим образом: $\theta + \pi/2 = \varphi$. Учитывая, что $\cos(\varphi - \pi/2) = \sin \varphi$, имеем

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} \, d\varphi.$$

Здесь записан интеграл по полному углу 2π , но, поскольку функция $e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)}$ периодическая по φ с периодом 2π , можно передвинуть пределы:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} \, d\varphi.$$

Функция Бесселя — вещественная, поэтому мнимая часть интеграла обязана обратиться в ноль. Это условие автоматически выполняется, поскольку функция $\sin(x \sin \varphi - n\varphi)$ — нечетная функция.

Окончательно имеем:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi. \quad (6.52)$$

Это и есть интеграл Бесселя.

Существует обобщение формулы (6.52) для функций Бесселя нецелочисленного порядка. Приведём его без вывода:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi - \nu\varphi) d\varphi - \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \operatorname{sh} \varphi - \nu\varphi} d\varphi. \quad (6.53)$$

Производящая функция

Подставим выражение для коэффициента a_n через функцию Бесселя (6.51) в формулу (6.50):

$$\exp \left[\frac{ix}{2} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(x) \tau^n. \quad (6.54)$$

Перейдём от переменной τ к новой переменной t : $i\tau \equiv t$. Уравнение (6.54) принимает вид:

$$\exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) t^n. \quad (6.55)$$

Здесь уместно привести следующее определение: пусть имеется семейство функций $\{y_n(x)\}$, тогда функция $\Psi(t, x)$ называется *производящей функцией* этого семейства, если

$$\Psi(t, x) = \sum_n y_n(x) t^n. \quad (6.56)$$

Если в формуле (6.56) суммирование начинается с нуля, $n = 0, 1, 2, \dots$ (ряд Тэйлора), тогда для коэффициентов ряда имеем:

$$y_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \Psi(t, x) \Big|_{t=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.57)$$

то есть знание производящей функции для семейства функций позволяет определить каждую из них. По формуле Коши производную

можно свести к интегралу по контуру C в комплексной плоскости z , окружающему точку $z = 0$:

$$y_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Psi(z, x)}{z^{n+1}} dz. \quad (6.58)$$

Данная формула справедлива и для случая, когда ряд (6.56) представляет собой ряд Лорана, то есть суммирование в нём начинается с $n = -\infty$.

Таким образом, для семейства функций Бесселя с целочисленными индексами производящая функция $\Psi(t, x)$ имеет вид:

$$\Psi(t, x) = \exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right]. \quad (6.59)$$

6.5 Функции Бесселя полуцелого порядка

Представляя решение уравнения Бесселя в виде степенного ряда, мы отметили особый случай, когда параметр $\nu = \pm 1/2$. Было сделано утверждение, что при этом функции Бесселя выражаются через элементарные функции. Покажем, что функции Бесселя любого полуцелого порядка могут быть выражены через элементарные функции.

Используем представление функции Бесселя порядка $1/2$ в виде степенного ряда:

$$J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1/2}. \quad (6.60)$$

Опираясь на известное соотношение для гамма-функции

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),$$

получаем

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{2m+3}{2}\right) &= \left(\frac{2m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right) = \dots = \\ &= \left(\frac{2m+1}{2}\right)\left(\frac{2m-1}{2}\right)\left(\frac{2m-3}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.61)$$

Непосредственно из определения гамма-функции (6.18) находим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = \sqrt{\pi}.$$

Выражение (6.61) можно упростить. Заметим, что в числителе в (6.61) стоят нечетные числа, уменьшаясь от $2m+1$ до 1. Домножим числитель и знаменатель на $2m(2m-2)\dots 2$. Видно, что в таком случае в числителе формируется $(2m+1)!$, тогда как в знаменателе образуется $2^{2m+1} m!$.

Таким образом:

$$\Gamma\left(\frac{2m+3}{2}\right) = \frac{(2m+1)!}{2^{2m+1} m!} \sqrt{\pi}.$$

Подставляя последнее выражение в (6.60), видим, что в нём образуется степенной ряд для синуса:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \quad (6.62)$$

Функции Бесселя более высоких полуцелых порядков можно найти, используя соотношение (6.26) при $\nu = 1/2$:

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n x^n \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x}, \quad (6.63)$$

откуда видно, что это также будут элементарные функции.

Аналогично найдем функцию Бесселя при $\nu = -1/2$:

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1) \Gamma(m+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1/2}.$$

Гамма-функция в знаменателе преобразуется к виду:

$$\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right) = \frac{(2m)!}{2^{2m} m!} \sqrt{\pi},$$

что ведёт к формированию степенного ряда для косинуса:

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (6.64)$$

Используя соотношение (6.28) при $\nu = -1/2$, получаем общую формулу для функций Бесселя отрицательного полуцелого порядка

$$J_{-n-1/2}(x) = x^n \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\cos x}{x}. \quad (6.65)$$

6.6 Асимптотика функций Бесселя

Когда мы работаем со специальными функциями, мы их записываем в виде ряда или в виде интеграла – это, как правило, довольно громоздкие выражения. В конкретных задачах часто бывают случаи, когда достаточно знать функцию при некотором предельном, например, очень большом или очень малом значении аргумента. При этом можно обойтись более простым, асимптотическим выражением для специальной функции.

Например, рассмотрим функцию Бесселя $J_\nu(x)$ ($\nu > 0$) при малых значениях аргумента ($x \ll 1$). При этом можно ограничиться первым членом разложения функции в степенной ряд (6.20):

$$J_\nu(x) \Big|_{x \rightarrow 0} = \frac{1}{\Gamma(1 + \nu)} \left(\frac{x}{2} \right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \quad \nu > 0. \quad (6.66)$$

Как уже отмечалось, функция Бесселя $J_\nu(x)$ ($\nu > 0$) имеет при $x \rightarrow 0$ ноль порядка ν .

Для функции Бесселя отрицательного порядка поведение в нуле совершенно иное:

$$J_{-\nu}(x) \Big|_{x \rightarrow 0} = \frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} \left(\frac{2}{x} \right)^\nu + O\left(\frac{x^2}{x^\nu} \right), \quad \nu > 0. \quad (6.67)$$

Функция $J_{-\nu}(x)$ имеет при $x \rightarrow 0$ полюс порядка ν .

Пусть теперь аргумент функции Бесселя – очень большое число. Очевидно, что в этом случае использовать разложение в ряд неудобно. Члены такого ряда сначала будут быстро нарастать за счет большого x , но, начиная с некоторого достаточно большого номера, сходимость будет обеспечиваться более быстрым ростом гамма-функции в знаменателе. Необходимо вычислять большое число членов ряда.

Однако существует другой путь. Рассмотрим асимптотику функции Бесселя полуцелого порядка при больших значениях аргумента

$$J_{n+1/2}(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = (-1)^n x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sin x}{x} \Big|_{x \rightarrow \infty}.$$

Вычисляя производную

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2},$$

видим, что вторым слагаемым в этой формуле можно пренебречь при больших x , поскольку оно имеет более высокий порядок малости, чем первое. Видно также, что при вычислении следующих производных дифференцирование степенной функции x в знаменателе увеличивает отрицательную степень x , то есть даёт члены более высокого порядка малости, тогда как дифференцирование $\sin x$ или $\cos x$ в числителе не меняет степень x . Таким образом, на каждом этапе дифференцирования следует вычислять производные только от $\sin x$ и $\cos x$, не дифференцируя степенную функцию x в знаменателе.

С помощью соотношения

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x = -\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

удобно представить производную порядка n в виде

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin x = (-1)^n \sin \left(x - n \frac{\pi}{2} \right).$$

Таким образом, в асимптотическом пределе будем иметь:

$$\begin{aligned} J_{n+1/2}(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - n \frac{\pi}{2} \right) + O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (6.68)$$

Существует доказательство, см. например [1], что асимптотическое выражение (6.68) справедливо для функций Бесселя произвольного порядка:

$$J_\nu(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right), \quad (6.69)$$

и аналогично

$$J_{-\nu}(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x + \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right). \quad (6.70)$$

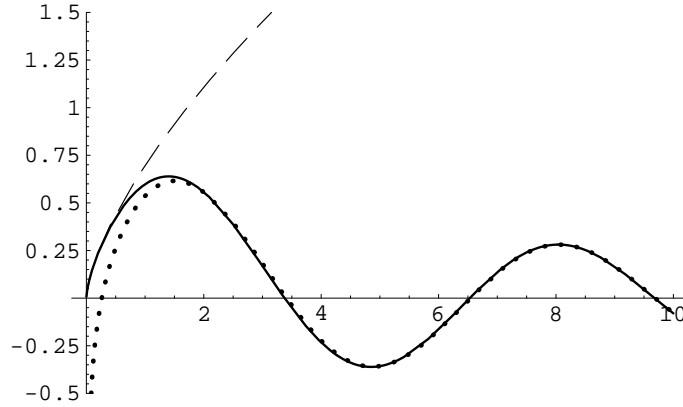


Рис. 6.2: Графики функции Бесселя $J_{2/3}(x)$ (сплошная линия) и её асимптотик при малых (штриховая линия) и больших (пунктирная линия) значениях аргумента

Из выражения (6.35) находим асимптотику функции Неймана:

$$N_\nu(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right), \quad (6.71)$$

а из формул (6.40) – асимптотики функций Ханкеля:

$$H_\nu^{(1)}(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[i \left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] + O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right), \quad (6.72)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[-i \left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] + O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right).$$

Таким образом, асимптотические выражения для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля при больших значениях аргумента связаны между собой формулами Эйлера.

Чтобы проиллюстрировать оправданность использования полученных асимптотических формул, на рис. 6.2 изображены графики функции Бесселя $J_{2/3}(x)$ и её асимптотик при малых и больших значениях аргумента, определяемых лидирующими членами в формулах (6.66) и (6.69) соответственно. Видно, что формула (6.66), соответствующая пределу $x \rightarrow 0$, в действительности хорошо работает уже при $x \lesssim 0.5$, а формула (6.69), соответствующая пределу $x \rightarrow \infty$ – при $x \gtrsim 2$.

Исходя из определений цилиндрических функций мнимого аргумента, несложно найти их асимптотики, лидирующие члены кото-

рых оказываются не зависящими от порядка функции:

$$\begin{aligned} I_\nu(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} &= e^x \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \right], \\ K_\nu(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} &= e^{-x} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.73)$$

6.7 Разделение переменных в сферических координатах

Рассмотрим трёхмерное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad (6.74)$$

с однородным условием на границе области – поверхности S :

$$v|_S = 0. \quad (6.75)$$

Из принципа максимума для уравнения Гельмгольца, см. параграф 4.9 следует, что λ может быть только положительным числом, $\lambda > 0$, иначе уравнение (6.74) будет иметь лишь тривиальное решение.

