МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені В. Н. Каразіна

Нємченко К.Е.

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
СХЕМИ, ТАБЛИЦІ ТА ЗАДАЧІ

Методичні вказівки до курсу
„Аналітична геометрія”
для студентів першого курсу спеціальностей
фізико-математичного напряму

Харків – 2007

УДК514.12(075.8)
ББК22.151.5я73
Н50

Рекомендовано вченою радою Інституту високих технологій Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(Протокол № 3 от 15 березня 2007 року)

Рецензент – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теоретичної ядерної фізики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна Адаменко І. М.

Аналітична геометрія. Схеми, таблиці та задачі.
Н50 Методичні вказівки до курсу „Аналітична геометрія" для студентів першого курсу спеціальностей фізико-математичного напряму // Нємченко К. Е. – Х.: ХНУ, 2007, – 64 с.

Методичні вказівки з вивчення курсу „Аналітична геометрія. Схеми, таблиці та задачі" створено для студентів першого курсу спеціальностей фізико-математичного напряму Особливістю курсу є те, що він призначений для студентів, які в подальшому спеціалізуються в різних галузях знань. Серед них є і майбутні фахівці з теоретичної фізики, фізики-експериментатори, програмісти й медичні фізики. З цієї причини автор намагався зробити в посібнику кілька рівнів складності (або строгості). До підрозділів додано по одній або дві задачі, що є в деякому сенсі класичними, і без них не може обходитися жодний курс аналітичної геометрії. До кожного розділу, відповідно до вимог Болонського процесу, додано справи для самоперевірки, задачі середнього рівня складності, а також завдання підвищеної складності для самостійного дослідження (індивідуальні навчально-дослідні завдання).

УДК514.12(075.8)
ББК22.151.5я73

ЗМІСТ

Розділ 1. Вектори та координати

1.1. Напрямлені відрізки і їхня рівність.

Визначення 1 а.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} |AB|=|CD| \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD} \end{cases}.$$

Визначення 1 б. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, якщо $ABCD$ – паралелограм.

Визначення 1 в. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, якщо точка перетинання відрізків $[AC]$ і $[DB]$ існує і поділяє кожний з цих відрізків навпіл.

Властивість 1. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

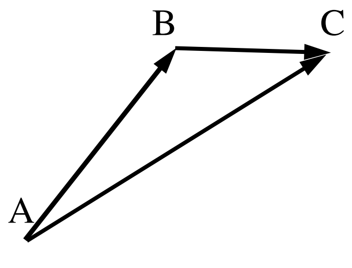
1) , ;
2) ,.

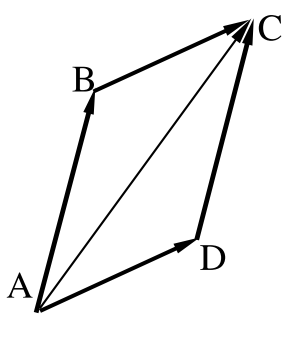
Властивість 1:
;

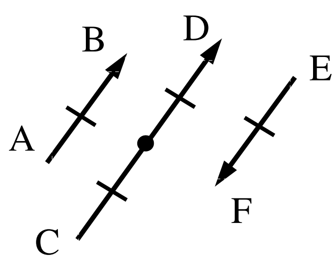
Рис. 1.1. Рівність напрямлених відрізків.

1.2. Додавання напрямлених відрізків

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$







,

Правило трикутника

Правило паралелограма

Добуток на число

Рис. 1.2. Додавання напрямлених відрізків і множення їх на числа

1.3. Добуток напрямлених відрізків на число. Нульовий напрямлений відрізок

$$\overrightarrow{AC} = r \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = \vec{0}, \text{ якщо } r = 0 \\ |AC| = r \cdot |AB|, \overrightarrow{AC} \upuparrows \overrightarrow{AB}, \text{ якщо } r > 0 \\ |AC| = |r| \cdot |AB|, \overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}, \text{ якщо } r < 0 \end{cases}.$$

Задача 1.1. Знайдіть вираз для напрямленого відрізку, що з'єднує будь-які дві точки на рисунку, у вигляді лінійної комбінації зазначених на рисунку відрізків $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_{02}A_{24}}$ і $\mathbf{b} = \overrightarrow{A_{22}A_{10}}$. Наприклад: $\overrightarrow{A_{01}A_{00}} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Спробуйте одержати загальну формулу для довільного напрямленого відрізка:

$$\overrightarrow{A_{nm}A_{kl}} = ?\mathbf{a} + ?\mathbf{b}.$$

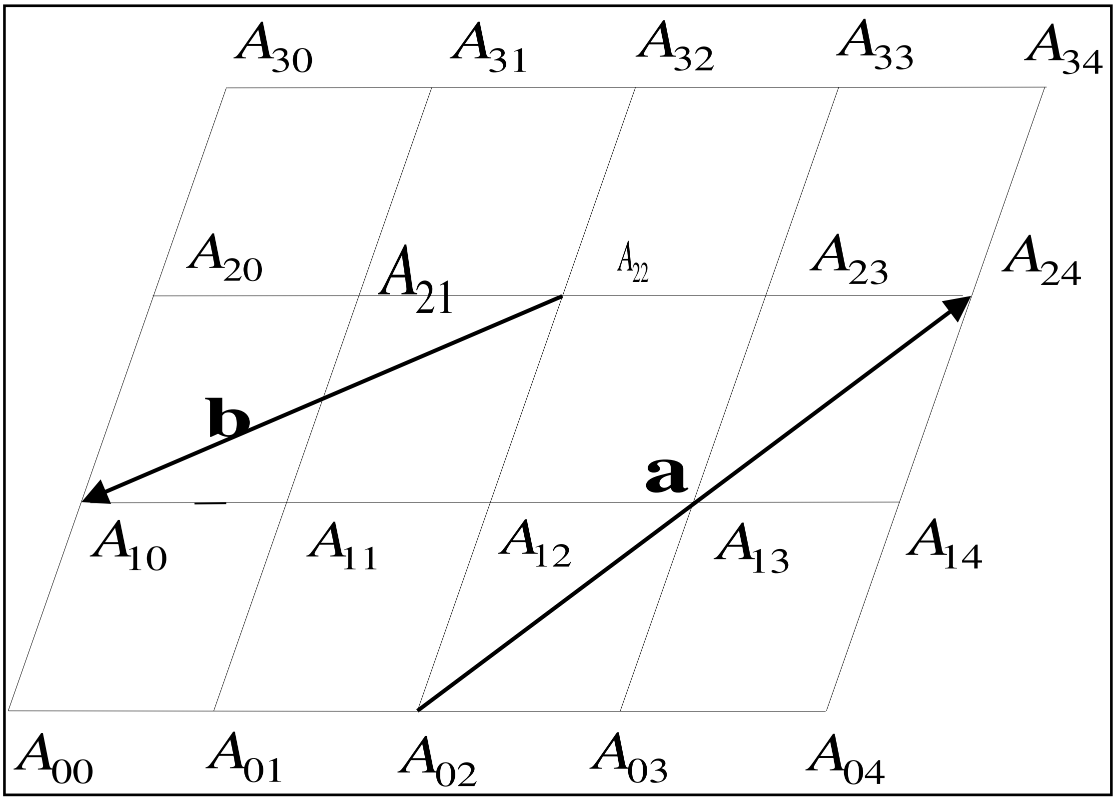


Рис. 1.3. До задачі 1.1

1.4. Визначення вектора.

Визначення 2. Вектор – множина рівних між собою напрямлених відрізків.

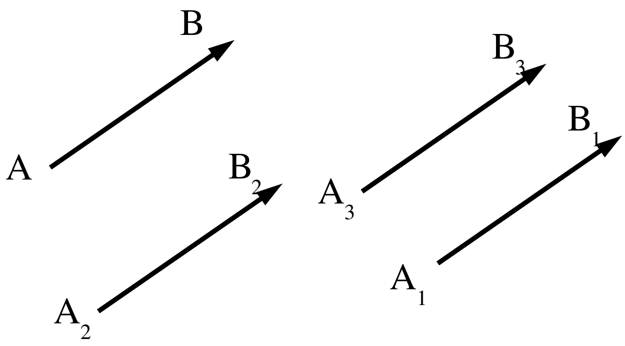


Рис. 1.4. Визначення вектора

1.5. Рівність векторів.

Визначення 3. Вектори називають рівними, якщо рівними є відповідні їм напрямлені відрізки.

Якщо $\mathbf{a} \equiv \{\overrightarrow{AC}\}$ і $\mathbf{b} \equiv \{\overrightarrow{BD}\}$, тоді $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

1.6. Довжина вектора.

Визначення 4. Довжиною вектора називається довжина напрямленого відрізка, що визначає цей вектор: $|\mathbf{a}| \equiv |\overrightarrow{AC}|$, якщо $\mathbf{a} \equiv \{\overrightarrow{AC}\}$.

1.7. Сума векторів.

Теорема 1. Суми рівних напрямлених відрізків рівні між собою.

Нехай $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$ і $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_2C_2}$, тоді $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2C_2}$.

Доказ

Відповідно до властивості 1:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} \Rightarrow \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2} \qquad \text{(T1.1)}$$

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_2C_2} \Rightarrow \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{C_1C_2}. \qquad \text{(T1.2)}$$

Із цих співвідношень маємо:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2} \text{ і } \overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{C_1C_2} \Rightarrow \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{C_1C_2} \qquad \text{(T1.3)}$$

Використовуючи ще раз властивість 1, дістаємо:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{C_1C_2} \Rightarrow \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_2C_2}. \qquad \text{(T1.4)}$$

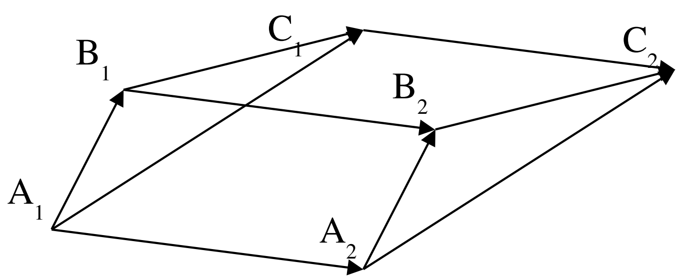


Рис. 1.5. До теореми 1

Визначення 5. Сумою векторів називають вектор, складений із сум напрямлених відрізків, які відповідають вихідним векторам:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \overrightarrow{AC},\ \mathbf{b} = \overrightarrow{AB},\ \mathbf{c} = \overrightarrow{BC} \text{ і } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

1.8. Множення вектора на число.

Визначення 6. Добутком вектора на число називають вектор, складений із добутків на це число напрямлених відрізків, що відповідають вихідному векторові:

$$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \overrightarrow{AC},\ \mathbf{b} = \overrightarrow{AB} \text{ і } \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

Теорема 2. Добутки рівних напрямлених відрізків на одне і те ж число рівні між собою: Нехай $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$, тоді $\lambda\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda\overrightarrow{A_2B_2}$.

1.9. Напрямок вектора. Орт.

Вектор, який однонапрямлений даному векторові $\mathbf{a}$ і має одиничну довжину (позначають $\mathbf{e_a}$), називають *ортом* і визначають таким чином:

$$\mathbf{e_a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

Для нульових векторів, довжина яких дорівнює нулеві, орти не визначені.

Відповідно до визначення, орти мають одиничну довжину $|\mathbf{e_a}| = 1$, і за допомогою його орта будь-який вектор можна записати у такому вигляді:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,\mathbf{e_a}.$$

Задача 1.2.

Побудуйте вектор $\mathbf{c}$, напрямлений по бісектрисі кута, утвореного двома заданими векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

Для розв’язку цієї задачі досить використати правило паралелограма, згадавши при цьому, що діагональ у паралелограмі є бісектрисою, якщо паралелограм є ромбом, тобто всі його сторони є рівними. Тому досить від векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ перейти до векторів $\mathbf{a}'$ і $\mathbf{b}'$, що напрямлені також, як $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, відповідно, але мають однакові довжини $|\mathbf{a}'| = |\mathbf{b}'|$. Як вектори $\mathbf{a}'$ і $\mathbf{b}'$ можна взяти *орти* векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$: $\mathbf{a}' = \mathbf{e_a}$ і $\mathbf{b}' = \mathbf{e_b}$. Тоді шуканий вираз для вектора $\mathbf{c}$ буде виглядати в такий спосіб:

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}.$$

Безумовно, можна запропонувати й іншій розв’язок цієї задачі, наприклад:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|},\ \mathbf{c} = \mathbf{a}\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} + \mathbf{b} \text{ і т. д. і т. п.}$$

1.10. Властивості лінійних операцій над векторами.