Будем анализировать случай, когда внешней границей области является сфера радиуса r_0 . При этом естественно использовать сферические координаты $0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Оператор Лапласа в сферических координатах имеет вид:

$$\Delta v = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (6.76)$$

Поскольку граничное условие однородное, будем искать решение методом разделения переменных. Сначала отделим радиальную часть, записывая частное решение в виде:

$$v(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi), \quad (6.77)$$

где для функции $R(r)$ имеется граничное условие $R(r_0) = 0$. Введя обозначение для угловой части лапласиана:

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2},$$

подставим решение (6.77) в уравнение и разделим переменные. Как обычно, поскольку в левой части стоит функция только радиальной переменной, а справа – функция только углов, то в силу независимости переменных равенство имеет смысл, только если обе части равны константе:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \lambda r^2 = -\frac{1}{Y(\theta, \varphi)} \Delta_{\theta, \varphi} Y(\theta, \varphi) = \mu = \text{const},$$

откуда получаем уравнение для функции углов:

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y + \mu Y = 0, \quad (6.78)$$

и уравнение для радиальной функции:

$$\frac{1}{r^2} (r^2 R')' + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2} \right) R = 0, \quad R(r_0) = 0. \quad (6.79)$$

Как и при анализе уравнения (6.8), параметр λ можно устранить масштабным преобразованием, введя новую безразмерную переменную z следующим образом ($\lambda > 0$):

$$\frac{1}{r^2} = \lambda \frac{1}{z^2}.$$

При этом уравнение (6.79) преобразуется к виду:

$$\frac{1}{z^2} (z^2 R')' + \left(1 - \frac{\mu}{z^2} \right) R = 0. \quad (6.80)$$

Введём новую функцию

$$\sqrt{z} R(z) \equiv J(z),$$

для которой получим следующее знакомое уравнение (здесь введено обозначение $\mu + 1/4 \equiv \nu^2$):

$$J'' + \frac{1}{z} J' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) J = 0, \quad (6.81)$$

то есть уравнение Бесселя. Таким образом, решение для радиальной функции найдено:

$$R(r) = C_1 \frac{1}{\sqrt{r}} J_\nu(\sqrt{\lambda} r) + C_2 \frac{1}{\sqrt{r}} J_{-\nu}(\sqrt{\lambda} r), \quad (6.82)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Вернёмся к уравнению (6.78) для функции углов $Y(\theta, \varphi)$:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \mu Y = 0. \quad (6.83)$$

Ещё раз разделим переменные, будем искать частное решение уравнения (6.83) в виде:

$$Y(\theta, \varphi) = w(\theta) \Phi(\varphi). \quad (6.84)$$

После подстановки и разделения переменных по известной схеме появляется ещё одна произвольная постоянная:

$$\frac{1}{w(\theta)} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dw(\theta)}{d\theta} \right) + \mu \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = \sigma = \text{const}.$$

Уравнение для функции азимутального угла $\Phi(\varphi)$,

$$\Phi'' + \sigma \Phi = 0,$$

как и в случае цилиндрических координат, должно иметь однозначные решения, что реализуется при условии $\sigma = m^2$, где $m = 0, 1, 2, \dots$.
Получаем:

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi = A_m e^{im\varphi} + A_{-m} e^{-im\varphi}. \quad (6.85)$$

Уравнение для функции полярного угла θ заметно сложнее:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dw(\theta)}{d\theta} \right) + \left(\mu - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) w(\theta) = 0.$$

Производя замену переменной: $\cos \theta \equiv x$, $dx = -\sin \theta d\theta$, преобразуем уравнение к виду:

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dw}{dx} \right) + \left(\mu - \frac{m^2}{1-x^2} \right) w = 0, \quad (6.86)$$

где $-1 \leq x \leq 1$. Анализ решений этого уравнения представляет собой непростую задачу, которую мы будем решать в два этапа.

6.8 Полиномы Лежандра

Вначале рассмотрим частный, более простой случай уравнения (6.86), когда $m = 0$, при этом последнее слагаемое в уравнении исчезает. Очевидно, этот случай соответствует азимутально симметричному решению $\Phi(\varphi) = \text{const}$. Уравнение, которое при этом возникает:

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{dw}{dx} \right) + \mu w = 0, \quad (6.87)$$

называется уравнением Лежандра. Это уравнение с переменными коэффициентами. Будем искать его решение в виде степенного ряда:

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (6.88)$$

Подставляя это решение в уравнение (6.87), получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов ряда (6.88):

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \mu}{(n+1)(n+2)} a_n. \quad (6.89)$$

При этом коэффициенты a_0 и a_1 остаются произвольными, а все остальные выражаются через них. Выбирая $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$, получим ряд (6.88) только из чётных степеней, если же $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ – только из нечётных степеней.

Анализ решения в виде ряда (6.88) с рекуррентным соотношением для коэффициентов (6.89) приводит к проблеме сходимости этого ряда при $x = 1$ (что соответствует точке $\theta = 0$ на сфере – “северному полюсу”). Дело в том, что возникающий при этом числовой ряд, состоящий из коэффициентов a_n , является в общем случае расходящимся, в соответствии с признаком Даламбера:

$$\left. \frac{a_{n+2}}{a_n} \right|_{n \rightarrow \infty} \longrightarrow 1,$$

что даёт бесконечный ряд из единиц. Однако эта бесконечность не имеет физического смысла – точка $\theta = 0$ на сфере ничем не выделена и определяется только выбором направления оси z . Существует единственная возможность получить ограниченное в точке $x = 1$ решение – параметр μ , до настоящего момента произвольный, должен

быть целым числом вида

$$\mu = \ell(\ell + 1), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (6.90)$$

В этом случае ряд обрывается, так как, в соответствии с (6.89), коэффициент $a_{\ell+2}$, а значит, и все последующие коэффициенты обращаются в ноль, и вместо бесконечного ряда возникает полином степени ℓ . Такие решения уравнения (6.87) при $\mu = \ell(\ell + 1)$ называются *полиномами Лежандра* степени ℓ и обозначаются $P_\ell(x)$. Решения при $\mu \neq \ell(\ell + 1)$, так же как и второе независимое решение уравнения (6.87) при $\mu = \ell(\ell + 1)$, содержат сингулярность в точке $x = 1$, и поэтому не имеют физического смысла. Они называются функциями Лежандра.

Формула Родрига

Дальнейший анализ свойств полиномов Лежандра удобно проводить, совершив некоторый логический скачок и выписав *производящую функцию для полиномов Лежандра*:

$$\Psi(t, x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x) t^\ell = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}. \quad (6.91)$$

Позднее мы заполним образовавшийся логический пробел, показав, что функции $P_\ell(x)$, определяемые выражением (6.91), действительно являются решениями уравнения (6.87) при $\mu = \ell(\ell + 1)$.

Непосредственно из формулы (6.91) можно найти значения полиномов Лежандра в точках $x = \pm 1$. Полагая $x = 1$, получаем

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(1) t^\ell = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots,$$

то есть $P_\ell(1) = 1$. Поскольку полиномы являются чётными либо нечётными функциями, получаем $P_\ell(-1) = (-1)^\ell$.

В соответствии с формулами (6.57) и (6.58), любой из полиномов Лежандра можно получить либо дифференцированием функции $\Psi(t, x)$, либо вычислением интеграла по формуле Коши:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{\ell!} \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell} \Psi(t, x) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{\ell+1}} d\zeta, \quad (6.92)$$

где C – замкнутый контур в комплексной плоскости ζ вокруг точки $\zeta = 0$.

Из (6.92) можно получить более удобную формулу для вычисления полиномов. Перейдём в интеграле (6.92) к новой комплексной переменной, $\zeta \rightarrow z$, следующим образом:

$$\sqrt{1 - 2x\zeta + \zeta^2} = 1 - \zeta z,$$

при этом

$$\zeta = \frac{2(z-x)}{z^2-1}, \quad d\zeta = \frac{2(1-\zeta z)}{z^2-1} dz,$$

и интеграл в формуле (6.92) преобразуется к виду:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2^\ell} \oint_{C'} \frac{(z^2-1)^\ell}{(z-x)^{\ell+1}} dz,$$

где C' – замкнутый контур в комплексной плоскости z вокруг точки $z = x$. Ещё раз используя формулу Коши, выразим интеграл через производную, при этом важно, что дифференцировать нужно не в нуле, как в формуле (6.92), а в точке $z = x$. В результате получим выражение для полиномов Лежандра:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2-1)^\ell, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (6.93)$$

Это выражение называется *формулой Родрига*.

Выпишем несколько полиномов Лежандра:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}.$$

Рекуррентные соотношения

Зная производящую функцию, можно найти рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра. Вычислим частные производные функции $\Psi(t, x)$:

$$\Psi_t = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}, \quad \Psi_x = \frac{t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}.$$

Учитывая явный вид функции $\Psi(t, x)$, можно записать два тождества:

$$(1 - 2xt + t^2) \Psi_t - (x - t) \Psi = 0, \quad (6.94)$$

$$t \Psi_t - (x - t) \Psi_x = 0. \quad (6.95)$$

Подставим в них выражение для производящей функции $\Psi(t, x)$ в виде ряда (6.91). Тождество (6.94) принимает вид

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell P_{\ell}(x) t^{\ell-1} - 2x \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell P_{\ell}(x) t^{\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell P_{\ell}(x) t^{\ell+1} - \\ & - x \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(x) t^{\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(x) t^{\ell+1} = 0. \end{aligned}$$

Для того, чтобы записать это выражение в виде единого степенного ряда, сдвинем в первом, третьем и пятом рядах переменную суммирования, вводя в первой сумме $\ell - 1 \equiv \ell'$, а в третьей и пятой $\ell + 1 \equiv \ell'$. Получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell'=-1}^{\infty} (\ell' + 1) P_{\ell'+1}(x) t^{\ell'} - 2x \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell P_{\ell}(x) t^{\ell} + \sum_{\ell'=1}^{\infty} (\ell' - 1) P_{\ell'-1}(x) t^{\ell'} - \\ & - x \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(x) t^{\ell} + \sum_{\ell'=1}^{\infty} P_{\ell'-1}(x) t^{\ell'} = 0. \end{aligned}$$

Переобозначая $\ell' \rightarrow \ell$, видим, что в каждом из рядов можно подставить нижний предел $\ell = 0$. В самом деле, “лишний” член при $\ell' = -1$ в первом ряде в действительности равен нулю. Объединяя третий и пятый ряды, можем добавить равный нулю член при $\ell = 0$. Итак, все ряды можно соединить в один, тогда все коэффициенты при степенях t равны нулю, что даёт рекуррентное соотношение, связывающее полиномы Лежандра трёх разных порядков:

$$(\ell + 1) P_{\ell+1}(x) - x(2\ell + 1) P_{\ell}(x) + \ell P_{\ell-1}(x) = 0. \quad (6.96)$$

Это соотношение позволяет, зная $P_0(x) = 1$ и $P_1(x) = x$, последовательно вычислять с помощью простых алгебраических операций полиномы Лежандра любой степени.

Совершая аналогичные преобразования с тождеством (6.95), получим рекуррентное соотношение, связывающее полиномы Лежандра и их производные:

$$\ell P_\ell(x) - x P'_\ell(x) + P'_{\ell-1}(x) = 0. \quad (6.97)$$

Используя соотношения (6.96) и (6.97), можно показать, как это и было намечено, что полиномы Лежандра удовлетворяют уравнению (6.87). Продифференцируем (6.96) по x и подставим в полученное выражение $P'_{\ell-1}(x)$ из (6.97), получаем:

$$(\ell + 1) P'_{\ell+1}(x) - x(\ell + 1) P'_\ell(x) - (\ell + 1)^2 P_\ell(x) = 0.$$

Сокращая на $(\ell + 1)$ и заменяя $\ell + 1$ на ℓ , получим:

$$P'_\ell(x) - \ell P_{\ell-1}(x) - x P'_{\ell-1}(x) = 0. \quad (6.98)$$

Ещё раз подставляя $P'_{\ell-1}(x)$ из (6.97), запишем получающееся выражение в виде:

$$(1 - x^2) P'_\ell(x) = -x \ell P_\ell(x) + \ell P_{\ell-1}(x).$$

Дифференцируя его по x , в третий раз подставим $P'_{\ell-1}(x)$ из (6.97). Окончательно получаем:

$$[(1 - x^2) P'_\ell(x)]' = -\ell(\ell + 1) P_\ell(x),$$

то есть именно уравнение (6.87).

Ортогональность и норма

Два полинома Лежандра разной степени ортогональны на интервале $-1 \leq x \leq 1$, то есть:

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_n(x) dx = 0 \quad (\ell \neq n).$$

Для доказательства выпишем уравнение (6.87) для каждого из полиномов:

$$\begin{aligned} [(1 - x^2) P'_\ell(x)]' + \ell(\ell + 1) P_\ell(x) &= 0, \\ [(1 - x^2) P'_n(x)]' + n(n + 1) P_n(x) &= 0. \end{aligned}$$

Домножим первое из уравнений на $P_n(x)$, второе на $P_\ell(x)$, проинтегрируем от -1 до 1 и вычтем из первого второе:

$$\int_{-1}^1 \left\{ P_n(x) [(1-x^2) P_\ell'(x)]' - P_\ell(x) [(1-x^2) P_n'(x)]' \right\} dx +$$

$$+ [\ell(\ell+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_\ell(x) P_n(x) dx = 0.$$

Легко показать, интегрируя по частям, что первый интеграл равен нулю. Выражение в скобках перед вторым интегралом обращается в ноль при $\ell = n$ и $\ell = -n - 1$. Учитывая, что $\ell, n \geq 0$, получаем, что при $\ell \neq n$ интеграл от произведения полиномов должен быть равен нулю – ортогональность доказана.

Норма полиномов Лежандра $\|P_\ell\|$ определяется выражением:

$$\|P_\ell\|^2 = \int_{-1}^1 P_\ell^2(x) dx.$$

Для её вычисления применим дважды формулу (6.96). Сначала заменим в ней $\ell + 1 \rightarrow \ell$ и подставим в интеграл один из полиномов $P_\ell(x)$:

$$\|P_\ell\|^2 = \frac{1}{\ell} \int_{-1}^1 P_\ell(x) [x(2\ell-1)P_{\ell-1}(x) - (\ell-1)P_{\ell-2}(x)] dx.$$

Видно, что второе слагаемое здесь зануляется из-за ортогональности полиномов. Теперь подставим из (6.96) $xP_\ell(x)$, и с учётом ортогональности полиномов степени $\ell-1$ и $\ell+1$ получаем:

$$\|P_\ell\|^2 = \frac{2\ell-1}{2\ell+1} \|P_{\ell-1}\|^2.$$

Последовательное применение этого соотношения даёт:

$$\|P_\ell\|^2 = \frac{2\ell-1}{2\ell+1} \frac{2\ell-3}{2\ell-1} \cdots \frac{3}{5} \frac{1}{3} \|P_0\|^2 = \frac{2}{2\ell+1},$$

поскольку $\|P_0\|^2 = 2$.

Таким образом, можно записать общее соотношение ортонормированности полиномов Лежандра:

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell n}. \quad (6.99)$$

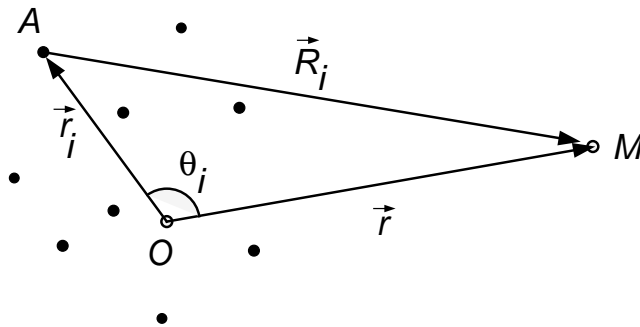
Пример из электростатики

Рассмотрим пример физической задачи, где непосредственно возникают полиномы Лежандра. Пусть изучается электростатическое поле системы точечных зарядов на большом расстоянии от неё. В точке A , определяемой радиус-вектором \vec{r}_i относительно некоторой точки O , находится i -тый заряд q_i . Потенциал электростатического поля, создаваемого этим зарядом в некоторой удалённой “точке наблюдения” M с радиус-вектором \vec{r} ($r \gg r_i$), определяется величиной $1/R_i$, $\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_i} &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r r_i \cos \theta_i + r_i^2}} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}, \quad t = \frac{r_i}{r}, \quad x = \cos \theta_i. \end{aligned}$$

Таким образом, здесь возникла знакомая производящая функция (6.91), следовательно:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r_i}{r}\right)^\ell P_\ell(\cos \theta_i).$$



С учётом этого суммарный потенциал системы зарядов будет представлять собой так называемое разложение по мультипольным моментам:

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_i \frac{q_i}{R_i} = \sum_i q_i \left(\frac{1}{r} + \frac{r_i}{r^2} P_1(\cos \theta_i) + \frac{r_i^2}{r^3} P_2(\cos \theta_i) + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{r} \sum_i q_i + \frac{1}{r^2} \sum_i q_i r_i \cos \theta_i + \frac{1}{r^3} \sum_i q_i r_i^2 P_2(\cos \theta_i) + \dots = \\ &= \frac{Q}{r} + \frac{(\vec{d} \vec{n})}{r^2} + \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2r^3} + \dots,\end{aligned}$$

где $\vec{n} = \vec{r}/r$ – единичный вектор в направлении точки наблюдения, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ – индексы декартовых компонент. Здесь первое слагаемое соответствует монополю, или кулоновскому приближению, то есть полю, создаваемому точечным зарядом $Q = \sum_i q_i$; второе – дипольному приближению, определяемому дипольным моментом системы $\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i$, третье слагаемое соответствует квадрупольному приближению (тензор $D_{\alpha\beta}$ называется квадрупольным моментом системы зарядов), и т.д.

6.9 Присоединённые функции Лежандра. Сферические функции

Вернёмся к общему уравнению для функции полярного угла (6.86) при произвольном m , где теперь следует учесть условие ограниченности решения, полученное при $m = 0$, а именно $\mu = \ell(\ell + 1)$:

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{dw}{dx} \right) + \left(\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) w = 0. \quad (6.100)$$

Очевидно, что из-за последнего слагаемого точки $x = \pm 1$ являются особыми точками уравнения, где функция $w(x)$ должна обращаться в ноль. Представим решение в виде:

$$w(x) = (1 - x^2)^\sigma u(x),$$

где $\sigma > 0$, $u(\pm 1) \neq 0$. Подставим это решение в уравнение (6.100) и исследуем поведение вблизи точек $x = \pm 1$. Например, имеем:

$$\left(\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) (1 - x^2)^\sigma = \ell(\ell + 1) (1 - x^2)^\sigma - m^2 (1 - x^2)^{\sigma-1}.$$

Вблизи точек $x = \pm 1$ первое слагаемое имеет более высокий порядок малости и может быть отброшено. Аналогично, удерживая в уравнении (6.100) только лидирующие члены, получим:

$$4\sigma^2(1-x^2)^{\sigma-1} - m^2(1-x^2)^{\sigma-1} = 0,$$

откуда $\sigma = |m|/2$. Для определённости будем считать, что $m > 0$. Подставляя решение

$$w(x) = (1-x^2)^{m/2} u(x) \quad (6.101)$$

в уравнение (6.100), после несложных преобразований получим следующее уравнение для функции $u(x)$:

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [\ell(\ell+1) - m(m+1)]u = 0, \quad (6.102)$$

которое в частном случае $m = 0$ сводится к уравнению для полиномов Лежандра (6.87):

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_\ell(x)}{dx} \right) + \ell(\ell+1)P_\ell(x) = 0. \quad (6.103)$$

Докажем, что решением уравнения (6.102) является производная порядка m от полинома Лежандра степени ℓ . Продифференцируем m раз уравнение (6.103). Используя известное выражение для производной порядка m от произведения двух функций:

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} (fg) &= \frac{d^m f}{dx^m} g + m \frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}} \frac{dg}{dx} + \frac{m(m-1)}{2} \frac{d^{m-2} f}{dx^{m-2}} \frac{d^2 g}{dx^2} + \dots \\ &+ \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{d^{m-k} f}{dx^{m-k}} \frac{d^k g}{dx^k} + \dots + f \frac{d^m g}{dx^m}, \end{aligned}$$

раскроем производную

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \left(\frac{dP_\ell}{dx} (1-x^2) \right) &= \\ &= \frac{d^{m+2} P_\ell}{dx^{m+2}} (1-x^2) - 2(m+1)x \frac{d^{m+1} P_\ell}{dx^{m+1}} - m(m+1) \frac{d^m P_\ell}{dx^m}. \end{aligned}$$

Подставляя это в производную порядка m от уравнения (6.103), окончательно получаем уравнение (6.102), где $u(x) = d^m P_\ell / dx^m$.

Таким образом, решением уравнения (6.100) является функция

$$P_\ell^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}. \quad (6.104)$$

Она называется *присоединённой функцией Лежандра* степени ℓ порядка m . Очевидно, что $P_\ell^{(0)}(x) = P_\ell(x)$, и что $P_\ell^{(m)}(x) \equiv 0$ при $m > \ell$.

Приведём для иллюстрации несколько функций:

$$\begin{aligned} P_1^{(0)}(\cos \theta) &= \cos \theta, & P_1^{(1)}(\cos \theta) &= \sin \theta; \\ P_2^{(0)}(\cos \theta) &= \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}, & P_2^{(1)}(\cos \theta) &= 3 \sin \theta \cos \theta, \\ P_2^{(2)}(\cos \theta) &= 3 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Присоединённые функции Лежандра одного порядка, но разной степени ортогональны на интервале $-1 \leq x \leq 1$. Приведём без вывода общее соотношение ортонормированности присоединённых функций Лежандра одного порядка:

$$\int_{-1}^1 P_\ell^{(m)}(x) P_n^{(m)}(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell n}. \quad (6.105)$$

Теперь мы имеем возможность собрать воедино функции сферических углов $Y(\theta, \varphi)$, являющиеся решениями уравнения (6.78). При этом удобнее полагать, что целое число m может принимать как положительные, так и отрицательные значения, тогда в формулах (6.101)–(6.105) под m надо понимать $|m|$. Перемножая функции азимутального угла (6.85) и полярного угла (6.104), получаем:

$$\begin{aligned} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) &= A_{\ell m} e^{im\varphi} P_\ell^{(|m|)}(\cos \theta), & (6.106) \\ \ell &= 0, 1, 2, \dots, & m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell. \end{aligned}$$

Набор сферических функций является ортонормированным на сфере, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, с единичной нормой, $\|Y_{\ell m}\| = 1$, то есть:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell' m'}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}. \quad (6.107)$$

Отсюда определяются нормировочные коэффициенты сферических функций (6.106):

$$A_{\ell m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2\ell + 1}{2} \frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!}}.$$

6.10 Общее уравнение для специальных функций

Три рассмотренных класса специальных функций: функции Бесселя, полиномы Лежандра и присоединённые функции Лежандра представляют собой частные случаи *семейств специальных функций*. Как рассмотренные, так и ряд других семейств можно описать единообразно с помощью следующего *общего уравнения для специальных функций*:

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) - q(x) y(x) + \lambda \rho(x) y(x) = 0, \quad (6.108)$$

где аргумент x изменяется в пределах $a \leq x \leq b$; $k(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$ – заданные функции ($k(x) \geq 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) \geq 0$); λ – произвольный положительный числовой параметр, $\lambda > 0$.