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}.$$

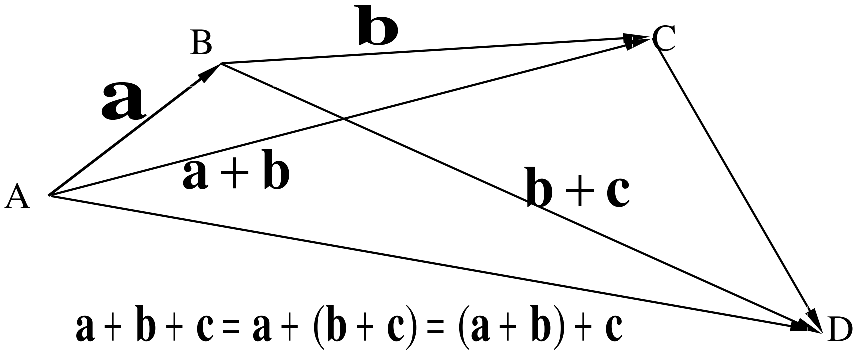


Рис. 1.6. Сполучна властивість додавання векторів

Властивості лінійних операцій над векторами

1. Комутативність додавання (властивість переміщення):

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}. \qquad (2.8)$$

2. Асоціативність додавання (сполучна властивість):

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}. \qquad (2.9)$$

3. Існування нульового вектора:

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}. \qquad (2.10)$$

4. Існування протилежних векторів:

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}. \qquad (2.11)$$

5. Дистрибутивність (розподільна властивість) під час множення вектора на суму чисел:

$$(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}. \qquad (2.12)$$

6. Дистрибутивність під час множення суми векторів на число:

$$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}. \qquad (2.13)$$

7. Асоціативність множення на числа:

$$\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}. \qquad (2.14)$$

1.11. Поняття лінійної залежності векторів.

Визначення 7.

Вектори $\mathbf{a}_i$ ($i=1...N$) називають лінійно незалежними, якщо лінійна комбінація $\sum_{i=1}^{i=N}\alpha_i\mathbf{a}_i=0$ тільки в розі, коли всі коефіцієнти $\alpha_i=0\,(\forall i)$.

Визначення 8.

Вектори $\mathbf{a}_i$ $(i=1...N)$ називають лінійно залежними, якщо з них можна скласти лінійну комбінацію $\sum_{i=1}^{i=N}\alpha_i\mathbf{a}_i=0$, у якій хоча б один з коефіцієнтів не дорівнює нулю $\exists\alpha_i\neq 0$.

Теорема 3. Якщо один з векторів $\mathbf{a}_i$ $(i=1...N)$ дорівнює нулю, то ця система векторів – лінійно залежна.

Теорема 4. Якщо з N векторів $\mathbf{a}_i$ $(i=1...N)$ підсистема K векторів ($K\leq N$) лінійно залежна, то і вся систем з N векторів – лінійно залежна.

Теорема 5. Лінійна залежність двох векторів рівносильна їх паралельності. (Два паралельних вектори – лінійно залежні).

Теорема 6. Лінійна залежність трьох векторів рівносильна їх компланарністі. (Три вектори, паралельних одній площині, – лінійно залежні).

.

Теорема 7. Чотири вектори в просторі – лінійно залежні.

1.12. Розмірність простору. Базис простору.

Визначення 9а. Розмірність простору – максимально можливе для даного простору кількість векторів у лінійно незалежній системі векторів у цьому просторі.

Визначення 9б.
Розмірність простору – кількість векторів у базисі цього простору.

Визначення 10а.

Базис простору – набір лінійно незалежних векторів, що містить максимально можливе для даного простору кількість векторів.

Теорема 8. Розкладання вектора простору по базису цього простору – єдине.

Визначення 10б. Базис простору – упорядкований набір лінійно незалежних векторів, що містить максимально можливу для даного простору кількість векторів.

1.13. Координати вектора.

Теорема 9. Під час додавання векторів їхні координати складаються, а під час множення на число – збільшуються на це число.

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \ \Leftrightarrow \ c_i = a_i + b_i,$$

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} \ \Leftrightarrow \ c_i = \lambda a_i.$$

1.14 Проекція вектора. Ортогональні проекції.

Теорема 10. Проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій цих векторів, а проекція добутку вектора на число дорівнює добуткові цього числа на проекцію цього вектора:

$$\Pr(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \Pr \mathbf{a} + \Pr \mathbf{b};$$

$$\Pr \lambda \mathbf{a} = \lambda \Pr \mathbf{a}.$$

1.15. Системи координат, радіус-вектор.

Сукупність початку відліку й базису називають *системою координат.* Вектор, який з’єднує початок відліку та певну точку, має спеціальну назву *радіус-вектор цієї точки*. Наприклад, радіус-вектор точки N позначають як

$$\mathbf{r}_N = \overrightarrow{ON}.$$

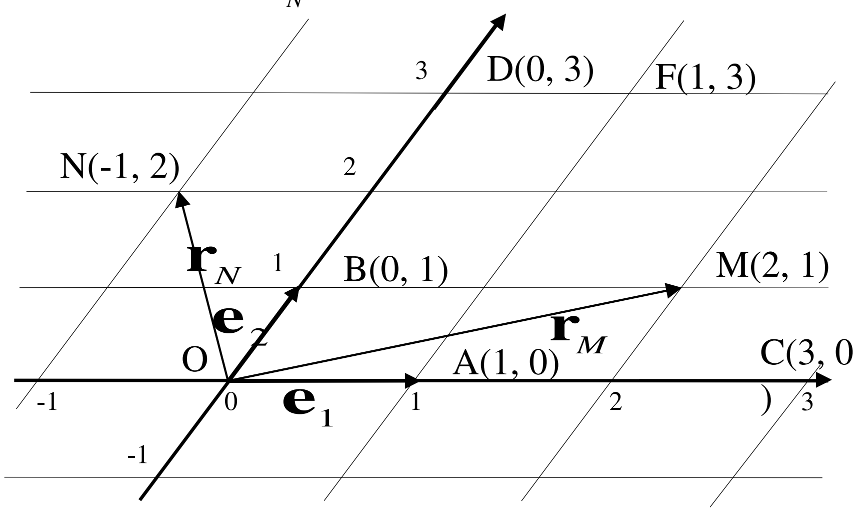


Рис. 1.7. Приклад системи координат

1.16. Декартові системи координат.

Розглянемо базиси, у яких базисні вектори перпендикулярні один одному й мають одиничну довжину. Наприклад, у двомірному випадку це базис

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \text{ де } |\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1 \text{ і } \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2;$$

а в тривимірному випадку це базис

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \text{ де } |\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1 \text{ і } \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3 \text{ і } \mathbf{e}_3 \perp \mathbf{e}_2.$$

Такі системи називають *декартовими системами координат, або ортонормованими* системами координат. Декартові системи координат найчастіше застосовують розв'язуючи математичні й фізичні задачі, і тому координати в такій системі мають власні позначення – (x, y, z) і найменування – *абсциса, ордината й апліката* відповідно.

Визначення 11а. Орт – одиничний вектор базису, напрямлений у бік збільшення відповідної координати.

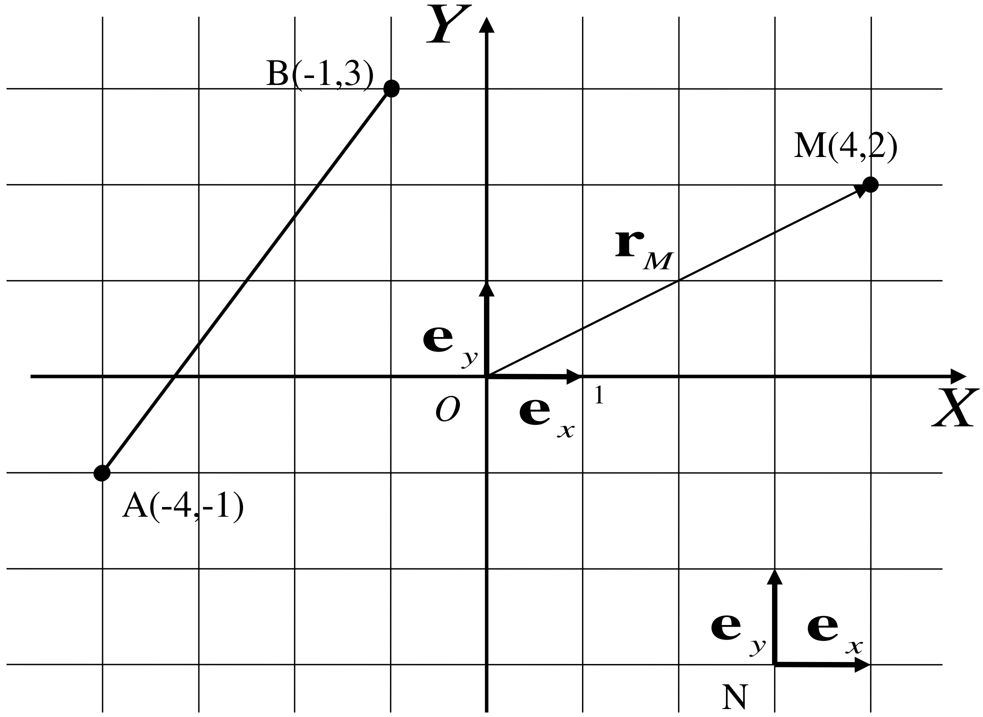


Рис. 1.8. Декартова система координат на площині

1.17. Полярна система координат.

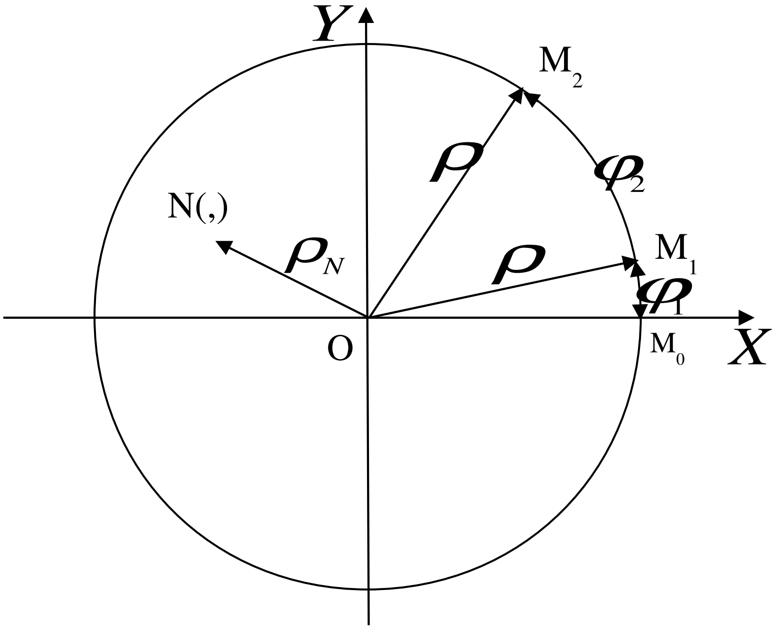


Рис. 1.9. Полярна система координат

Співвідношення між декартовими і полярними координатами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \begin{cases} 0, \ \textit{якщо}\, x > 0, \\ \pi, \ \textit{якщо}\, x < 0. \end{cases}$$

Визначення 11 б. У прямокутних криволінійних системах координат орти напрямлені по дотичних до координатних ліній у бік зростання відповідної координати.

1.18.Циліндрична система координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right), \\ z = z. \end{cases}$$

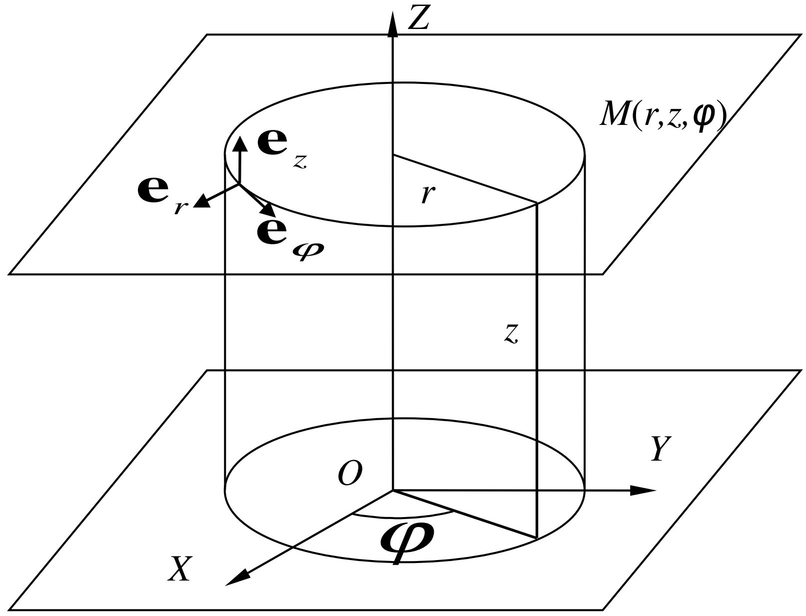


Рис. 1.10. Циліндрична система координат

1.19 Сферична система координат.