Выбирая различные границы области определения a , b и функции $k(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$, получаем разные классы функций $y(x)$.

1. **Элементарные функции.** Пусть $a = 0$, $b = L$, $k(x) \equiv \text{const}$, $q(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv \text{const}$, тогда получаем уравнение вида:

$$y'' + \lambda y = 0.$$

Его решениями являются тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$.

2. **Функции Бесселя.** Пусть $a = 0$, $b = x_0$, $k(x) = x$, $q(x) = \nu^2/x$, $\rho(x) = x$. Подставляя, получим уравнение Бесселя (6.10), решениями которого являются функции Бесселя $J_{\pm\nu}(x)$.

3. **Полиномы Лежандра.** Пусть $a = -1$, $b = 1$, $k(x) = 1 - x^2$, $q(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv 1$. Возникает уравнение Лежандра (6.103), при этом из условия ограниченности решения мы получили $\lambda =$

$\ell(\ell + 1)$. Решениями уравнения являются полиномы Лежандра $P_\ell(x)$.

4. **Присоединённые функции Лежандра.** Случай $a = -1$, $b = 1$, $k(x) = 1 - x^2$, $q(x) = m^2/(1 - x^2)$, $\rho(x) \equiv 1$ даёт уравнение для присоединённых функций Лежандра (6.100).
5. **Полиномы Чебышёва – Эрмита.** Пусть $a = -\infty$, $b = \infty$, $k(x) = e^{-x^2}$, $q(x) \equiv 0$, $\rho(x) = e^{-x^2}$. Уравнение, которое получается при подстановке:

$$\left(e^{-x^2} y' \right)' + \lambda e^{-x^2} y = 0, \quad (6.109)$$

носит название уравнения Чебышёва – Эрмита.

6. **Полиномы Чебышёва – Лагерра.** Пусть $a = 0$, $b = \infty$, $k(x) = x e^{-x}$, $q(x) \equiv 0$, $\rho(x) = e^{-x}$. При этом возникает уравнение:

$$\left(x e^{-x} y' \right)' + \lambda e^{-x} y = 0, \quad (6.110)$$

называемое уравнением Чебышёва – Лагерра.

7. **Обобщённые полиномы Чебышёва – Лагерра.** Наконец, положим $a = 0$, $b = \infty$, $k(x) = x^{s+1} e^{-x}$, $q(x) \equiv 0$, $\rho(x) = x^s e^{-x}$ ($s > -1$). Возникающее при этом уравнение:

$$\left(x^{s+1} e^{-x} y' \right)' + \lambda x^s e^{-x} y = 0 \quad (6.111)$$

называется уравнением для обобщённых полиномов Чебышёва – Лагерра.

В качестве общего свойства всех перечисленных уравнений для специальных функций можно отметить, что каждая из функций $k(x)$ обращается в ноль хотя бы на одной из границ, а в большинстве случаев – на обеих границах интервала (a, b) .

Из физического смысла задач, описываемых уравнениями вида (6.108), возникают условия на поведение решений $y(x)$ вблизи границ интервала (a, b) . Для полиномов Лежандра это было условие ограниченности решений. В других случаях, как мы увидим, это будут условия не слишком быстрого роста решений. Во всех случаях существование решений, удовлетворяющих таким условиям, возможно только при дискретных значениях параметра $\lambda : \lambda_1, \lambda_2, \dots$

λ_n, \dots . Они называются *собственными значениями* уравнения (6.108). Каждому собственному значению λ_n соответствует *собственная функция* $y_n(x)$.

Как нетрудно показать, если $k(a) = k(b) = 0$, то собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$, соответствующие различным собственным значениям λ_n и λ_m , ортогональны на интервале (a, b) с весом $\rho(x)$, то есть:

$$\int_a^b y_n(x) y_m(x) \rho(x) dx \equiv (y_n, y_m) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_n \neq \lambda_m. \quad (6.112)$$

Доказательство аналогично приведенному на с. 162 для полиномов Лежандра. Действительно, записывая уравнение (6.108) для каждой из функций $y_n(x)$, $y_m(x)$, домножая каждое уравнение соответственно на $y_m(x)$ и $y_n(x)$, интегрируя от a до b и вычитая из одного уравнения другое, приходим, используя интегрирование по частям, к соотношению (6.112).

Собственные функции $y_n(x)$ представляют собой *полный набор функций*. Это означает, что любая непрерывная функция $f(x)$ с непрерывной первой и кусочно-непрерывной второй производной на интервале (a, b) может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \quad \text{где} \quad f_n = \frac{(f, y_n)}{(y_n, y_n)}. \quad (6.113)$$

Общим свойством всех перечисленных семейств специальных функций является существование производящей функции (6.56):

$$\Psi(t, x) = \sum_n y_n(x) t^n.$$

6.11 Полиномы Чебышёва – Эрмита

Раскрывая производную в уравнении Чебышёва – Эрмита (6.109) и сокращая на экспоненту, получаем уравнение:

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \quad (6.114)$$

Будем искать его решение в виде степенного ряда:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (6.115)$$

Подставляя это решение в уравнение (6.114), получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов ряда:

$$a_{k+2} = \frac{2k - \lambda}{(k+1)(k+2)} a_k. \quad (6.116)$$

Как и с полиномами Лежандра, можно по отдельности анализировать ряды только с чётными или только с нечётными степенями.

Необходимо следить за поведением ряда при $x \rightarrow \pm\infty$. Рассмотрим для определённости ряд из чётных степеней, $k = 2m$. Из рекуррентного соотношения (6.116) можно видеть, что при больших номерах ряд стремится к “опасной” экспоненте:

$$\left. \frac{a_{2m+2}}{a_{2m}} \right|_{m \gg 1} \simeq \frac{1}{m}, \quad \text{то есть} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{m!} \longrightarrow e^{x^2}.$$

Однако в физической задаче, где возникло уравнение (6.114), такое решение не имеет физического смысла. Необходимо нормированное решение, $(y_n, y_n) < \infty$, здесь же весовая функция $\rho(x) = e^{-x^2}$ не может скомпенсировать рост решения на бесконечности. Единственная возможность получить осмысленное решение – наложить условие на параметр λ , до настоящего момента произвольный, чтобы на некотором члене ряд обрывался и превращался в полином. Видно, что это реализуется, если $\lambda = 2n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Такие решения называются полиномами Чебышёва – Эрмита $H_n(x)$, уравнение для которых принимает вид

$$H_n''(x) - 2x H_n'(x) + 2n H_n(x) = 0. \quad (6.117)$$

Дальнейший анализ полиномов Чебышёва – Эрмита удобно проводить, введя производящую функцию, которая в данном случае определяется так:

$$\Psi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{2xt - t^2}. \quad (6.118)$$

Далее мы заполним пробел, показав, что функции $H_n(x)$, определяемые выражением (6.118), действительно являются решениями уравнения (6.117).

Прежде всего найдём формулу для вычисления полиномов Чебышёва – Эрмита, используя формулу Коши:

$$H_n(x) = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} \Psi(t, x) \right|_{t=0} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad (6.119)$$

где C – замкнутый контур в комплексной плоскости ζ вокруг точки $\zeta = 0$. Делая замену переменной $\zeta \rightarrow z$ в интеграле (6.119), $x - \zeta = z$, нетрудно получить:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.120)$$

Видно, что старшая степень полинома образуется, если каждый раз дифференцировать только экспоненту, и что это будет полином именно степени n , $H_n(x) = 2^n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \dots$. Из (6.120) видно также, что полиномы обладают определённой чётностью:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Выпишем несколько полиномов Чебышёва – Эрмита:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad \dots$$

Знание производящей функции (6.118) позволяет получить *рекуррентные формулы* для полиномов Чебышёва – Эрмита. Вычисляя частные производные функции $\Psi(t, x)$, можем записать два тождества:

$$\Psi_t - 2(x - t)\Psi = 0, \quad \Psi_x - 2t\Psi = 0.$$

Подставляя сюда выражение для производящей функции $\Psi(t, x)$ в виде ряда (6.118), собирая и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем рекуррентные соотношения, связывающие полиномы Чебышёва – Эрмита и их производные:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad (6.121)$$

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x). \quad (6.122)$$

Соотношение (6.121) позволяет, зная $H_0(x)$ и $H_1(x)$, последовательно вычислять с помощью простых алгебраических операций полиномы Чебышёва – Эрмита любой степени.

Используя соотношения (6.121) и (6.122), нетрудно показать, как это и было намечено, что полиномы Чебышёва – Эрмита удовлетворяют уравнению (6.117). Делая в соотношении (6.121) замену $n + 1 \rightarrow n$:

$$H_n(x) - 2x H_{n-1}(x) + 2(n-1) H_{n-2}(x) = 0,$$

и выполняя, с помощью (6.122), следующие подстановки:

$$H_{n-1}(x) = \frac{1}{2n} H'_n(x),$$

$$H_{n-2}(x) = \frac{1}{2(n-1)} H'_{n-1}(x) = \frac{1}{2(n-1)2n} H''_n(x),$$

воспроизводим уравнение (6.117).

Убедимся в ортогональности полиномов Чебышёва – Эрмита с весовой функцией, в соответствии с (6.112), и одновременно найдём их норму $\|H_n\|$. Записывая “скалярное произведение” полиномов, где будем для определённости считать $m < n$, подставим туда полином $H_n(x)$ в виде (6.120):

$$(H_m, H_n) = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx.$$

Интегрируя m раз по частям, видим, что внеинтегральный член каждый раз обращается в ноль. Заменяя образующиеся под интегралом производные полиномов Чебышёва – Эрмита по формуле (6.122), получим:

$$(H_m, H_n) = (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} H_0(x) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-x^2} dx.$$

Поскольку $H_0(x) = 1$, интегрируя ещё раз, получаем в результате ноль. Ортогональность при $m \neq n$ доказана. Если же $m = n$, последний интеграл равен $\sqrt{\pi}$, и мы находим норму полинома. Окончательно, соотношение ортонормированности полиномов Чебышёва – Эрмита записывается в виде:

$$(H_m, H_n) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}. \quad (6.123)$$

6.12 Пример из квантовой механики. Гармонический осциллятор

Рассмотрим пример физической задачи, где возникают полиномы Чебышёва – Эрмита, а именно, задачу о гармоническом осцилляторе в квантовой механике.

Движение микрочастицы описывается в квантовой механике волновой функцией $\Psi(x, y, z, t)$. В случае одномерного движения микрочастицы массы μ во внешнем поле с потенциальной энергией $U(x)$ координатная часть волновой функции, $\psi(x)$, подчиняется стационарному одномерному уравнению Шрёдингера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - U(x)) \psi = 0, \quad (6.124)$$

где E – полная энергия частицы, \hbar – постоянная Планка. Физический смысл волновой функции состоит в том, что величина $dW = |\psi(x)|^2 dx$ определяет вероятность обнаружения микрочастицы в интервале dx вблизи точки x , следовательно, $|\psi(x)|^2$ есть плотность вероятности. В соответствии с этим функция должна подчиняться условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

В случае гармонического осциллятора потенциальная энергия имеет вид

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{\mu\omega^2 x^2}{2},$$

где ω – собственная циклическая частота колебаний осциллятора в классической механике, $\omega = \sqrt{k/\mu}$.

Перейдём в уравнении (6.124) к безразмерным величинам, образовав из параметров, входящих в уравнение, параметр размерности длины x_0 :

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}, \quad \xi = \frac{x}{x_0}, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}.$$

В результате уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2) \psi = 0. \quad (6.125)$$

Можно убедиться прямой подстановкой, что при больших значениях аргумента, $\xi \rightarrow \pm\infty$, решения уравнения (6.125) ведут себя следующим образом: $\psi \rightarrow \exp(\pm\xi^2/2)$. Из условия нормировки очевидно, что физический смысл может иметь решение только с минусом в экспоненте. Будем искать решение уравнения (6.125) в виде:

$$\psi(\xi) = e^{-\xi^2/2} y(\xi). \quad (6.126)$$

Производя подстановку, получаем следующее уравнение для функции $y(\xi)$:

$$y'' - 2\xi y' + (\lambda - 1)y = 0, \quad (6.127)$$

то есть уравнение Чебышёва – Эрмита вида (6.114). В соответствии с проведённым анализом, функция (6.126) может быть нормируемой только для решений уравнения (6.127) в виде полиномов, то есть при условии $\lambda - 1 = 2n$. Отсюда возникает так называемое условие квантования энергии:

$$E = E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Возвращаясь к уравнению (6.124), получаем, что каждому его собственному значению (энергетическому уровню) E_n соответствует собственная функция вида:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi} x_0} e^{-x^2/2x_0^2} H_n \left(\frac{x}{x_0} \right). \quad (6.128)$$

Функции $\psi_n(x)$ называются также функциями гармонического осциллятора. Набор этих функций является ортонормированным:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{nm}.$$

Как уже отмечалось, величина $|\psi(x)|^2$ имеет смысл плотности вероятности обнаружения микрочастицы в точке x . На рис. 6.3 изображены графики плотности вероятности для состояний с $n = 0$ и $n = 1$. Из графика для $n = 1$ непосредственно видно, что это состояние квантового осциллятора несовместимо с классическим представлением о движении: вероятности обнаружить частицу слева и

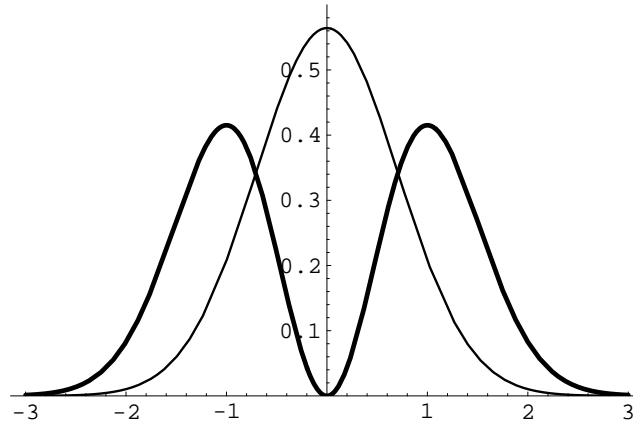


Рис. 6.3: Графики квадратов функций гармонического осциллятора $|\psi_0(x)|^2$ (тонкая линия) и $|\psi_1(x)|^2$ (толстая линия)

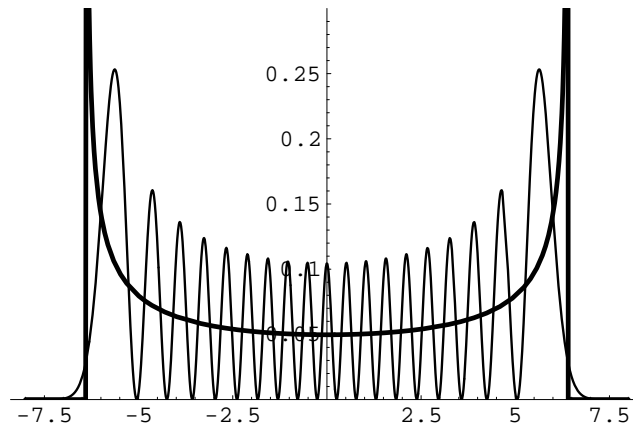


Рис. 6.4: Графики квадрата функции гармонического осциллятора $|\psi_n(x)|^2$ при $n = 18$ (тонкая линия) и плотности вероятности $p_{class}(x)$ (6.129) для классического осциллятора с такой же амплитудой (толстая линия). Вертикальные линии соответствуют точкам $-A$ и A

справа от точки $x = 0$ одинаковы, так как функция симметрична. Однако в точке $x = 0$ плотность вероятности обнаружения частицы строго равна нулю!

Интересно также сравнить с классическим осциллятором состояние квантового осциллятора при большом n , см. рис. 6.4. Число нулей пульсирующей функции $|\psi_n(x)|^2$ равно числу нулей полинома $H_n(x)$ и равно n . Но если точность Δx прибора, фиксирующего координату, больше ширины пульсаций, то наблюдаемая плотность вероятности примет вид сглаженной функции, которая оказывается близкой к классической функции для плотности вероятности $p_{class}(x)$. Эту функцию нетрудно найти, если учесть, что вероятность

dW обнаружения частицы на интервале $(x, x + dx)$ пропорциональна времени $dt = dx/v(x)$, где $v(x)$ – скорость частицы в точке x . Из закона движения классического осциллятора $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$, где A – амплитуда, ω – частота, δ – начальная фаза колебаний, находим, что плотность вероятности равна

$$p_{class}(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}} \quad \text{при} \quad -A < x < A, \quad (6.129)$$

и равна нулю вне этого интервала. Из рис. 6.4 видно, что функция (6.129) неплохо изображает плотность вероятности квантового осциллятора, усреднённую по пульсациям. Таким образом, с ростом энергии квантовой системы её поведение приближается к классическому. Это общее свойство носит название *принципа соответствия*.

6.13 Полиномы Чебышёва – Лагерра

Раскрывая производную в уравнении Чебышёва – Лагерра (6.110) и сокращая на экспоненту, получаем уравнение:

$$x y'' + (1 - x) y' + \lambda y = 0. \quad (6.130)$$

Будем искать его решение в виде степенного ряда:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (6.131)$$

Подставляя это решение в уравнение (6.130), получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов ряда:

$$a_{k+1} = \frac{k - \lambda}{(k + 1)^2} a_k. \quad (6.132)$$

Необходимо следить за поведением ряда при $x \rightarrow \infty$, а значит, за его членами с большими номерами, $k \gg 1$. Из рекуррентного соотношения (6.132) можно видеть, что при больших номерах ряд стремится к экспоненте:

$$\left. \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|_{k \gg 1} \simeq \frac{1}{k}, \quad \text{то есть} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \longrightarrow e^x.$$

Однако в физической задаче, где возникло уравнение (6.130), такое решение не имеет физического смысла. Необходимо нормируемое решение, $(y_n, y_n) < \infty$, здесь же весовая функция $\rho(x) = e^{-x}$ не может скомпенсировать рост решения на бесконечности. Как и в предыдущих случаях, единственная возможность получить осмысленное решение – наложить условие на параметр λ , до настоящего момента произвольный, чтобы на некотором члене ряд обрывался и превращался в полином. Видно, что это реализуется, если $\lambda = n$, где n – целое.

Такие решения называются полиномами Чебышёва – Лагерра $L_n(x)$, уравнение для которых принимает вид

$$x L_n''(x) + (1 - x) L_n'(x) + n L_n(x) = 0. \quad (6.133)$$

Дальнейший анализ полиномов Чебышёва – Лагерра удобно проводить, введя производящую функцию, которая в данном случае определяется так:

$$\Psi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = \frac{1}{1-t} e^{-xt/(1-t)}. \quad (6.134)$$

Далее мы покажем, что функции $L_n(x)$, определяемые этим выражением, являются решениями уравнения (6.133).

Найдём формулу для вычисления полиномов Чебышёва – Лагерра, используя формулу Коши:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} \Psi(t, x) \right|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad (6.135)$$

где C – замкнутый контур в комплексной плоскости ζ вокруг точки $\zeta = 0$. Сделаем в интеграле (6.135) следующую замену переменной $\zeta \rightarrow z$:

$$\frac{x\zeta}{1-\zeta} = z - x, \quad \zeta = 1 - \frac{x}{z}, \quad d\zeta = \frac{x dz}{z^2}. \quad (6.136)$$

После преобразований получаем:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.137)$$

Видно, что старшая степень полинома образуется, если каждый раз дифференцировать только экспоненту, и что это будет полином именно степени n , старший член которого легко найти:

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots . \quad (6.138)$$

Приведём несколько младших полиномов Чебышёва – Лагерра:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = -x + 1, \quad L_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1,$$

$$L_3(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 3x + 1, \dots .$$

Следующим шагом будет получение рекуррентных соотношений. Вычисляя частные производные производящей функции (6.134), получим два тождества:

$$(1-t)\Psi_x + t\Psi = 0, \quad (1-t)^2\Psi_t - (1-x-t)\Psi = 0.$$

Подставляя сюда выражение для производящей функции $\Psi(t, x)$ в виде ряда (6.134), собирая и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем рекуррентные соотношения, связывающие полиномы Чебышёва – Лагерра и их производные:

$$L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x), \quad (6.139)$$

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0. \quad (6.140)$$

Соотношение (6.140) позволяет, зная $L_0(x)$ и $L_1(x)$, последовательно вычислять с помощью простых алгебраических операций полиномы Чебышёва – Лагерра любой степени.

Используя соотношения (6.139) и (6.140), нетрудно показать, что полиномы Чебышёва – Лагерра удовлетворяют уравнению (6.133). Производя в формуле (6.140) замену $n \rightarrow n+1$ и затем дифференцируя её по x , получим:

$$(n+2)L'_{n+2}(x) - (2n+3-x)L'_{n+1}(x) + L_{n+1}(x) + (n+1)L'_n(x) = 0.$$

Исключая отсюда с помощью формулы (6.139) $L'_{n+2}(x)$, а затем $L'_{n+1}(x)$, получаем:

$$xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x) - (n+1)L_{n+1}(x) = 0.$$

Дифференцируя это соотношение ещё раз по x и исключая $L'_{n+1}(x)$, воспроизводим уравнение (6.133).