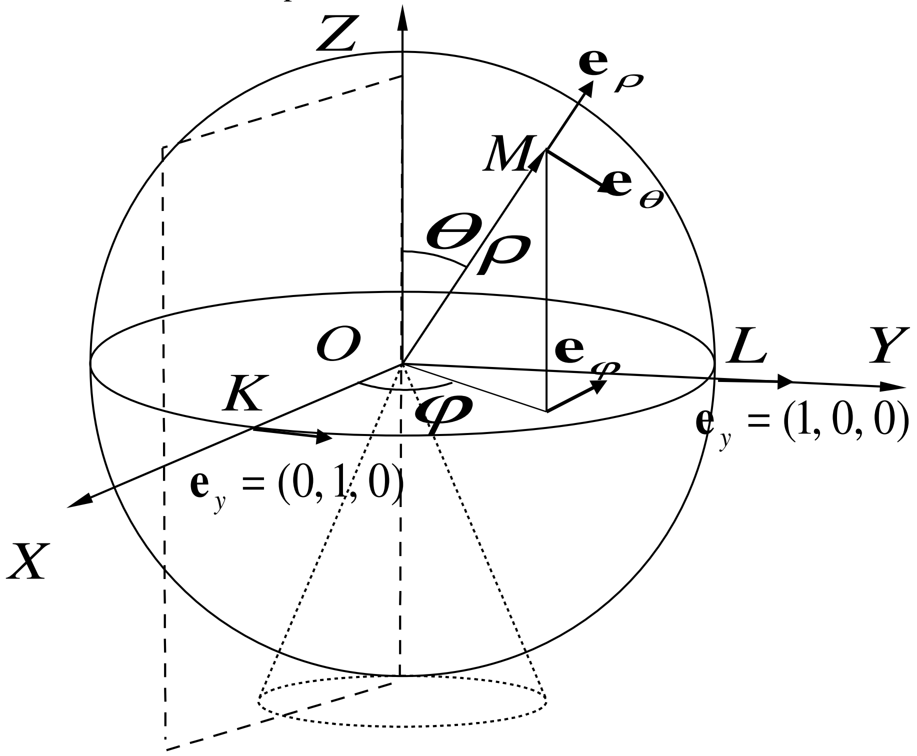
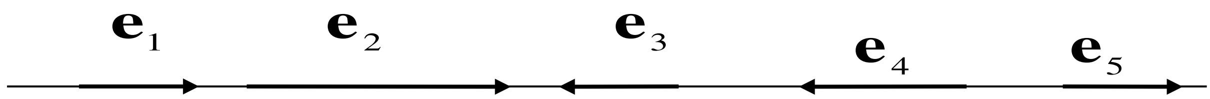


Рис. 1.11. Сферична система координат. Координатні поверхні й орти

$$\begin{cases} z = \rho\cos\theta, \\ x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi. \end{cases}$$

1.20. Базиси й системи відліку різної орієнтації.

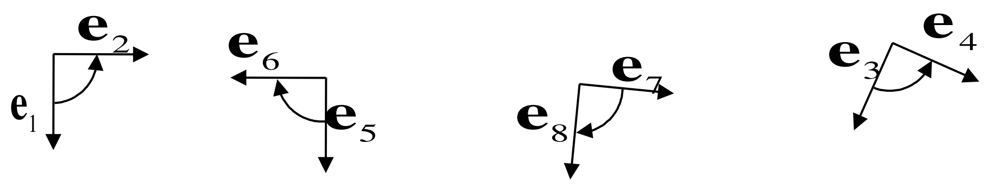


и – базиси правої орієнтації;

и – базиси лівої орієнтації.

Рис. 1.12. Базиси різної орієнтації на прямій

Ортонормовані базиси однакової орієнтації можна сполучити рухами всередині простору, у якому їх визначено.

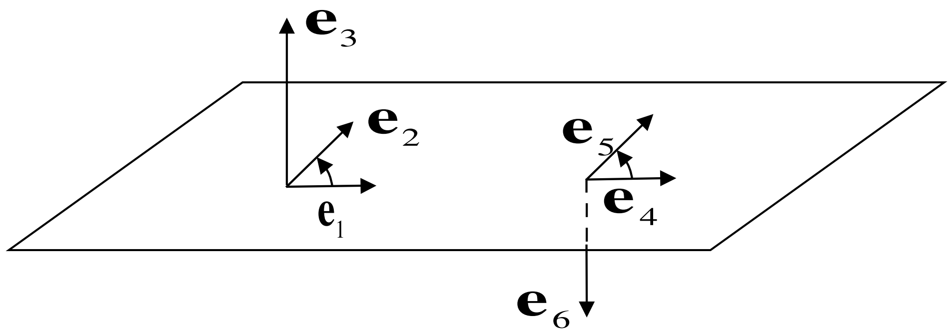


Базиси і – базиси правої орієнтації;

Базиси і – базиси лівої орієнтації.

Рис. 1.13. Базиси різної орієнтації на площині

Визначення 12. На площині базисом із правою орієнтацією називають базис, у якому перший базисний вектор можна сполучити із другим поворотом *проти* годинникової стрілки у бік меншого кута.



Базис – базис правої орієнтації;

Базис – базис лівої орієнтації.

Рис. 1.14. Базиси різної орієнтації в просторі

Визначення 13а. Базис у просторі називають правим (базисом із правою орієнтацією), якщо під час спостереження з кінця третього вектора поворот від першого вектора до другого відбувається проти годинникової стрілки.

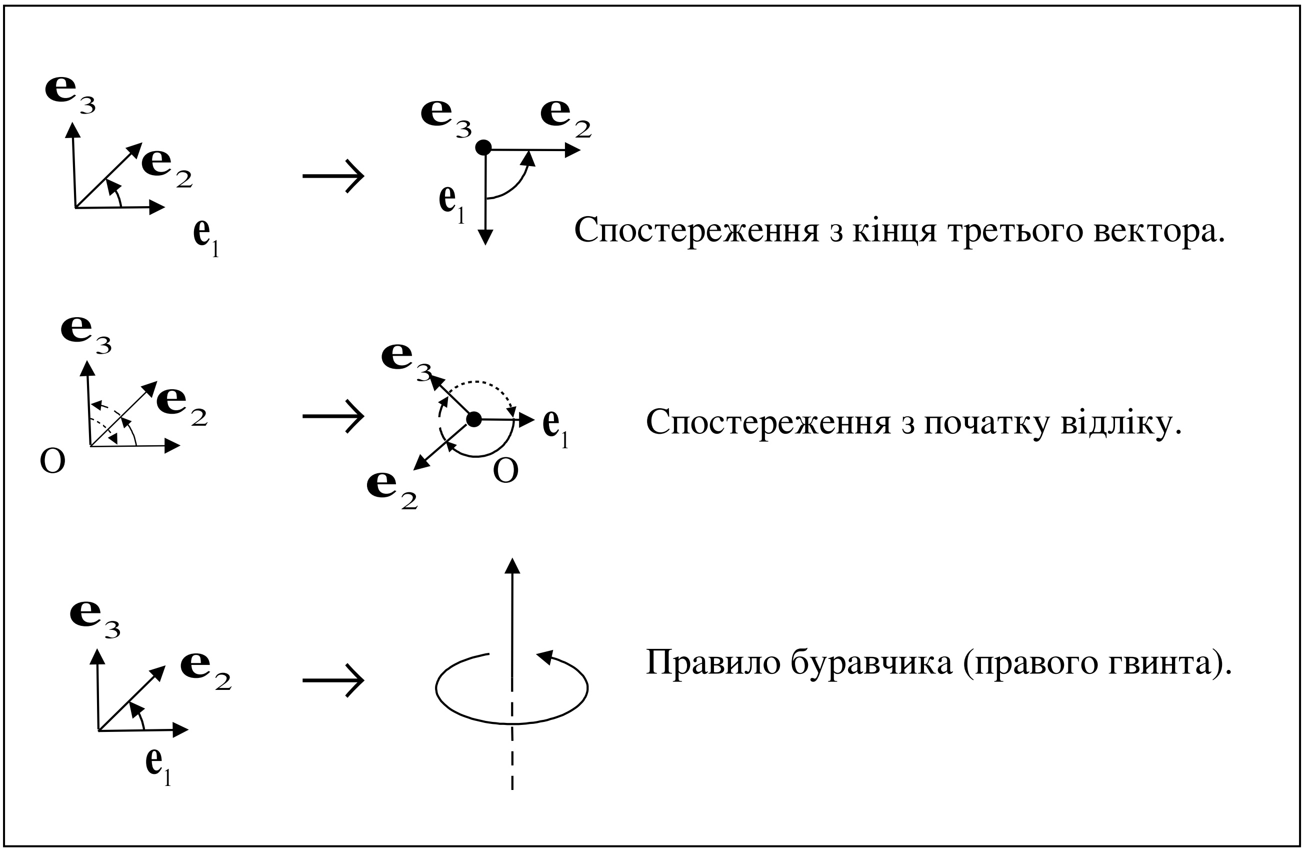


Рис. 1.15. Визначення правого базису

Визначення 13б. Базис у просторі називають правим, якщо під час спостереження з початку координат повороти від першого вектора до другого, від другого до третього і від третього до першого відбуваються *за рухом* годинникової стрілки.

Визначення 13в. Базис у просторі називають правим, якщо правий гвинт обертаючись від першого базисного вектора до другого закручується в напрямку третього базисного вектора.

Визначення 14. Правою (лівою) трійкою векторів називають трійку не компланарних векторів, які мають праву (ліву) орієнтацію.

Задача 1.3. Визначить вектор швидкості точки за рівномірного обертання.

Розв'язок. Припустимо, що точка обертається по колу з постійним радіусом R і кутовою швидкістю ω. Радіус-вектор цієї точки дорівнює $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r = R\mathbf{e}_r$, а швидкість дорівнює похідній від радіуса-вектора за часом:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(R\mathbf{e}_r)}{dt} = \frac{dR}{dt}\mathbf{e}_r + R\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = R\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}. \qquad (5.13)$$

В останньому перетворенні враховано, що радіус обертання не змінюється з часом. Орт $\mathbf{e}_r$ залежить від положення точки, тому він змінюється з часом і похідна $d\mathbf{e}_r / dt$ не дорівнює нулеві. Щоб обчислити цю похідну, можна представити цей орт як лінійну комбінацію якихось векторів, що не змінюються з часом. Наприклад, $\mathbf{e}_r$ можна представити у вигляді розкладання по базисних векторах декартового базису:

$$\mathbf{e}_r = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y ,$$

де a_x і a_y – координати вектора $\mathbf{e}_r$ у базисі $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$:

$$a_x = \cos(\angle \mathbf{e}_r \mathbf{e}_x),\ a_y = \cos(\angle \mathbf{e}_r \mathbf{e}_y).$$

Кути, що входять у ці співвідношення виражаємо через кут φ між радіусом-вектором і віссю х (полярний кут у системі координат) й одержуємо, що

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \cos\varphi + \mathbf{e}_y \sin\varphi.$$

Тепер можна взяти похідну за часом від цього виразу:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \mathbf{e}_x \frac{d\cos\varphi}{dt} + \mathbf{e}_y \frac{d\sin\varphi}{dt} = -\mathbf{e}_x \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} + \mathbf{e}_y \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} = \omega\left(-\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y \cos\varphi\right).$$

Тут ми використали той факт, що похідна за часом від кута є кутовою швидкістю. Якщо тепер знайти вираз для орта $\mathbf{e}_\varphi$ у полярній системі відліку:

$$\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_x(\mathbf{e}_x \mathbf{e}_\varphi) + \mathbf{e}_y(\mathbf{e}_y \mathbf{e}_\varphi) = \mathbf{e}_x \cos(\angle \mathbf{e}_x \mathbf{e}_\varphi) + \mathbf{e}_y \cos(\angle \mathbf{e}_y \mathbf{e}_\varphi) = -\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y \cos\varphi,$$

то ми одержимо шуканий вираз для швидкості обертової точки:

$$\mathbf{v} = R\omega \mathbf{e}_\varphi .$$

Цей вираз визначає як величину лінійної швидкості обертання $v = R\omega$, так і напрямок $\mathbf{v} \upuparrows \mathbf{e}_\varphi$, тобто швидкість спрямована по дотичній до окружності, по якій обертається точка.

Задача 1.4. Знайдіть відстань між точками в полярній системі координат.