Убедимся в ортогональности полиномов Чебышёва – Лагерра с весовой функцией, в соответствии с (6.112), и одновременно найдём их норму $\|L_n\|$. Записывая “скалярное произведение” полиномов, где будем для определённости считать $m < n$, подставим туда полином $L_n(x)$ в виде (6.137):

$$(L_m, L_n) = \int_0^{\infty} L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} L_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) dx.$$

Интегрируя m раз по частям, видим, что внеинтегральный член каждый раз обращается в ноль. В результате получаем:

$$(L_m, L_n) = \frac{(-1)^m}{n!} \int_0^{\infty} \frac{d^m L_m}{dx^m} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^n e^{-x}) dx.$$

В соответствии с (6.138) производная под интегралом равна: $d^m L_m / dx^m = (-1)^m$. Интегрируя ещё раз, получаем в результате ноль. Ортогональность при $m \neq n$ доказана. Если $m = n$, последний интеграл даёт $n!$. Окончательно, соотношение ортонормированности полиномов Чебышёва – Лагерра получаем в виде:

$$(L_m, L_n) = \delta_{mn}. \quad (6.141)$$

6.14 Обобщённые полиномы Чебышёва – Лагерра

Раскрывая производную в уравнении для обобщённых полиномов Чебышёва – Лагерра (6.111) и сокращая на фактор $x^s e^{-x}$, получаем уравнение:

$$x y'' + (1 + s - x) y' + \lambda y = 0. \quad (6.142)$$

Видно, что при $s = 0$ из (6.142) воспроизводится уравнение Чебышёва – Лагерра. Это же свойство будет иметь место и для решений, что можно проследить в последующих формулах.

Поиск решения в виде степенного ряда даёт следующее рекуррентное соотношение для коэффициентов:

$$a_{k+1} = \frac{k - \lambda}{(k + 1)(k + 1 + s)} a_k. \quad (6.143)$$

При больших номерах этот ряд также стремится к экспоненте e^x , чего не должно быть по физическим соображениям. Полагая $\lambda = n$, где n – целое, получаем, что на n -ом члене ряд обрывается и превращается в полином. Такие решения называются обобщёнными полиномами Чебышёва – Лагерра и обозначаются $L_n^s(x)$.

Производящая функция для обобщённых полиномов Чебышёва – Лагерра имеет вид:

$$\Psi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x) t^n = \frac{1}{(1-t)^{s+1}} e^{-xt/(1-t)}. \quad (6.144)$$

Формулу для вычисления обобщённых полиномов Чебышёва – Лагерра через производящую функцию найдём, как и для обычных полиномов, используя формулу Коши и производя в интеграле ту же замену переменной (6.136). Получаем:

$$L_n^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+s} e^{-x}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.145)$$

Видно, что это полином степени n , старший член которого имеет вид (6.138). Приведём несколько обобщённых полиномов Чебышёва – Лагерра:

$$\begin{aligned} L_0^s(x) &= 1, & L_1^s(x) &= -x + 1 + s, \\ L_2^s(x) &= \frac{x^2}{2} - (2 + s)x + \frac{(2 + s)(1 + s)}{2}, \dots \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему параграфу, можно найти рекуррентные соотношения для обобщённых полиномов Чебышёва – Лагерра, при этом соотношение с производными имеет тот же вид, что и для обычных полиномов:

$$[L_{n+1}^s(x)]' = [L_n^s(x)]' - L_n^s(x),$$

$$(n + 1) L_{n+1}^s(x) - (2n + 1 + s - x) L_n^s(x) + (n + s) L_{n-1}^s(x) = 0.$$

Эти соотношения позволяют показать, что обобщённые полиномы Чебышёва – Лагерра удовлетворяют уравнению (6.142).

Аналогично можно найти также и соотношение ортонормированности для обобщённых полиномов Чебышёва – Лагерра в виде:

$$(L_m^s, L_n^s) = \int_0^\infty L_m^s(x) L_n^s(x) x^s e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+s+1)}{n!} \delta_{mn}. \quad (6.146)$$

6.15 Уравнение Шрёдингера для атома водорода

Рассмотрим ещё один пример физической задачи, где возникают специальные функции – атом водорода в квантовой механике. Потенциальная энергия электрона в поле ядра имеет вид:

$$U(x, y, z) = U(r) = -\frac{e^2}{r}.$$

Уравнение Шрёдингера для координатной части волновой функции $\psi(x, y, z)$, описывающей движение электрона, которую естественно рассматривать в сферических координатах, $\psi(r, \theta, \varphi)$, записывается в форме:

$$\Delta\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0, \quad (6.147)$$

где m_e – масса электрона, \hbar – постоянная Планка. Величина E есть полная энергия электрона. Будем рассматривать случай, когда электрон связан в атоме, при этом $E < 0$. Случай $E > 0$ описывает взаимодействие электрона большой энергии с ядром, когда они не образуют связанного состояния.

Волновая функция должна подчиняться условию нормировки:

$$\int |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 dV = 1,$$

где интеграл вычисляется по всему бесконечному пространству.

Разделяя переменные в соответствии с анализом, проведённым в параграфе 6.7, то есть подставляя в уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} \psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0 \quad (6.148)$$

частное решение в виде $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi)$, можем видеть, что его угловая часть есть сферическая функция $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$, подчиняющаяся уравнению

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) + \ell(\ell + 1) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = 0.$$

С учётом этого для радиальной функции $R(r)$ имеем уравнение

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[\frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (6.149)$$

Из параметров уравнения можно скомпоновать параметры размерности длины, a , и размерности энергии, E_0 , и перейти в уравнении к обезразмеренным величинам ρ и ε :

$$a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}, \quad E_0 = \frac{e^2}{a} = \frac{m_e e^4}{\hbar^2}, \quad \frac{r}{a} \equiv \rho, \quad \frac{E}{E_0} \equiv \varepsilon.$$

Уравнение (6.149) переписывается в виде

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(2\varepsilon + \frac{2}{\rho} - \frac{\ell(\ell + 1)}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (6.150)$$

Следующий шаг преобразования уравнения – переход к новой неизвестной функции $y(\rho)$, $R(\rho) = y(\rho)/\sqrt{\rho}$. Уравнение для неё приобретает вид:

$$\frac{d^2 y}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dy}{d\rho} + \left(2\varepsilon + \frac{2}{\rho} - \frac{s^2}{4\rho^2} \right) y = 0, \quad (6.151)$$

где введено обозначение $s = 2\ell + 1$.

Наконец, удобно произвести ещё одну, последнюю замену параметра и переменной (напомним, что $\varepsilon < 0$):

$$2\varepsilon \equiv -\frac{1}{\nu^2}, \quad \rho \equiv \frac{\nu}{2} x.$$

Уравнение для функции $y(x)$ записывается в виде:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \left(\nu - \frac{x}{4} - \frac{s^2}{4x} \right) y = 0. \quad (6.152)$$

Будем анализировать это уравнение в двух предельных случаях, $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$. Вблизи нуля, подставляя решение в виде степенной

функции $y(x) = x^\alpha$, получим, что $\alpha = \pm s/2$. Очевидно, что следует выбрать знак “плюс”, поскольку исходная функция $R(r)$ должна быть интегрируемой в нуле при любом ℓ .

Анализируя уравнение (6.152) в пределе $x \rightarrow \infty$ и выделяя лидирующие члены, получим уравнение $x y'' - (x/4) y = 0$, решением которого является экспонента: $\exp(-x/2)$.

С учётом асимптотик $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$ произведём ещё одну, последнюю замену искомой функции $y(x) \rightarrow f(x)$ следующим образом:

$$y(x) = x^{s/2} e^{-x/2} f(x).$$

Подставляя $y(x)$ в уравнение (6.152), окончательно получаем уравнение для функции $f(x)$:

$$x f'' + (1 + s - x) f' + \left(\nu - \frac{s+1}{2} \right) f = 0, \quad (6.153)$$

которое оказывается уравнением для обобщённых полиномов Чебышёва – Лагерра (6.142). Как мы видели из соответствующего анализа, нормируемые решения этого уравнения существуют при

$$\nu - \frac{s+1}{2} \equiv n_r = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что параметр ν , определяющий энергию электрона, принимает целочисленные значения:

$$\nu = n_r + \frac{s+1}{2} = n_r + \ell + 1 \equiv n = 1, 2, \dots$$

Число n называется *главным квантовым числом*, оно определяет энергию электрона в атоме водорода:

$$\varepsilon = -\frac{1}{2n^2}, \quad E = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 n^2}. \quad (6.154)$$

Число ℓ называется *орбитальным квантовым числом*. При фиксированном n оно может принимать значения: $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Для функции $y(x)$ получаем:

$$y_{n_r}(x) = x^{s/2} e^{-x/2} L_{n_r}^s(x), \quad x = \frac{2\rho}{n}. \quad (6.155)$$

Окончательно, для радиальной функции $R(r)$ имеем:

$$R_{n\ell}(\rho) = A_n \left(\frac{2\rho}{n} \right)^\ell e^{-\rho/n} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1} \left(\frac{2\rho}{n} \right), \quad (6.156)$$

где A_n – нормировочный коэффициент.

Контрольные задания к главе 6

1. Постройте набор собственных функций $v(\rho, \varphi)$ (6.6) для мембраны, докажите их ортогональность.
2. Докажите соотношение $I_{-n}(x) = I_n(x)$ для модифицированных функций Бесселя.
3. Выведите рекуррентные соотношения для модифицированных функций Бесселя, аналогичные формулам (6.26), (6.28).
4. Найдите асимптотику функции Макдональда целочисленного порядка вблизи точки $x = 0$.
5. Выведите асимптотические формулы (6.73) для модифицированной функции Бесселя и функции Макдональда.
6. Получите из тождества (6.95) рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра (6.97).

Глава 7

Метод конечных разностей

В настоящей главе приведены базовые понятия основного метода численного решения уравнений в частных производных математической физики – метода конечных разностей. Даны понятия о сетках и сеточных функциях. Излагается схема аппроксимации простейших дифференциальных операторов разностными операторами. Рассмотрены примеры некоторых разностных задач. Даны понятия о разрешимости, сходимости и устойчивости разностных схем.

7.1 Сетки и сеточные функции. Аппроксимация дифференциальных операторов

В предыдущих главах мы познакомились с аналитическими методами решения уравнений в частных производных математической физики. Однако круг практических задач, где эти методы достаточны для анализа, довольно узок. Например, в одномерном уравнении теплопроводности (3.8) коэффициенты могут зависеть от обоих аргументов:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c(x, t) \rho(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (7.1)$$

При этом метод разделения переменных применим к данному уравнению только в частном случае, когда коэффициенты разбиваются на произведения функций: $k(x, t) = k_1(x) k_2(t)$, и т.д. Однако в большинстве задач зависимость коэффициентов от аргументов не имеет такого вида, более того, они могут зависеть также и от температуры, что приводит к квазилинейному уравнению.

Задачи, не поддающиеся аналитическому решению, приходится решать численными методами. Для уравнений в частных производных математической физики основным численным методом является метод конечных разностей, или *метод сеток*. Его базовым принципом является замена области непрерывного изменения аргумента дискретным множеством точек (*узлов*), называемым *сеткой*. Вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определённые в узлах сетки и называемые *сеточными функциями*. При этом производные, входящие в уравнение, заменяются соответствующими разностными отношениями, дифференциальное уравнение заменяется на систему алгебраических уравнений, называемую *разностным уравнением*. Начальные и граничные условия также заменяются на соответствующие разностные условия для сеточной функции.