Розв'язок. Нехай задано дві точки M й N у полярній системі координат через їх координати: $M = (r_M, \varphi_M)$ і $N = (r_N, \varphi_N)$. Відстань між ними просто виразити через декартові координати:

$$|MN| = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} .$$

Щоб використати цю формулу нам досить виразити декартові координати точок через полярні за допомогою співвідношень $x = r\cos\varphi$ і $y = r\sin\varphi$. Підставлення цих виразів у формулу для довжини $|MN|$ дає:

$$|MN| = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{(r_M \cos\varphi_{M1} - r_N \cos\varphi_N)^2 + (r_M \sin\varphi_M - r_N \sin\varphi_N)^2} =$$

$$= \sqrt{r_M^2 + r_N^2 - 2r_M r_N (\cos\varphi_M \cos\varphi_N + \sin\varphi_M \sin\varphi_N)} = \sqrt{r_M^2 + r_N^2 - 2r_M r_N \cos(\varphi_M - \varphi_N)} .$$

Отримане співвідношення є ні що інше, як теорема косинусів, і наведений розв'язок можна розглядати як доказ теореми косинусів за допомогою координатного методу. У той же час це співвідношення можна переписати іншим способом, явно виділивши квадрат різниці довжин радіус векторів і доданок, що є малим, якщо є малим кут між радіусами-векторами

$$|MN| = \sqrt{r_M^2 + r_N^2 - 2r_M r_N \left\{1 - 2\sin^2\left(\frac{\varphi_M - \varphi_N}{2}\right)\right\}} = \sqrt{\left(r_M - r_N\right)^2 + 4r_M r_N \sin^2\left(\frac{\varphi_M - \varphi_N}{2}\right)}.$$

Такий вираз є особливо зручним у фізичних додатках, коли, наприклад, виникає необхідність розкладати величину $|MN|$ у ряд Тейлора по малому параметру $(\varphi_M - \varphi_N)$.

Більш того, одержаний вираз дозволяє знайти так званий «елемент довжини» у полярній системі відліку, або, іншими словами, відстань між двома нескінченно близькими точками:

$$dl = \sqrt{\left(dr\right)^2 + r^2\left(d\varphi\right)^2} .$$

Одержані співвідношення дозволяють вивести основні нерівності трикутника. Якщо врахувати, що величина $\cos(\varphi_M - \varphi_N)$ лежить у межах від мінус одиниці до одиниці, то для величини $|MN|$ одержимо:

$$\sqrt{r_M^2 + r_N^2 - 2r_M r_N} \le |MN| \le \sqrt{r_M^2 + r_N^2 + 2r_M r_N} \iff \sqrt{\left(r_M - r_N\right)^2} \le |MN| \le \sqrt{\left(r_M + r_N\right)^2} .$$

Звідси випливають нерівності, що зв'язують між собою довжини сторін будь-якого трикутника:

$$\big||MO| - |ON|\big| \le |MN| \le |MO| + |ON|.$$

Задача 1.5. Самостійно доведіть, що елемент довжини у сферичній системі координат дорівнює

$$dl = \sqrt{\left(dr\right)^2 + r^2\left(d\theta\right)^2 + r^2 \sin^2\theta (d\varphi)^2} .$$

Завдання до розділу 1

Усні питання для повторення матеріалу

1. Чому вектор не можна намалювати на рисунку?
2. Навіщо ми доводили, що суми рівних напрямлених відрізків рівні між собою?
3. Куди напрямлений нульовий вектор?
4. Чому два рівнобіжних вектори завжди лінійно залежні?
5. Чому дорівнює розмірність простору, складеного з векторів, які паралельні однієї площини?
6. Яким чином координати вектора допомагають увести поняття координат точки?
7. Запропонуйте своє формулювання правила правої руки для визначення орієнтації базису.

Контрольні задачі

1. Дано трикутник *ABC*. Знайдіть таку точку *M*, щоб $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Доведіть, що ця точка є точкою перетинання медіан і вона ділить кожну з медіан у відношенні 1:2. Розв'яжіть задачу використовуючи радіуси-вектори.
2. Дано чотирикутник *ABCD*. Знайдіть таку точку *M*, щоб $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.
3. Дано тетраедр *ABCD*. Знайдіть точку *M*, для якої $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$. Знайдіть загальний розв'язок для цих двох задач.
4. Доведіть, що сума векторів, які йдуть з центра правильного багатокутника до його вершин, дорівнює $\vec{0}$. Користуючись розв'язком цієї задачі, спробуйте підтвердити (або спростувати) такі твердження:
   а) центр мас фігури збігається з її центром симетрії;
   б) центр симетрії фігури завжди є центром мас цієї фігури.
5. Доведіть основні нерівності трикутника.

Теми для індивідуальних науково-дослідних завдань.

1. Обчисліть скалярний добуток векторів через їхні координати в непрямокутних (афінних) системах координат. Поясніть, що таке коваріантні й контраваріантні координати та метричний тензор.
2. Доведіть, що криволінійні полярна, сферична й циліндрична системи відліку є прямокутними.
3. За аналогією до полярних координат, часто користуються і так званими еліптичними координатами. У цих системах координат координатними лініями є сімейство еліпсів, а не окружностей. Дослідіть такі координати. Яке значення мають у цих системах координати. Які інші координатні лінії є в такій системі?

Розділ 2. Добутки векторів

2.1. Кут між векторами.

Визначення 15. Кут між ненульовими векторами – це кут між проведеними із загального початку напрямленими відрізками, що відповідають цим векторам:

$$\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \angle AOB, \text{ де } \overrightarrow{OA} = \mathbf{a} \text{ і } \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}.$$

2.2. Визначення скалярного добутку.

Визначення 16а.

Скалярним добутком двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називають величину

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})).$$

Якщо серед векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ є нульовий, то скалярний добуток дорівнює нулю.

Визначення 16б.

– Якщо $\mathbf{a} = 0$ і (або) $\mathbf{b} = 0$, то

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0;$$

– Якщо $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, те

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \begin{cases} +|\mathbf{a}||\mathbf{b}|, \text{ *якщо* } \mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b}, \\ -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|, \text{ *якщо* } \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}, \end{cases}$$

– У решті випадків скалярним добутком двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називають величину

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot \mathrm{Pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b},$$

де $\mathrm{Pr}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{d}$ у загальному випадку позначає ортогональну проекцію вектора $\mathbf{d}$ на ненульовий вектор $\mathbf{c}$.

Визначення 16в.

– Якщо $\mathbf{a} = (a_1) \parallel \mathbf{b} = (b_1)$, де a_1, b_1 – координати цих векторів, то

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1 b_1,$$

– У решті випадків скалярним добутком двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називають величину

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot \mathrm{Pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b},$$

де $\mathrm{Pr}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{d}$ у загальному випадку позначає ортогональну проекцію вектора $\mathbf{d}$ на ненульовий вектор $\mathbf{c}$.

Окремі значення скалярного добутку:

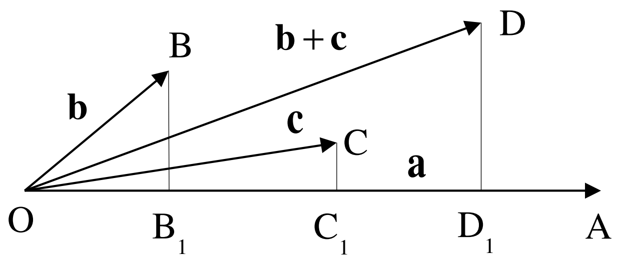
1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{a},\mathbf{b})=90^\circ$, якщо $|\mathbf{a}|\neq 0$ і $|\mathbf{b}|\neq 0$;
2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}>0 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{a},\mathbf{b})<90^\circ$ – гострий кут;
3. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{a},\mathbf{b})>90^\circ$ – тупий кут;
4. $|\mathbf{a}|=0$ або $|\mathbf{b}|=0 \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$.

2.3. Властивості скалярного добутку.

Основні властивості скалярного добутку:

1. Комутативність (властивість переміщення):
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a};$$
2. Асоціативність (сполучна властивість):
$$\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b};$$
3. Позитивна (ненегативна) визначеність:
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2\geq 0, \text{ причому } |\mathbf{a}|^2=0 \Leftrightarrow \mathbf{a}=\mathbf{0};$$
4. Дистрибутивність (розподільна властивість):
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

*Доказ дистрибутивності скалярного добутку векторів*________________



З визначеннЯ скалярного добутку $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot \Pr_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, а $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{c}$. Праворуч у цих рівностях знаходяться скалярні добутки паралельних векторів. Їхні координати в базисі з ортом $\mathbf{e}_{\mathbf{a}}=\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ дорівнюють $\mathbf{a}=(a_1)$, $\Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}=(b_1)$, $\Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{c}=(c_1)$ і $\Pr_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}+\mathbf{c})\equiv\Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{b}+\Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{c}=(b_1+c_1)$.

Скалярні добутки цих паралельних векторів дорівнюють добуткові їхніх координат: $\mathbf{a}\cdot\Pr_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=a_1(b_1+c_1)$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1$ і $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=a_1c_1$. Тоді розподільний закон скалярного добутку векторів $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ зводиться до співвідношення $a_1(b_1+c_1)=a_1b_1+a_1c_1$, що справедливе для звичайних чисел, а, отже, справедливим є також і вираз $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$.______________________

2.4. Скалярний добуток у декартовому базисі.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{i=3} a_i b_i \ .$$

2.5. Символ Кронекера.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо}\, i = j; \\ 0, & \text{якщо}\, i \neq j; \end{cases}$$

Правило застосування символа Кронекера.
Якщо під знаком суми присутній символ Кронекера, і по одному з його індексів ведуть підсумовування, то результатом підсумовування є вираз під знаком суми, у якому індекс підсумовування заміняють на значення другого індексу символа Кронекера.

$$\sum_{i=1}^{i=N} A_i \delta_{ik} = A_k \text{, якщо } 1 \le k \le N \ . \qquad (6.11)$$

Якщо значення цього індексу не належить області підсумовування по першому індексу, то результат підсумовування дорівнює нулю.

2.6. Довжина вектора. Кут між векторами. Напрямляючі косинуси.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=3} a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \ .$$

$$|AB| = |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A| = \sqrt{(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)\cdot(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=3} (r_{iB} - r_{iA})^2}$$

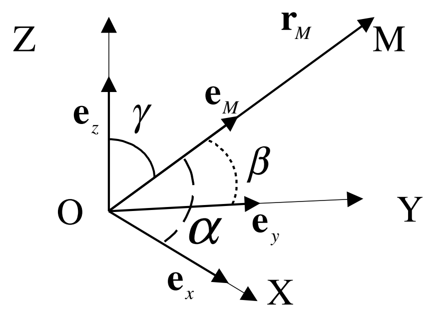
$$|AB| = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=3} (r_{iB} - r_{iA})^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\cos(\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} a_i b_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \ .$$

$$\mathbf{e}_M = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \ .$$

Ці кути визначають напрямок радіуса-вектора і тому їхні косинуси називають *напрямними косинусами*. З цих співвідношень одержуємо основне співвідношення для напрямних косинусів:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \ .$$



;
;
;

Рис. 2.1. Напрямні косинуси

Задача 2.1. Представити вектор $\mathbf{b}$ у вигляді суми двох векторів, один із яких паралельний заданому ненульовому векторові $\mathbf{a}$, а другий перпендикулярний.

Розв'язок.

1) У задачі потрібно представити вектор $\mathbf{b}$ у такому вигляді

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp},$$

де $\mathbf{b}_{\parallel}$ - паралельний векторові $\mathbf{a}$, а $\mathbf{b}_{\perp}$ - перпендикулярний $\mathbf{a}$.

2) Для $\mathbf{b}_{\parallel}$ через його паралельність ненульовому векторові $\mathbf{a}$ випливає існування такого числа β, що $\mathbf{b}_{\parallel} = \beta\mathbf{a}$. Тоді вектор $\mathbf{b}_{\perp}$ дорівнює

$$\mathbf{b}_{\perp} = \mathbf{b} - \beta\mathbf{a}.$$

3) Вектор $\mathbf{b}_{\perp}$ перпендикулярний $\mathbf{a}$, отже, їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\mathbf{a}\mathbf{b}_{\perp} = \mathbf{a}(\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}) = \mathbf{a}\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}\mathbf{a} = 0.$$

Із цього рівняння вже можна знайти величину β:

$$\beta = \frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{aa}}.$$

4) Тепер можна виписати шуканий вираз для вектора $\mathbf{b}_{\parallel}$:

$$\mathbf{b}_{\parallel} = \frac{(\mathbf{ab})}{(\mathbf{aa})}\mathbf{a}.$$

Для перпендикулярної складової поки що (до наступного розділу) одержуємо такий вираз

$$\mathbf{b}_{\perp} = \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{ab})}{(\mathbf{aa})}\mathbf{a}.$$

5) Розв'язавши задачу, ми одержали загальну формулу для проекції одного вектора на інший, адже $\mathbf{b}_{\parallel}$ є ні що інше, як проекція вектора $\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{a}$. У такий спосіб

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{ab})}{(\mathbf{aa})}\mathbf{a}. \qquad (6.22)$$

Скалярний добуток векторів і його властивості

1. *Визначення.*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \mathbf{a}\cdot \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot \mathrm{Pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}.$$

2. *Основні властивості.*

   1. Комутативність (властивість щодо переміщення):

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a};$$

   2. Асоціативність (сполучна властивість):

$$\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b};$$

   3. Позитивна (ненегативна) визначеність:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \ge 0, \text{ причому } |\mathbf{a}|^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0};$$

   4. Дистрибутивність (розподільна властивість):

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

3. *Окремі значення*

   1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 90^\circ$, якщо $|\mathbf{a}| \ne 0$ і $|\mathbf{b}| \ne 0$;
   2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} > 0 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) < 90^\circ$ – гострий кут;
   3. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) > 90^\circ$ – тупий кут;
   4. $|\mathbf{a}| = 0$ або $|\mathbf{b}| = 0 \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

4. *Скалярний добуток у декартовій системі координат*

Координати вектора

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{i=3} a_i\mathbf{e}_i \Leftrightarrow a_i = \mathbf{e}_i\mathbf{a}.$$

Скалярний добуток

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{i=3} a_i\mathbf{e}_i \cdot \sum_{k=1}^{k=3} b_k\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{k=1}^{k=3} a_i b_k(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{k=1}^{k=3} a_i b_k \delta_{ik} = \sum_{i=1}^{i=3} a_i b_i.$$

Довжина вектора

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=3} a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Відстань між точками

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Кут між векторами

$$\cos(\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} a_i b_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Напрямляючи косинуси

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Проекція одного вектора на інший

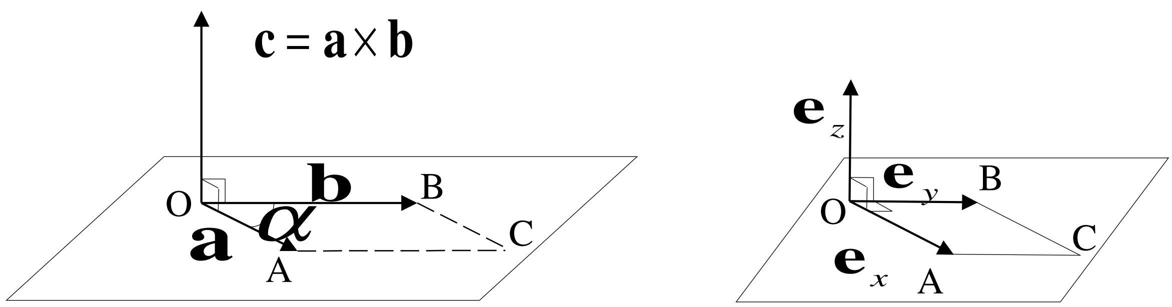
$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{[illegible]}\mathbf{a}.$$

2.7. Визначення векторного добутку.

> ***Визначення 17.*** Векторним добутком векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називають вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, визначений у такий спосіб:
> а) вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярний і векторові $\mathbf{a}$, і векторові $\mathbf{b}$;
> б) довжина вектора $\mathbf{c}$ дорівнює добуткові довжин векторів-співмножників на синус кута між цими векторами;
> с) трійка векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ є правою.

Визначення векторного добутку можна записати в такому вигляді:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \mathbf{c} \perp \mathbf{b} \\ |\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\angle \mathbf{ab}) \\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ и } \mathbf{c} \text{ - права трійка векторів.} \end{cases} \tag{7.4}$$



а) б)

Рис. 2.2. Векторний добуток векторів:
а) визначення векторного добутку $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$;
б) векторний добуток ортів декартового базису $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$.

2.8. Властивості векторного добутку.

Основні властивості векторного добутку

1. Антикомутативність (властивість щодо переміщення):

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a};$$

2. Асоціативність (сполучна властивість):

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b});$$

3. Дистрибутивність (розподільна властивість):

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}.$$

4. Паралельність векторів і векторний добуток

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}.$$

5. Площа паралелограма і модуль векторного добутку

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}.$$

2.9. Векторний добуток у декартовому базисі. Тензор Леві–Чівіта.

Векторний добуток ортів:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = a_1(i,j)\mathbf{e}_1 + a_3(i,j)\mathbf{e}_3 + a_2(i,j)\mathbf{e}_2 = \sum_{k=1}^{k=3} a_k(i,j)\mathbf{e}_k .$$

Для компактного запису значень коефіцієнтів $a_k(i,j)$ використовується спеціальний символ $a_k(i,j) = \varepsilon_{ijk}$, визначений у такий спосіб:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, \ \textit{якщо}\,(ijk) = (123),(231),(312); \\ -1, \ \textit{якщо}\,(ijk) = (132),(213),(321); \\ \quad 0, \ \textit{у решті випадків}; \end{cases}$$

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k ,$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{i=3} a_i\mathbf{e}_i \times \sum_{j=1}^{j=3} b_j\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3} a_i b_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3}\sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k .$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_k = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j .$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 ,$$
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 ,$$
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_x = a_y b_z - a_z b_y ,$$
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_y = a_z b_x - a_x b_z ,$$
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_z = a_x b_y - a_y b_x .$$

Сам же вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ дорівнює

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) .$$

Ці співвідношення дозволяють «скласти» ще одне правило для запам'ятовування координат векторного добутку.

Якщо ми хочемо знайти певний компонент векторного добутку, то ми після знака рівності пишемо позначення векторів у тому ж порядку, що і у векторному добутку:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_x = a\ b.$$

Потім записуємо індекси в множників так, щоб вони складали циклічну послідовність (xyz, yzx або zxy):

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_x = a_y b_z\,.$$

Далі ставимо знак мінус і знову пишемо позначення векторів, але індекси міняємо місцями:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_x = a_y b_z - a_z b_y\,.$$

Аналогічно робимо й з іншими компонентами, не забуваючи циклічно переставляти індекси.

2.10. Векторний добуток у декартовому базисі. Дво- й тривимірні визначники.
Визначник другого порядку

$$ab - cd = \begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$$

Векторний добуток:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3\,;\;\; \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_3 c_1 - a_3 b_1 c_2\,.$$

Навівши подібні, зауважуємо, що цей вираз можна записати в такому вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3}\sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k\,.$$

Векторний добуток:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Правило 1.

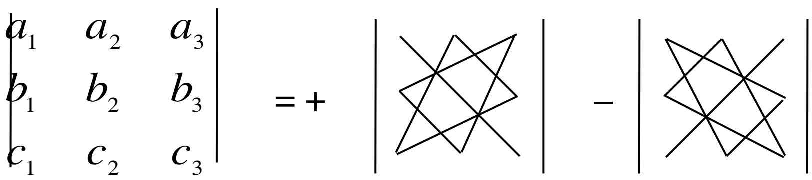
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Правило 2.

Це правило допомагає запам'ятати співвідношення

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_3 c_1 - a_3 b_1 c_2$$

за допомогою такого рисунка:

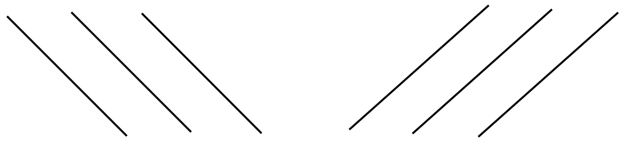


На рисунку лініями з'єднані коефіцієнти, що входять у відповідні добутки, а знаки плюс і мінус указують на знак, з яким цей добуток входить у визначник.

Правило 3. Використання додаткових стовпців.

Відповідно до цього правила достатньо праворуч від визначника дописати перший, а потім другий стовпець. Потім у визначник включають зі знаком плюс добуток коефіцієнтів, що стоять по головній діагоналі і паралельній їй діагоналях, а зі знаком мінус – коефіцієнти, що стоять по малій діагоналі й паралельній їй діагоналях.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_3 c_1 - a_3 b_1 c_2 =$$



Відомості про векторний добуток.

Основні властивості векторного добутку

1. Антикомутативність (властивість щодо переміщення):

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a};$$

2. Асоціативність (сполучна властивість):

$$(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b});$$

3. Дистрибутивність (розподільна властивість):

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\times\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\times\mathbf{b} + \mathbf{a}_2\times\mathbf{b}.$$

4. Паралельність векторів і векторний добуток:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}\parallel\mathbf{b}.$$

5. Площа паралелограма і модуль векторного добутку:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}.$$

<u>Векторний добуток у декартовому базисі</u>

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_2, a_1b_2 - a_3b_1).$$

Запис за допомогою тензора Леві–Чівіта.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = = \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3}\sum_{k=1}^{k=3}\varepsilon_{ijk}a_ib_j\mathbf{e}_k.$$

Запис з використанням визначників другого порядку:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

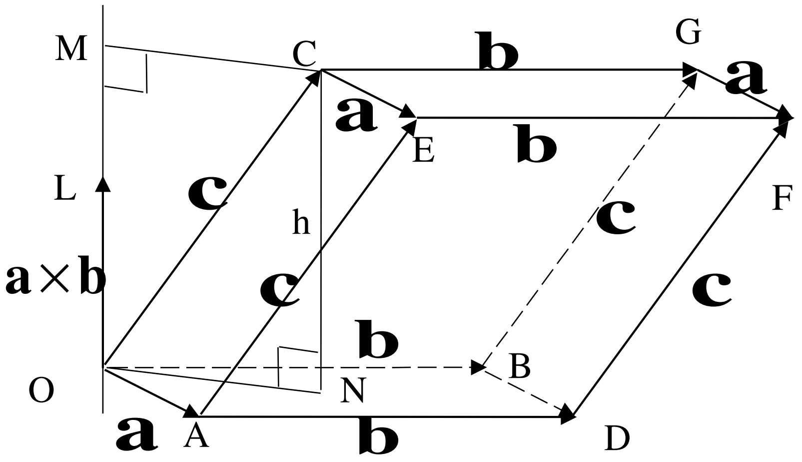
Запис за допомогою визначника третього порядку:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

2.11. Визначення змішаного добутку.

Властивість 1. Змішаний добуток $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ трьох векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ дорівнює орієнтованому об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, як на сторонах:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=V_{\mathbf{abc}}^{(orient)}. \qquad (8.1)$$



$$\begin{aligned}
&(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\\
&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot \mathit{Пр}_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\mathbf{c}=\\
&=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot|\mathit{Пр}_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\mathbf{c}|=\\
&=S_{\mathbf{ab}}\cdot|OM|=\\
&=S_{OADB}\cdot|ON|=\\
&=S_{основание}\cdot h_{высота}=\\
&=V_{OADBCEFG}\equiv\\
&\equiv V_{\mathbf{abc}}\equiv(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}).
\end{aligned}$$

Рис. 8.1. Мішаний добуток векторів (права трійка векторів)

$$V_{\mathbf{abc}}^{(orient)}=\begin{cases} V_{\mathbf{abc}},\ \textit{якщо}\quad \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}-\textit{права трійка};\\ 0,\ \textit{якщо}\quad \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}-\textit{компланарні};\\ -V_{\mathbf{abc}},\ \textit{якщо}\quad \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}-\textit{ліва трійка.}\end{cases}$$

1. Мішаний добуток у загальному випадку.

Тепер, виходячи з результатів пунктів 1, 2, 3, і визначення орієнтованого об'єму, одержуємо остаточний вираз для змішаного добутку:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=V_{\mathbf{abc}}^{(orient)}.$$

8.2. Властивості змішаного добутку.

Змішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=0$$

Змішаний добуток, що містить два однакових вектори, дорівнює нулю.

Другу властивість ми одержимо, якщо спробуємо обчислити змішаний добуток, у якому вектори переставимо циклічно: $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=?$. Результатом такого добутку буде об’єм того ж орієнтованого паралелепіпеда:

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=V_{\mathbf{bca}}=V_{\mathbf{abc}},$$

а, отже, *циклічні перестановки співмножників у мішаному добутку не змінюють його*.

Отже, *звичайні перестановки змінюють знак змішаного добутку* $(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}=V_{\mathbf{acb}}=-V_{\mathbf{abc}}$. Ці два правила можна представити таким ланцюжком рівностей:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}=-(\mathbf{c}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}.$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

Це властивість можна виразити у вигляді такого правила: *у змішаному добутку знаки множення можна змінювати місцями.*

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})>0 \;\Rightarrow\; \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ *– права трійка векторів;*

$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})<0 \;\Rightarrow\; \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ *– ліва трійка векторів.*

Розподільний закон змішаного добутку можна довести, хоча б для одного з векторів у добутку, наприклад, для вектора, що стоїть на останньому місці:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\lambda_1\mathbf{c}_1+\lambda_2\mathbf{c}_2)=\lambda_1(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}_1)+\lambda_2(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}_2).$$

Щоб довести цю рівність, достатньо представити змішаний добуток $(\mathbf{a},\mathbf{b},\lambda_1\mathbf{c}_1+\lambda_2\mathbf{c}_2)$ у його початковому вигляді:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\lambda_1\mathbf{c}_1+\lambda_2\mathbf{c}_2)=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\lambda_1\mathbf{c}_1+\lambda_2\mathbf{c}_2),$$

а потім скористатися дистрибутивністю скалярного добутку, що дозволяє нам розкривати дужки: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\lambda_1\mathbf{c}_1+\lambda_2\mathbf{c}_2)=\lambda_1(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}_1+\lambda_2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}_2$.

$$\mathbf{a}\cdot\{\mathbf{b}\times(\lambda_1\mathbf{c}_1+\lambda_2\mathbf{c}_2)\}=\lambda_1\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}_1)+\lambda_2\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}_2)$$

– розподільний закон векторного добутку векторів.