Основным критерием применимости этого метода является его сходимость: при уменьшении шага сетки набор решений разностных задач должен сходиться к решению исходной непрерывной задачи – дифференциального уравнения.

Рассмотрим примеры построения сеток. Пусть аргумент x принимает значения в интервале $0 \leq x \leq \ell$. Разобьём интервал на N равных частей длины $h = \ell/N$. Массив $\{x\}$ точек $x_i = ih$ ($i = 0, 1, \dots, N$) называется *равномерной разностной сеткой* на отрезке $0 \leq x \leq \ell$, точки x_i – *узлами* сетки, число h – *шагом* сетки. Повышение точности метода сеток обеспечивается увеличением числа узлов N , и, следовательно, уменьшением шага h . Это приводит к увеличению массива обрабатываемых данных и времени расчётов.

Однако в некоторых задачах может быть заранее известно, что в одной части интервала значений аргумента исследуемая функция изменяется быстро, а в другой – медленно. При этом использование равномерной сетки, с одинаковым уменьшением шага на всём интервале, оказывается нерациональным, поскольку в области медленного изменения функции нет необходимости в дальнейшем уменьшении шага. При этом оказывается целесообразным использовать неравномерную сетку. В общем случае отрезок $0 \leq x \leq \ell$ можно разбить на N частей, вводя массив $\{x\}$ произвольных точек $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < \ell$, $x_0 = 0$, $x_N = \ell$. Получаем неравномерную сетку с переменным шагом $h_i = x_i - x_{i-1}$.

При анализе уравнения на бесконечной прямой, $-\infty < x < \infty$, можно ввести сетку $\{x\}$, состоящую из “бесконечного” числа узлов $x + ih$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), с началом в любой точке x . Очевидно, что в действительности массив i нужно ограничивать по модулю каким-либо достаточно большим числом, определяемым из условий задачи.

Функция $y_i = y(x_i)$, определённая на сетке $\{x\}$, называется *сеточной функцией*.

Аналогично строится двумерная сетка в задаче с двумя переменными. Пусть область изменения аргументов (x, t) представляет собой прямоугольник, $0 \leq x \leq \ell$, $0 \leq t \leq T$. Разбивая интервал $0 \leq x \leq \ell$ на N равных частей, получим сетку $\{x\}$, $x_i = ih$ ($i = 0, 1, \dots, N$) с шагом $h = \ell/N$. Точно так же разобьём интервал $0 \leq t \leq T$ на N_0 равных частей, при этом получится сетка $\{t\}$, $t_j = j\tau$ ($j = 0, 1, \dots, N_0$) с шагом $\tau = T/N_0$. Множество узлов (x_i, t_j) образует двумерную сетку, равномерную по каждой из переменных. Иногда оказывается целесообразным построение неравномерных сеток.

Непрерывной функции $u(x, t)$, определённой на прямоугольнике $0 \leq x \leq \ell$, $0 \leq t \leq T$, ставится в соответствие *сеточная функция* $u_i^j = u(x_i, t_j)$.

Оператор L_h , преобразующий сеточную функцию y в сеточную функцию $Y = L_h y$, называется *сеточным*, или *разностным оператором*. Дифференциальный оператор L , определённый для функций непрерывного аргумента, может быть аппроксимирован (приближённо заменён) разностным оператором L_h , заданным на сеточных функциях. При этом каждая производная заменяется разностным отношением, содержащим значения сеточной функции в нескольких узлах сетки.

Рассмотрим на интервале $0 \leq x \leq \ell$ сетку $\{x\}$, $x_i = ih$ ($i = 0, 1, \dots, N$) с шагом $h = \ell/N$. Пусть дифференциальный оператор L представляет собой первую производную, $Lv = v'$ функции $v(x)$. Существует множество способов его замены разностным оператором. Простейшими являются:

левая разностная производная

$$Lv \rightarrow L_h^- v_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}; \quad (7.2)$$

правая разностная производная

$$L v \rightarrow L_h^+ v_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}; \quad (7.3)$$

центральная разностная производная

$$L v \rightarrow L_h^0 v_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}. \quad (7.4)$$

Каждый из этих разностных операторов содержит значения v в двух узлах сетки. Такие операторы называются двухточечными разностными операторами, или операторами первого порядка. Первую производную можно также аппроксимировать трёхточечным оператором вида

$$L_h^{(\sigma)} v_i = \sigma L_h^+ v_i + (1 - \sigma) L_h^- v_i = \frac{\sigma v_{i+1} + (1 - 2\sigma)v_i - (1 - \sigma)v_{i-1}}{h}, \quad (7.5)$$

где σ – произвольное число. В частности, при $\sigma = 0, 1, 1/2$ получаем из (7.5) двухточечные операторы (7.2), (7.3), (7.4) соответственно.

При замене $L v = v'$ разностным выражением $L_h^\pm v_i$ возникает погрешность $L_h^\pm v_i - (L v)_i = \psi_i^h$, которая называется погрешностью аппроксимации дифференциального оператора L разностным оператором L_h . Естественно потребовать, чтобы эта погрешность стремилась к нулю при $h \rightarrow 0$. Пусть функция $v(x)$ непрерывна вместе с первой и второй производными на отрезке $0 \leq x \leq \ell$. Используя разложение в ряд Тэйлора, в окрестности точки x_i можно записать:

$$v_{i\pm 1} = v_i \pm h v_i' + \frac{h^2}{2} v_i'' + O(h^3). \quad (7.6)$$

Для погрешностей получаем:

$$\psi_i^h = L_h^- v_i - v_i' = O(h), \quad \psi_i^h = L_h^+ v_i - v_i' = O(h). \quad (7.7)$$

Введём следующие определения:

- 1) разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L на сетке $\{x\}$, если для достаточно гладкой функции $v(x)$ величина максимальной погрешности $\max_{\{x\}} |\psi_i^h| = \max_{\{x\}} |L_h v_i - (L v)_i|$ стремится к нулю при $h \rightarrow 0$;

- 2) разностный оператор L_h аппроксимирует с порядком n ($n > 0$) дифференциальный оператор L , если $\max_{\{x\}} |\psi_i^h| = O(h^n)$, или $\max_{\{x\}} |\psi_i^h| \leq M h^n$, где M – положительная постоянная, не зависящая от h .

Из формул (7.7) видим, что разностные операторы L_h^\pm аппроксимируют оператор первой производной L , $L v = v'$, с первым порядком. Для погрешности аппроксимации трёхточечным оператором (7.5) получаем

$$\psi_i^h = L_h^{(\sigma)} v_i - v_i' = h \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) v_i'' + O(h^2), \quad (7.8)$$

то есть центральная разностная производная (7.4) (для которой $\sigma = 1/2$) аппроксимирует первую производную с более высоким, чем операторы L_h^\pm , вторым порядком.

Рассмотрим дифференциальный оператор второй производной, $L v = v''$. Очевидно, что аппроксимировать его двухточечным разностным оператором невозможно. Выберем три узла, x_{i-1}, x_i, x_{i+1} , и построим трёхточечный разностный оператор

$$L_h v_i = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}. \quad (7.9)$$

Пусть функция $v(x)$ имеет непрерывные производные до 4-й включительно, тогда разложение в ряд Тэйлора вблизи точки x_i даёт:

$$v_{i\pm 1} = v_i \pm h v_i' + \frac{h^2}{2} v_i'' \pm \frac{h^3}{6} v_i''' + \frac{h^4}{24} v_i^{(IV)} + O(h^5). \quad (7.10)$$

Для погрешности аппроксимации получаем

$$L_h v_i - v_i'' = \frac{h^2}{12} v_i^{(IV)} + O(h^3), \quad (7.11)$$

то есть разностный оператор (7.9) аппроксимирует вторую производную со вторым порядком.

7.2 Разностная задача для уравнения теплопроводности

Рассмотрим дифференциальный оператор по двум переменным

$$L u = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7.12)$$

где функция $u(x, t)$ определена на прямоугольнике $0 \leq x \leq \ell$, $0 \leq t \leq T$. Как это описано выше, введём сетку

$$\{x, t\}, x_i = ih, t_j = j\tau \quad (i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, N_0)$$

с шагами $h = \ell/N$, $\tau = T/N_0$. Рассмотрим сеточную функцию $u_i^j = u(x_i, y_j)$ и заменим производные разностными операторами:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{j+1} \rightarrow \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j \rightarrow \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}.$$

В результате получим разностный оператор

$$L_{h\tau} u_i^{j+1} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - a^2 \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}. \quad (7.13)$$

Этот оператор определён на массиве из четырёх точек (x_{i-1}, t_j) , (x_i, t_j) , (x_{i+1}, t_j) , (x_i, t_{j+1}) , см. рис. 7.1 (a). Следует заметить, что

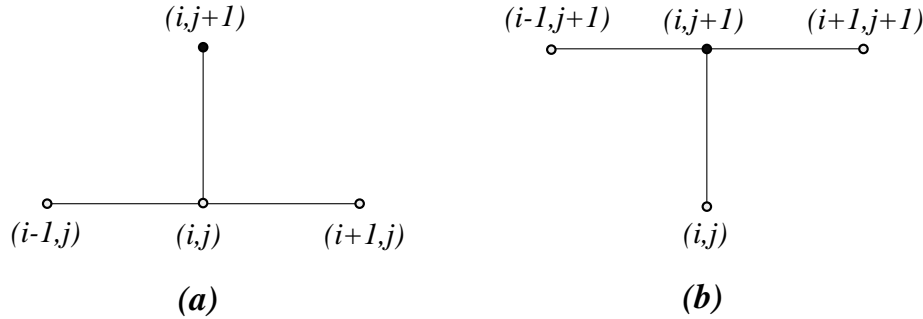


Рис. 7.1: Четырёхточечные массивы для аппроксимации дифференциального оператора (7.12) разностным

разностный оператор (7.13) определён не во всех узлах сетки $\{x, t\}$, а только в узлах (x_i, t_j) при $0 < i < N$, $j > 0$. Эти узлы называются *внутренними*. В остальных узлах, расположенных на трёх сторонах рассматриваемого прямоугольника, $i = 0$, $i = N$, $j = 0$, и называемых *граничными*, должны быть заданы граничные и начальные условия.

Из анализа, проведённого в предыдущем параграфе, следует, что оператор $L_{h\tau}$ имеет первый порядок аппроксимации по τ и второй по h :

$$\max_{\{x, t\}} |L_{h\tau} u_i^j - (Lu)_i^j| = O(h^2 + \tau). \quad (7.14)$$

Существуют и другие возможности аппроксимации, например, разностный оператор

$$L_{h\tau} u_i^{j+1} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - a^2 \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2}, \quad (7.15)$$

определённый на массиве из четырёх точек (x_i, t_j) , (x_{i-1}, t_{j+1}) , (x_i, t_{j+1}) , (x_{i+1}, t_{j+1}) , см. рис. 7.1 (b), аппроксимирует оператор Lu с тем же порядком, что и оператор (7.13).