Звідси отримуємо також вираз для *розподільного закону векторного добутку векторів*:

$$\mathbf{b}\times(\lambda_1\mathbf{c}_1+\lambda_2\mathbf{c}_2)=\lambda_1(\mathbf{b}\times\mathbf{c}_1)+\lambda_2(\mathbf{b}\times\mathbf{c}_2).$$

8.3. Змішаний добуток у декартовому базисі.

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

8.4. Приклади застосування змішаного добутку під час розв'язування задач.

Задача 8.1. Представити заданий вектор $\mathbf{d}$ у вигляді розкладання довільного вектора по трьох заданих некомпланарних векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$.

За умовою задачі необхідно представити вектор $\mathbf{d}$ у такому вигляді:

$$\mathbf{d}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}. \qquad (8.1.1)$$

Шукані коефіцієнти α, β і γ являють собою не що інше, як координати вектора $\mathbf{d}$ у базисі, складеному з векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$. Існування й одиничність такого представлення ми досліджували в розділах 3, 4.

Щоб розв'язати задачу скористаємося тією властивістю змішаного добутку, відповідно до якої мішаний добуток, що містить два однакових вектори дорівнює нулю. Помножимо співвідношення (8.1.1) ліворуч і праворуч на векторний добуток $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$:

$$\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\beta\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\gamma\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\gamma\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \quad (8.1.2)$$

Звідси можна знайти коефіцієнт γ

$$\gamma=\frac{\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}. \quad (8.1.3)$$

Помітимо, що відповідно до умови задачі величина $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, що стоїть у чисельнику, не дорівнює нулю. Отриманий результат можна переписати іншим образом:

$$\gamma=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}. \quad (.8.1.4)$$

Аналогічно одержуємо коефіцієнти α і β множачи співвідношення (8.1.1) на величини $\mathbf{c}\times\mathbf{b}$ і $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, відповідно:

$$\alpha=\frac{(\mathbf{d},\mathbf{b},\mathbf{c})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}\ \beta=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{d},\mathbf{c})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}. \quad (8.1.5)$$

Отримані результати можна запам'ятати за допомогою такого простого правила. Коефіцієнт у розкладанні вектора по базису дорівнює дробу, в знаменнику якого стоїть мішаний добуток базисних векторів, а в чисельнику – цей же мішаний добуток, у якому даний вектор стоїть замість базисного вектора, що відповідає шуканій координаті.

Задача 8.2. Визначте вектор $\mathbf{d}$ по заданих скалярних добутках $\alpha=\mathbf{ad}$, $\beta=\mathbf{bd}$ і $\gamma=\mathbf{cd}$.

1. Прийом, що ми застосували в першій задачі, може допомогти нам і тут. Але для цього необхідно придумати таке розкладання вектора $\mathbf{d}$, щоб після відповідних скалярних множень вийшли найбільш прості вирази, що бажано містять по одному з невідомих коефіцієнтів розкладання. Одне з таких розкладань має вигляд:

$$\mathbf{d}=d_1(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+d_2(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+d_3(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \quad (8.2.1)$$

Справді, після скалярного множення на кожний з векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ праворуч буде залишатися тільки один з доданків. У той же час ліворуч будуть виходити задані за умовою задачі відповідні скалярні добутки. Наприклад:

$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}\equiv\alpha=d_1(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}+d_2(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}+d_3(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=d_1(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}. \quad (8.2.2)$$

Звідси одержуємо:

$$d_1=\frac{\alpha}{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}}=\frac{\alpha}{(\mathbf{abc})}. \quad (8.2.3)$$

Аналогічно і для інших коефіцієнтів:

$$d_2=\frac{\beta}{(\mathbf{abc})}\ \text{та}\ d_3=\frac{\gamma}{(\mathbf{abc})}. \quad (8.2.4)$$

У підсумку для вектора $\mathbf{d}$ одержуємо остаточний вираз:

$$\mathbf{d}=\frac{\alpha}{(\mathbf{abc})}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\frac{\beta}{(\mathbf{abc})}(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\frac{\gamma}{(\mathbf{abc})}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \quad (8.2.5)$$

Ми бачимо, що для існування розв'язку необхідно, щоб принаймні знаменники в (8.2.5) не дорівнювали нулю, тобто вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ не були компланарними.

2. Однак, для того щоб такий розв'язок був можливим, нам необхідно переконатися в існуванні розкладання (8.2.1), тобто треба довести, що вектори $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ і $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ можна обрати як базис. Для цього необхідно переконатися в їх некомпланарності, тобто визначити, коли їхній мішаний добуток не дорівнює нулю:

$$((\mathbf{b}\times\mathbf{c}),(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),(\mathbf{a}\times\mathbf{b})) = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \neq 0\,. \tag{8.2.5}$$

У наступному розділі ми доведемо, що цей вираз зводиться до мішаного добутку $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ і, тим самим, ми знову, як умову існування розв'язку цієї задачі, одержуємо, що вектори $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ повинні бути некомпланарними.

8.4. Подвійний векторний добуток векторів.

Правило розкриття подвійного векторного добутку:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} \;=\; \mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{a}(\mathbf{bc})\,.$$

Подвійний векторний добуток дорівнює різниці добутку середнього вектора на скалярний добуток інших векторів і добутку іншого вектора в дужках на скалярний добуток інших векторів.

8.5. Задачі

Задача 8.3. (продовження задачі 5.1). Знайдіть компонент вектора $\mathbf{a}$, ортогональний векторові $\mathbf{b}\neq 0$.

Розв'язок. У задачі 5.1. був знайдений компонент $\mathbf{a}_{\parallel}$ вектора $\mathbf{a}$, паралельний ненульовому векторові $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{b}\frac{(\mathbf{ab})}{(\mathbf{bb})}\,.$$

Звідси можна знайти компонент $\mathbf{a}_{\perp}$ вектора $\mathbf{a}$, перпендикулярний векторові $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a}-\mathbf{b}\frac{(\mathbf{ab})}{(\mathbf{bb})}\,.$$

Тепер приведемо праву частину цього виразу до загального знаменника:

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a}-\mathbf{b}\frac{(\mathbf{ab})}{(\mathbf{bb})} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{bb})-\mathbf{b}(\mathbf{ab})}{(\mathbf{bb})}\,.$$

У чисельнику стоїть не що інше, як подвійний векторний добуток $(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}$.

Отже, шуканий вираз для $\mathbf{a}_{\perp}$ виглядає так:

$$\mathbf{a}_{\perp} = =\frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b})}{(\mathbf{bb})}\,.$$

Задача 8.4. (закінчення задачі 8.2)

Спростити вираз $((\mathbf{b}\times\mathbf{c}),(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),(\mathbf{a}\times\mathbf{b})) = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

Розв'язок. Щоб розв'язати задачу розглянемо подвійний векторний добуток $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$, де як перший вектор візьмемо $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, другий – $\mathbf{c}$, а третій – $\mathbf{a}$. Тоді

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}((\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a})-\mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))=\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

Множачи цей добуток на $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, одержуємо

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$$

Таким чином, ми показали, що некомпланарність векторів $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ і $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ еквівалентна некопланарності векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, тобто

$$((\mathbf{b}\times\mathbf{c}),(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),(\mathbf{a}\times\mathbf{b}))=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2.$$

Задача 8.5. Довести, що

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{vmatrix}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Величина $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ являє собою мішаний добуток трьох векторів $(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})$. Отже, у ньому можна переставити знаки місцями:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\}\cdot\mathbf{d}.$$

У фігурних дужках стоїть подвійний векторний добуток, що розкриваємо відповідно до правила:

$$\{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\}\cdot\mathbf{d}=\{\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{a}(\mathbf{cb})\}\cdot\mathbf{d}.$$

Розкриваючи фігурні дужки, остаточно одержуємо шукане співвідношення.

$$\{\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{a}(\mathbf{cb})\}\cdot\mathbf{d}=(\mathbf{bd})(\mathbf{ac})-(\mathbf{ad})(\mathbf{cb})=\begin{vmatrix}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\end{vmatrix}.$$

Відзначимо окремий випадок співвідношення $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{bd})(\mathbf{ac})-(\mathbf{ad})(\mathbf{cb})$, у якому вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{c}$, а також $\mathbf{b}$ і $\mathbf{d}$ збігаються:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{aa})(\mathbf{bb})-(\mathbf{ab})(\mathbf{ab}).$$

Це співвідношення зв'язує довжини векторного й скалярного добутку двох векторів:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{ab})^2.$$

Причому останнє співвідношення можна довести прямо з визначень довжин векторного і скалярного добутку:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2(\angle\mathbf{ab})=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2(\angle\mathbf{ab}).$$

Ця рівність справедлива через співвідношення $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

Задача 8.6. Доведіть, що

$$V_{\mathbf{abc}}^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) & (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) & (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) & (\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}) & (\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) \end{vmatrix}.$$

Завдання до розділу 2

Усні питання для повторення матеріалу

1. Чим відрізняються один від одного скалярний і векторний добуток?
2. Навіщо ми доводили, що кути між рівними напрямленими відрізками, відкладеними від різних точок, рівні між собою?
3. Коли скалярний (векторний) добуток двох векторів дорівнює нулю?
4. Коли змішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю?
5. Чому рівні скалярні й векторні добутки векторів $(1, 4, 2)$ і $(3, -9, 6)$? Знайдіть кут між ними і довжини кожного з них.
6. Скількома способами ви можете обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Який із цих способів найбільш зручний саме для цього визначника?
7. Не виписуючи визначника, скажіть, чому дорівнює z-та проекція векторного добутку $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

Контрольні задачі

1. Яким способом можна обчислити висоту паралелограма, побудованого на двох векторах, як на сторонах?
2. Яким способом зручніше обчислювати висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах, як на сторонах?
3. Дано два вектори **a** і **b**. Представте вектор **b** у вигляді суми двох векторів **x** і **y** так, щоб вектор **x** був колінеарний векторові **a**, а вектор **y** ортогональний векторові **a**.
4. Дано два неколінеарних вектори **a** і **b**. Знайдіть вектор **x**, що є компланарним векторам **a** і **b** і задовольняє системі рівнянь $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \alpha$, $(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0$.
5. Знайдіть проекцію вектора **c** на площину, утворену двома неколінеарними векторам **a** і **b.**

Теми для індивідуальних науково-дослідних завдань

1. Доведіть, що результатом скалярного добутку є скаляр.
2. Доведіть, що довжина вектора є скаляром.
3. Доведіть, що результатом векторного добутку (полярних) векторів є (аксіальний) вектор.
4. Доведіть, що результатом змішаного добутку полярних векторів є псевдоскаляр.

Розділ 3. Перетворення систем координат.

3.*1. Перетворення координат на площині.*

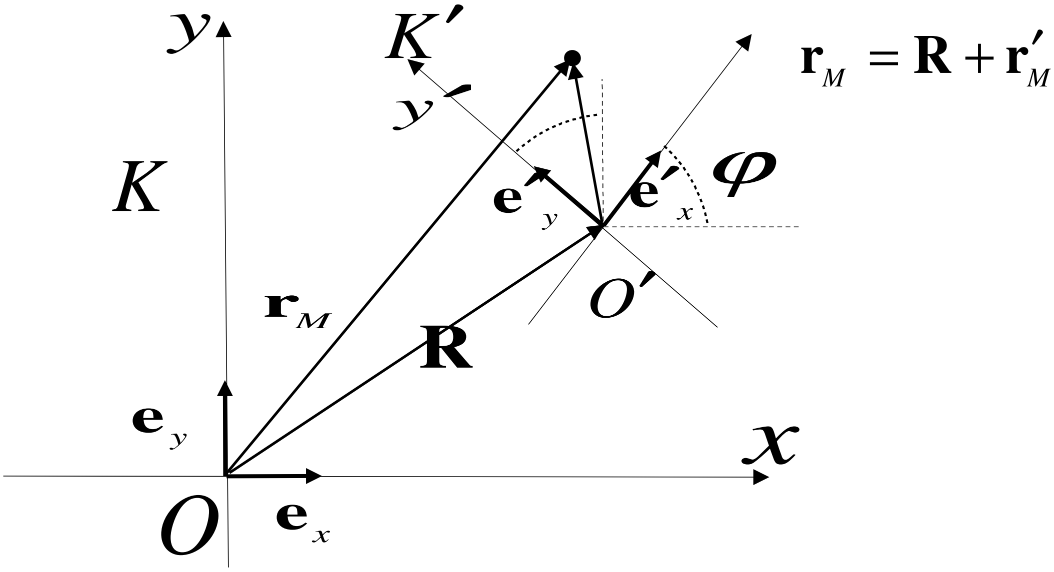


Рис. 3.1. Зв'язок між радіусами-векторами точки в різних системах відліку.

Закон перетворення координат.

$$\begin{cases} x = X_0 + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = Y_0 + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

Закон зворотного перетворення координат:

$$\begin{cases} x' = (x - X_0)\cos\varphi + (y - Y_0)\sin\varphi \\ y' = -(x - X_0)\sin\varphi + (y - Y_0)\cos\varphi \end{cases}$$

Теорема про лінійність перетворень координат. Переходячи від однієї декартової системи координат до іншої шляхом паралельного переносу і повороту, координати виражаються одна через одну лінійно.

3.*1. Перетворення координат у просторі.*

Зв’язок ортів

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}\mathbf{e}_k \ .$$

Зв’язок координат

$$x_k = X_k + \sum_{i=1}^{3} x_i' \alpha_{ik} \ .$$

Завдання до розділу 3

Усні питання для повторення матеріалу

1. Сформулюйте теорему про лінійність перетворень координат.
2. Який буде зв'язок між координатами точки в різних системах відліку, що відрізняються паралельним перенесенням початку координат.
3. Який буде зв'язок між координатами точки в різних системах відліку, що відрізняються поворотом осей?
4. Який зміст мають коефіцієнти $\alpha_{ij} = \mathbf{e}_i' \mathbf{e}_j$.
5. Навіщо необхідна система CMYK?

Контрольні задачі

1. Початком відліку нової системи відліку K' є точка O', координати якої в старій системі відліку K дорівнюють (2, 3). Кут між осями абсцис становить + 30°. Знайти закон перетворення координат під час переходу з системи K в систему K' за умови, що обидві системи координат – праві.
2. Розв'яжіть попередню задачу за умови, що стара система координат – права, а нова – ліва.
3. Одержіть формули переходу для зворотного перетворення координат прямо зі співвідношень для прямого перетворення координат, розглядаючи ці вирази як систему двох рівнянь, у яких дві невідомі виступають новими координатами.

Теми для індивідуальних науково-дослідних задач

1. Дослідіть зв'язок між координатами в різних афінних (не прямокутних) системах відліку.
2. Що таке тензор і як його компоненти перетворюються підчас переходу з однієї системи координат в іншу?
3. Розберіться, чому і яким чином підчас формування кольорового рисунка у форматі JPEG відбувається перехід зі звичайної системи RGB в іншу RGB систему.
4. Отримайте формули перетворення координат підчас переходу з RGB системи в систему «яскравість насиченість тон».

Розділ 4. Прямі і площини

4.1. Прямі лінії на площині.

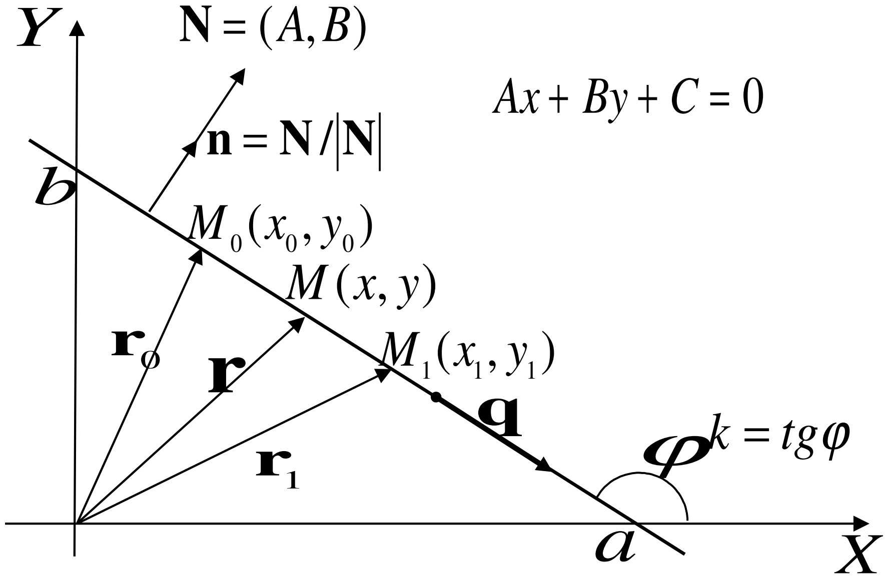


Рис. 11.1. Параметри прямої лінії на площині

Таблиця 4.1. Рівняння прямої лінії на площині

N	Назва	Рівняння
1	Загальне рівняння	$Ax + By + C = 0$
2	Нормальне	$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$
3	У відрізках	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
4	З кутовим коефіцієнтом	$y = kx + b$
5	Канонічне	$\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y}$
6	Через дві точки	$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$
7	Параметричне в координатах	$\begin{cases} x = x_0 + q_x t \\ y = y_0 + q_y t \end{cases}$
8	Параметричне через дві точки	$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases}$
9	Векторне параметричне	$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t$
10	Векторне параметричне через дві точки	$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)t$
11	Векторне	$\mathbf{N}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$

Нормаль до прямої $\mathbf{N} = (A, B)$.

Можливий вираз для напрямного вектора: $\mathbf{q} = \left(\frac{1}{A}, -\frac{1}{B}\right)$, $\mathbf{q} = (B, -A)$ і т. п.

Відрізки, що відтинаються на осях: $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Кутовий коефіцієнт: $k = -\frac{A}{B}$.

Абсолютне значення величини

$$\rho = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

визначає відстань від точки до прямій, а її знак – їхнє взаємне розташування.

4.2. Рівняння площини й прямої у просторі

1а. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}$ – векторне параметричне рівняння площини

1б. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + \mu(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)$ – векторне параметричне рівняння площини, яка проходить через три точки.

1в. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{p} + \mu(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)$ –
векторне параметричне рівняння площини, яка задана двома точками й одним напрямним вектором.

2а. $$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p_x + \mu q_x \\ y = y_0 + \lambda p_y + \mu q_y \\ z = z_0 + \lambda p_z + \mu q_z \end{cases} -$$
параметричне рівняння площини, яка задана двома напрямними векторами

2б. $$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases} -$$
параметричне рівняння площини, яка задана трьома точками.

2в. $$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p_x + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda p_y + \mu(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda p_z + \mu(z_2 - z_0) \end{cases} -$$
параметричне рівняння площини, яка задана двома точками й одним напрямним вектором.

Таблиця 4.2. Рівняння площини

N	Назва рівняння	Рівняння
1	Загальне рівняння	$Ax+By+Cz+D=0$
2	Нормальне	$\dfrac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$
3	У відрізках	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$
4	Векторне параметричне, задане а)одною точкою і двома напрямними векторами; б) трьома точками; в) двома точками й одним напрямним вектором.	$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{q}$; $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)+\mu(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0)$; $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda\mathbf{p}+\mu(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0)$.
5	Параметричне, задане а) точкою і двома напрямними векторами; б) трьома точками; в) двома точками й одним напрямним вектором.	$\begin{cases} x=x_0+\lambda p_x+\mu q_x \\ y=y_0+\lambda p_y+\mu q_y \\ z=z_0+\lambda p_z+\mu q_z \end{cases}$; $\begin{cases} x=x_0+\lambda(x_1-x_0)+\mu(x_2-x_0) \\ y=y_0+\lambda(y_1-y_0)+\mu(y_2-y_0) \\ z=z_0+\lambda(z_1-z_0)+\mu(z_2-z_0) \end{cases}$ $\begin{cases} x=x_0+\lambda p_x+\mu(x_2-x_0) \\ y=y_0+\lambda p_y+\mu(y_2-y_0) \\ z=z_0+\lambda p_z+\mu(z_2-z_0) \end{cases}$
6	Векторне, задане нормаллю	$\mathbf{N}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$
7	Векторне, задане а) напрямними векторами; б) двома точками й одним напрямним вектором; в) трьома точками.	$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{q})=(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{p},\mathbf{q})=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\mathbf{q})=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0)=0$.
8	Векторне рівняння площини в координатному записі, задане а) напрямними векторами; б) двома точками й одним напрямним вектором; в) трьома точками.	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$

Нормаль до площини

$$\mathbf{N}=(A,B,C).$$

Вираз нормального вектора через напрямні

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}\,.$$

Відрізки, що відтинаються на осях:

$$a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C}\,.$$

Абсолютне значення величини

$$\rho = \frac{\mathbf{rN} + D}{|\mathbf{N}|} = \mathbf{rn} + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

визначає відстань від точки до прямої, а її знак – їхнє взаємне розташування.

Таблиця 4.3. Рівняння прямої лінії в просторі.

N	Назва рівняння	Рівняння
1	Векторне параметричне	$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t$
2	Векторне параметричне, задане двома точками.	$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)t$
3	Параметричне в координатах	$\begin{cases} x = x_0 + q_x t \\ y = y_0 + q_y t \\ z = z_0 + q_z t \end{cases}$
4	Параметричне, задане двома точками	$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$
5	Канонічне	$\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y} = \frac{z - z_0}{q_z}$
6	Через дві точки	$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$
7	Загальне рівняння	$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$
8	Векторне	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{q} = 0$
9	Векторне, задане двома точками	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = 0$

Якщо пряма задана, як перетинання двох площин, то її напрямний вектор визначають нормальними до цих площин векторами:

$$\mathbf{q} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2\,.$$

4.3. Задачі на взаємне розташування точок, прямих і площин.

У цьому розділі підручника наведено лише декілька, пов'язаних із прямими і площинами задач, що або викликають труднощі підчас розв’язання, або допускають красиві розв’язки, тобто є найбільш повчальними.

Задача 4.1. Визначить проекцію точки на пряму на площини, відстань від цієї точки до прямої. Одержіть рівняння перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму.

1. Радіус-вектор точки K – проекції заданої точки M на пряму представимо як різницю

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_M + \overrightarrow{MK}.$$

Але вектор $\overrightarrow{MK}$ – це проекція вектора $\overrightarrow{ML}$ на вектор нормалі, де точка L - довільна точка на прямій:

$$\overrightarrow{MK} = \mathrm{Pr}_{\mathbf{N}}\,\overrightarrow{ML} = \frac{\overrightarrow{ML}\cdot\mathbf{N}}{\mathbf{N}^2}\mathbf{N} = \left(\overrightarrow{ML}\cdot\mathbf{n}\right)\mathbf{n} = \{(\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{n}\}\mathbf{n}\,.$$

Припустімо, що пряма задана своїм векторним параметричним рівнянням $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t$. Тоді, з огляду на те, що нормальний вектор і напрямляючий ортогональні ($\mathbf{qn} = 0$), для $\overrightarrow{MK}$ одержуємо такий вираз:

$$\overrightarrow{MK} = \{(\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{n}\}\mathbf{n} = \{(\mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t_L - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{n}\}\mathbf{n} = \{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{n}\}\mathbf{n}$$

Тоді для $\mathbf{r}_K$ одержуємо:

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_M - \left((\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}\right)\mathbf{n} = \mathbf{r}_M - \frac{\left((\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{N}\right)}{\mathbf{N}^2}\mathbf{N}\,. \qquad (4.1.1)$$

Це співвідношення вирішує поставлену задачу, якщо задано нормаль і точку, через яку проходить пряма, тобто якщо задано векторне рівняння прямої.

2. Відстань від точки M до прямої дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{MK} = \mathbf{r}_K - \mathbf{r}_M$:

$$\left|\overrightarrow{MK}\right| = \left|\{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{n}\}\mathbf{n}\right| = \left|\{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{n}\}\right|\left|\mathbf{n}\right| = \left|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{n}\right|.$$

Цей вираз можна легко звести до нормованого рівняння прямої.

Аналогічна задача в просторі дозволяє одержати більш красиві розв’язки, тому що в просторі ми можемо скористатися поняттям векторного добутку

Задача 4.2. Визначить проекцію точки на пряму на площини, відстань від цієї точки $\mathbf{r}_M$ до прямої $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t$. Одержіть рівняння перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму.