Для того, чтобы решить методом сеток какое-либо дифференциальное уравнение, например $Lu = -f$, требуется, кроме построения разностного оператора, аппроксимировать на сетке правую часть уравнения и краевые условия. После этого формулируется *разностная задача*, или *разностная схема*, то есть записывается система разностных (алгебраических) уравнений и дополнительные условия на сетке.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 \leq x \leq \ell, & \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq \ell, & \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \quad u(\ell, t) = \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T, & \end{aligned} \quad (7.16)$$

на равномерной сетке $\{x, t\}$, $x_i = ih$, $t_j = j\tau$ ($i = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, N_0$). Заменяя оператор (7.12) разностным оператором (7.13), получаем разностную краевую задачу вида

$$y_i^{j+1} - y_i^j = \gamma \left(y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j \right) + \tau \varphi_i^{j+1}, \quad 0 < i < N, \quad j \geq 0,$$

$$\gamma = \frac{a^2 \tau}{h^2}, \quad \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_j), \quad y_i^0 = u_0(x_i), \quad (7.17)$$

$$y_0^j = \mu_1(t_j), \quad y_N^j = \mu_2(t_j). \quad (7.18)$$

Выражая из уравнения (7.17) величину y_i^{j+1} :

$$y_i^{j+1} = (1 - 2\gamma) y_i^j + \gamma \left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j \right) + \tau \varphi_i^{j+1}, \quad (7.19)$$

видим, что при известных значениях сеточной функции y_i^j во всех узлах слоя j по этой формуле можно найти значения y_i^{j+1} во всех узлах $i = 1, 2, \dots, N - 1$ слоя $j + 1$. Поскольку в узлах нулевого

слоя, $j = 0$, задано начальное условие $y_i^0 = u_0(x_i)$, формула (7.19) позволяет вычислять значения сеточной функции от слоя к слою, с учётом граничных условий (7.18). Разностная задача вида (7.17) называется *явной*.

Иная ситуация складывается, если аппроксимировать дифференциальный оператор (7.12) в уравнении (7.16) разностным оператором (7.15). При этом для определения значений сеточной функции y_i^{j+1} в узлах слоя $j + 1$ получаем систему алгебраических уравнений вида

$$\gamma y_{i-1}^{j+1} - (1 + 2\gamma) y_i^{j+1} + \gamma y_{i+1}^{j+1} = -y_i^j - \tau \varphi_i^{j+1}, \quad 0 < i < N. \quad (7.20)$$

Такая схема называется *неявной*, или *схемой с опережением*.

После построения разностной схемы важнейшим является вопрос о её *разрешимости*, то есть о разрешимости полученной системы алгебраических уравнений. В случае, если система неразрешима, разностная схема непригодна.

Допустим, разрешимость имеет место. Следующий важный вопрос, который необходимо исследовать - *сходимость* разностной схемы. При уменьшении шага сетки решение разностной задачи должно сходиться к определённому результату, который и должен быть решением исходного дифференциального уравнения.

Наконец, третья важная характеристика разностной схемы - её *устойчивость*. Все численные расчёты проводятся с конечным числом знаков, и на каждом шаге вычислений возникают ошибки округления. Если малые ошибки округления, возникающие в ходе вычислений, приводят при сгущении сетки к большим искажениям решения, такая схема называется неустойчивой и непригодна для практики. Ошибки вычислений можно рассматривать, как возмущения входных данных задачи – начальных и граничных условий и правой части уравнения. В связи с этим становится актуальным вопрос о непрерывной зависимости решения от входных данных при уменьшении шага сетки. Если это условие выполнено, схема называется устойчивой.

При решении конкретных задач отыскивают различные возможности влияния на устойчивость разностной схемы. Приведём без подробного анализа наиболее простой способ управления устойчивостью и точностью решения на примере краевой задачи для уравне-

ния теплопроводности (7.16). Аппроксимируем дифференциальный оператор (7.12) однопараметрической линейной комбинацией рассмотренных выше разностных операторов, взяв оператор (7.15) с весом σ и оператор (7.13) с весом $(1 - \sigma)$, где σ – произвольное число. Получающийся оператор будет определён на шеститочечном массиве (x_{i-1}, t_j) , (x_i, t_j) , (x_{i+1}, t_j) , (x_{i-1}, t_{j+1}) , (x_i, t_{j+1}) , (x_{i+1}, t_{j+1}) , объединяющем точки на рис. 7.1 (a), (b). Предполагая, что функция $u(x, t)$ имеет нужное число непрерывных частных производных и разлагая её в ряд по обеим переменным вблизи точки (x_i, t_j) , найдём погрешность аппроксимации для выбранного разностного оператора. В результате имеем

$$L_{h\tau} u_i^j - (Lu)_i^j = O(h^2) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) O(\tau) + O(\tau^2), \quad (7.21)$$

таким образом, выбирая $\sigma = 1/2$, мы получим схему повышенного порядка аппроксимации, имеющую более высокие характеристики сходимости и устойчивости.

Контрольные задания к главе 7

1. Получите выражение (7.8) для погрешности аппроксимации оператора первой производной трёхточечным разностным оператором (7.5).
2. Получите выражение (7.11) для погрешности аппроксимации оператора второй производной трёхточечным разностным оператором (7.9).

Литература

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1977.
- [2] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 2, 4. М., 1981.
- [3] Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М., 1984.
- [4] Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М., 1980.
- [5] Математическая физика: Энциклопедия. М., 1998.
- [6] Свешников А.Б., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М., 1993.
- [7] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.
- [8] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М., 1976.
- [9] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М., 1966.
- [10] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1988.
- [11] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М., 1988.
- [12] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М., 1984.

Предметный указатель

- Бесселя
интеграл, 143, 145
уравнение, 133, 153
функции, 134, 144
функции модифицированные, 142
- волна
большая уединённая, 123, 128
монохроматическая, 126
стоячая, узлы и пучности, 47
волновая функция, 170
волновой пакет, 126
- Гаусса–Остроградского формула, 25, 59, 80, 93
Гельмгольца уравнение, 99, 131, 151
фундаментальные решения, 103, 105
функция точечного источника, 107
- Грина формулы
вторая, 81, 91
двумерная, 25
основная интегральная, 83, 91
первая, 81
- Гука закон, 27
- гамма-функция, 135, 147
гармоническая функция, 85
- гауссов интеграл, 70
гауссов колокол, 70
градиентная катастрофа, 118, 120, 124
- Даламбера формула, 31, 37
Дирака дельта-функция, 69, 72, 92
- Дирихле задача, 78
- дискриминант уравнения, 6, 30
дисперсия, 123
- Кортевега–де Фриса уравнение, 123
- Коши формула, 146
Кронеккера символ, 48, 139
- квантовая механика, 170
- коэффициент
диффузии, 57
пористости, 58
температуропроводности, 56
теплообмена, 60
- краевые задачи
вторая, 29, 60, 78
правильность постановки, 78, 87
первая, 28, 51, 60, 78, 89
третья, 29, 60, 79
- Лапласа
оператор, 59

- уравнение, 3, 75, 78, 89
 - фундаментальные решения, 79
 - функция источника, 92
- Лежандра
 - полиномы, 155, 164
 - присоединённые функции, 163, 164
 - уравнение, 154
 - функции, 155
- Лопиталья правило, 140
- линия уровня, 8
- Макдональда
 - уравнение, 142
 - функция, 143
- Максвелла
 - второе уравнение, 77
 - четвёртое уравнение, 77
- мембрана, 22, 99, 131
 - уравнение колебаний, 26
- метод
 - вариации постоянной, 66
 - разделения переменных, 43, 62, 68, 132
 - сеток, 182
 - характеристик, 110, 121
- Неймана задача, 78
- Неймана функция, 140
- Нернста закон, 57
- Ньютона
 - второй закон, 17, 23, 28, 118
 - закон теплообмена, 56, 60, 79
- Ома закон, 77
- оператор
 - квазилинейный, 111
 - разностный, 183
- Планка постоянная, 170
- Пуассона уравнение, 3, 76, 78
- пара квазилинейных операторов
 - гиперболическая, 113
 - параболическая, 113
 - характеристические значения, 112
 - эллиптическая, 113
- плотность
 - диффузионного потока, 57, 58
 - потока тепла, 54
- плотность массы
 - линейная, 17, 28, 64
 - поверхностная, 24
- плотность силы
 - линейная, 18, 28
 - поверхностная, 25
- принцип соответствия, 172
- принцип суперпозиции, 65
- производящая функция, 145, 146, 155, 157, 160, 166, 167, 174, 177
- Родрига формула, 156
- разностная задача
 - неявная, 188
 - явная, 188
- разностная производная, 183
- Стефана–Больцмана
 - закон, 61
 - постоянная, 61
- сеточные функции, 182

- сила
 сосредоточенная, 19
 удельная, 19, 26, 28
- собственные значения, 44, 45
- собственные функции, 44, 45, 50
- солитон, 129
- стержень
 уравнение колебаний, 28
- струна, 15
 гармоники, 48
 обертоны, 48
 основной тон, 48
 собственные частоты, 48
 тембр, 48
 уравнение колебаний, 18
 энергия колебаний, 20, 22, 48
- сферические функции, 163
- телесный угол, 84
- теорема о среднем значении, 65, 82, 88
- удельная проводимость, 77
- узловые точки, 121
- уравнение
 адиабатического процесса, 118
 баланса массы, 58
 волновое, 3
 гиперболического типа, 6, 12, 15, 30
 диффузии, 58
 квадратное, 7
 квазилинейное, 2, 109, 111
 линейное, 2, 110
 нелинейное, 122
 непрерывности, 118
 однородное, 3
 параболического типа, 6, 9, 13
 разностное, 182
 с постоянными коэффициентами, 3, 11
 теплового баланса, 55
 теплопроводности, 3, 56, 68, 75, 181
 эллиптического типа, 6, 13, 75
- условия
 граничные, 19, 26, 28, 51
 начальные, 19, 26, 28, 60
- Фика
 второй закон, 59
 первый закон, 58
- Фурье
 закон теплопроводности, 54
 интеграл, 69
 обратное преобразование, 69
 ряд, 46, 50, 63, 65
- фазовая плоскость, 32, 38
- функция мгновенного точечного источника, 64, 67, 69
- Ханкеля функции, 141
- характеристики уравнения, 8, 30, 110
- характеристический треугольник, 32
- цилиндрическая функция 1-го рода, 136
- цилиндрическая функция 2-го рода, 140
- цилиндрические функции многого аргумента, 143

цунами, 129

Чебышёва – Лагерра

 обобщённые полиномы, 177,
 180

 полиномы, 174

 уравнение, 165, 173

Чебышёва – Эрмита

 полиномы, 167

 уравнение, 165, 166, 171

Шрёдингера уравнение, 4, 170,
178

Штурма–Лиувилля задача, 44,
132

Эйлера уравнение, 118

Эйлера формула, 143

Юнга модуль, 27

якобиан преобразования, 5

Учебное издание

Кузнецов Александр Васильевич

**МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Редактор, корректор А.А. Аладьева

Компьютерный набор и верстка автора

Подписано в печать 29.10.04. Формат 60×84/16.

Бумага тип. Усл. печ. л. 11,6. Уч.-изд. л. 10,2.

Тираж 150 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен

в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет.

150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано

ООО “Ремдер” ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.

г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37.

тел. (0852) 73-35-03.