1. Нехай точка K є проекцією заданої точки M на пряму:

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_M + \overrightarrow{MK}\text{, причому } \overrightarrow{MK} \perp \mathbf{q}\,.$$

Тоді вектор $\overrightarrow{MK}$ є компонентом вектора $\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_M$ перпендикулярним $\mathbf{q}$:

$$\overrightarrow{MK} \equiv \left(\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_M\right)_\perp = \frac{\mathbf{q}\times\left(\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_M\right)}{\mathbf{q}^2}\times\mathbf{q},$$

де L - будь-яка точка заданої прямої.
Оскільки точка L належить прямій, то її радіус-вектор можна записати у вигляді $\mathbf{r}_L = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t_L$, де t_L – значення параметра, що відповідає точці L.
Тоді для $\overrightarrow{MK}$ одержуємо:

$$\overrightarrow{MK} = \frac{\mathbf{q}\times\left(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M\right)}{\mathbf{q}^2}\times\mathbf{q}. \qquad (4.2.1)$$

Довжина цього вектора визначає відстань ρ_M від точки M до прямої:

$$\rho_M = \left|\overrightarrow{MK}\right| = \left|\frac{\mathbf{q}\times\left(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M\right)}{\mathbf{q}^2}\times\mathbf{q}\right| = \frac{\left|\mathbf{q}\times\left(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M\right)\right|}{\left|\mathbf{q}\right|^2}\left|\mathbf{q}\right| = \frac{\left|\mathbf{q}\times\left(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M\right)\right|}{\left|\mathbf{q}\right|}. \qquad (4.2.2)$$

2. Можна знайти відстань від точки до прямої суто геометричним методом.
З'єднаймо точку M з будь-якою точкою на прямій, наприклад, з точкою L.
Виберімо на прямій іншу точку, що не збігається з L, наприклад Q ($Q \neq L$), і відкладімо від точки Q відрізок $[QP]$, паралельний відрізкові $[LM]$, так, щоб точки M і P виявилися в одній напівплощині.
Площа отриманого паралелограма буде дорівнює величині векторного добутку $\overrightarrow{LQ}\times\overrightarrow{LM}$, висота, проведена з точки M до основи LQ, є шуканою відстанню від точки M до прямої. Висоту паралелограма можна знайти, розділивши його площу на довжину основи, до якого проведена ця висота:

$$\rho_M \equiv h = \frac{S}{l} = \frac{\left|\overrightarrow{LQ}\times\overrightarrow{LM}\right|}{\left|\overrightarrow{LQ}\right|}.$$

У цю рівність підставимо вирази для радіусів-векторів точок K і L, що належать прямій:

$$\rho_M = \frac{\left|(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_L)\times(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_L)\right|}{\left|\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_L\right|} = \frac{\left|(\mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t_Q - \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}t_L)\times(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}t_L)\right|}{\left|\mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t_Q - \mathbf{r}_L - \mathbf{q}t_L\right|} =$$

$$= \frac{\left|\mathbf{q}(t_Q - t_L)\times(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}t_L)\right|}{\left|\mathbf{q}(t_Q - t_L)\right|} = \frac{\left|t_Q - t_L\right|}{\left|t_Q - t_L\right|}\frac{\left|\mathbf{q}\times(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}t_L)\right|}{\left|\mathbf{q}\right|} = \frac{\left|\mathbf{q}\times(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0)\right|}{\left|\mathbf{q}\right|}.$$

Особливістю такого розв’язку є те, що як точки Q і L можна вибирати які завгодно незбіжні точки прямої. Наприклад, можна було вибрати такі точки Q і L, щоб $\overrightarrow{LQ} = \mathbf{q}$, і відразу одержати шуканий результат, що збігається з (13.2.2).

3. Однак повний розв’язок цієї задачі вимагає, щоб ми знайшли ще і місце розташування точки K – проекції точки M на задану пряму. Цю задачу вирішимо дещо по-іншому.

Нехай точка K на прямій задана своїм параметром:

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t_K.$$

Щоб знайти значення t_K, будимо вважати, що вектор $\overrightarrow{MK} = \mathbf{r}_K - \mathbf{r}_M$ ортогональний прямій, тобто $(\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{q} = 0$. Тоді маємо

$$(\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{q} = (\mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t_K - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{q} = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}^2 t_K = 0.$$

Звідси одержуємо, що

$$t_K = -\frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}.$$

Отже, радіус-вектор точки K дорівнює

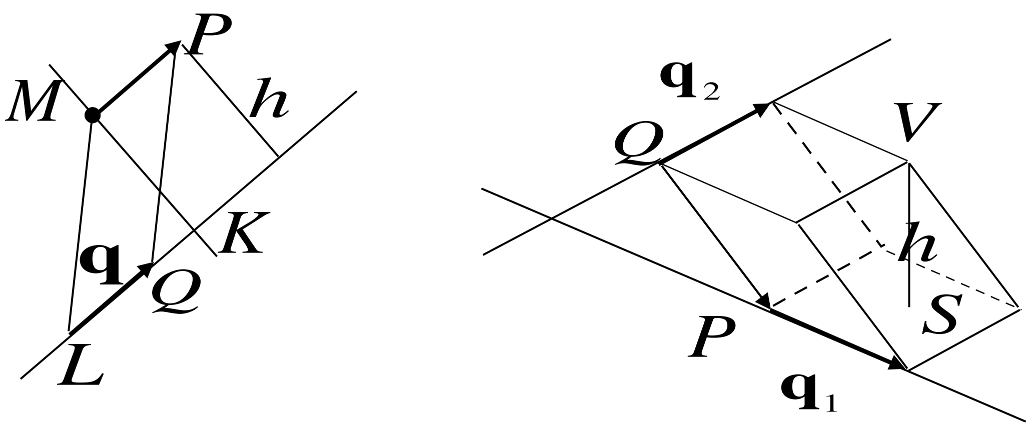
$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_0 - \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}\mathbf{q}.$$

Знаючи $\mathbf{r}_K$ можна задати рівняння перпендикуляра, наприклад, як рівняння прямої, що проходить через дві точки

Крім того, можна перевірити погодженість різних рішень. Так, для різниці, $\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_M$ ми тепер одержуємо вираз

$$\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M - \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}\mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}\times(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)}{\mathbf{q}^2}\times\mathbf{q},$$

з якого випливає (13.2.2).



$$h = \frac{|\mathbf{q}\times(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0)|}{|\mathbf{q}|} \equiv \frac{S_{LQPM}}{|LQ|} \qquad h = \frac{|(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20})\cdot(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2)|}{|\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2|} \equiv \frac{V_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\overrightarrow{QP}}}{S_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2}}$$

Рис. 4.1. Відстань від точки до прямої і між перехресними прямими.

Задача 4.3. Знадіть відстань між перехресними прямими. Побудуйте рівняння загальної нормалі.

Цю задачу теж можна вирішити в три етапи. Спочатку знайдемо відстань між перехресними прямими. Потім дамо геометричне пояснення отриманої відповіді, а далі одержимо рівняння прямої – загальної нормалі до даних прямих.

1. Нехай обидві прямі задані векторними параметричними рівняннями:

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{q}_1 u$ і $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{20} + \mathbf{q}_2 v$, де задані радіуси-вектори точок $\mathbf{r}_{10}$ і $\mathbf{r}_{20}$, через які проходять прямі, їхні напрямні вектори $\mathbf{q}_1$ і $\mathbf{q}_2$. Величини u і v є параметрами для першої і другої прямої відповідно.

У цьому випадку відразу можна указати вектор $\mathbf{N}$, перпендикулярний обом прямим:

$$\mathbf{N} = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2$$

Цей вектор є напрямним вектором для загального перпендикуляра.

Тепер з'єднаймо напрямленим відрізком будь-яку точку на другій прямій Q з будь-якою точкою на першій прямій P:

$$\overrightarrow{QP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{q}_1 u_P - \mathbf{r}_{20} - \mathbf{q}_2 v_Q .$$

Припустимо, що вектор $\overrightarrow{KM}$, який з'єднує точку K на другій прямій з точкою M на першій, перпендикулярний обом прямим. Тоді цей вектор рівнобіжний векторові $\mathbf{N} = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2$, а довжина його дорівнює шуканій відстані між прямими $R = \left|\overrightarrow{KM}\right|$. У той же час точка K є ортогональною проекцією точки Q на пряму KM, а точка M – ортогональною проекцією точки P на пряму KM. Отже, відрізок $\overrightarrow{KM}$ є не що інше, як ортогональна проекція відрізка $\overrightarrow{QP}$ на відрізок $\overrightarrow{KM}$ або на вектор $\mathbf{N} = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2$:

$$\overrightarrow{KM} = \mathrm{Pr}_{\mathbf{N}}\, \overrightarrow{QP} = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{N}}{\mathbf{N}^2}\mathbf{N} = \frac{\left(\mathbf{r}_{10} + \mathbf{q}_1 u_P - \mathbf{r}_{20} - \mathbf{q}_2 v_Q\right) \cdot \left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)}{\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)^2}\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right).$$

Звідси для $\overrightarrow{KM}$ одержуємо

$$\overrightarrow{KM} = \frac{\left(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}\right) \cdot \left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)}{\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)^2}\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right). \qquad (4.3.1)$$

Довжина цього вектора дорівнює відстані між перехресними прямими:

$$R = \left|\overrightarrow{KM}\right| = \left|\frac{\left(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}\right) \cdot \left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)}{\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)^2}\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)\right| = \left|\frac{\left(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}\right) \cdot \left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)}{\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)^2}\right|\left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right| =$$

$$= \frac{\left|\left(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}\right) \cdot \left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)\right|}{\left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right|^2}\left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right| = \frac{\left|\left(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}\right) \cdot \left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)\right|}{\left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right|}. \qquad (4.3.2)$$

2. Геометричний зміст отриманого результату.

Давайте одержимо вираз (4.3.2) методом, що аналогічний до приведеного в другій дії задачі 4.2. Від довільної точки Q другої прямої відкладімо вектори $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ і напрямлений відрізок $\overrightarrow{QP}$, де точка P – довільна точка першої прямої. Тепер побудуймо на цих трьох векторах паралелепіпед. Висота цього паралелепіпеда і буде визначати відстань між даними перехресними прямими.

Об'єм цього паралелепіпеда дорівнює модулю змішаного добутку цих трьох векторів:

$$V=\left|\overrightarrow{QP}\cdot(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2)\right|,$$

а площа основи визначається величиною векторного добутку векторів $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$:

$$S=\left|\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2\right|.$$

Отже, висота дорівнює

$$h=\frac{V}{S}=\frac{\left|(\mathbf{r}_P-\mathbf{r}_Q)\cdot(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2)\right|}{\left|\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2\right|}=\frac{\left|(\mathbf{r}_{10}-\mathbf{r}_{20})\cdot(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2)\right|}{\left|\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2\right|}.$$

Це співвідношення збігається з результатом (4.3.2) і пояснює його геометричний зміст.

3. Для повного розв'язку задачі нам треба визначити місце розташування точок K і M, що були введені в першій дії. Ці точки є кінцями загального перпендикуляра до заданих перехресних прямих. Отже, напрямлений відрізок

$$\overrightarrow{KM}=\mathbf{r}_{10}+\mathbf{q}_1u-\mathbf{r}_{20}-\mathbf{q}_2v$$

перпендикулярний нормалі $\mathbf{N}=\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2$, спільній для заданих прямих. Тут u – значення параметра, що відповідає точці M, а v – точці K. Умову перпендикулярності виразимо у вигляді рівності нулю відповідних скалярних добутків:

$$\begin{cases}\overrightarrow{KM}\cdot\mathbf{q}_1=0\\ \overrightarrow{KM}\cdot\mathbf{q}_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{q}_1u-\mathbf{q}_2v)\cdot\mathbf{q}_1=0\\ (\boldsymbol{\rho}+\mathbf{q}_1u-\mathbf{q}_2v)\cdot\mathbf{q}_2=0\end{cases},$$

де для зручності введений вектор $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_{10}-\mathbf{r}_{20}$. Після найпростіших перетворень одержуємо таку систему рівнянь для невідомих u і v:

$$\begin{cases}\mathbf{q}_1^2u-(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2)v=-(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)\\ (\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2)u-\mathbf{q}_2^2v=-(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)\end{cases}.$$

Розв'язок цієї системи можна записати у вигляді

$$u=\frac{\begin{vmatrix}-(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1) & -(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2)\\ -(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2) & -\mathbf{q}_2^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{q}_1^2 & -(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2)\\ (\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2) & -\mathbf{q}_2^2\end{vmatrix}}=\frac{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_2^2-(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2)}{-\Delta}=\frac{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2)-(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_2^2}{\Delta}.$$

Тут величина $\Delta=\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2-(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)^2$ можна записати у вигляді

$$\Delta=(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2)^2,$$

отриманому в задачі 8.5. Вираз же для чисельника можна поки не спрощувати. Для другого параметра v аналогічно одержуємо:

$$v=\frac{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2)-(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_1^2}{\Delta}.$$

Ми одержали значення параметрів, що відповідають точкам K і M, а отже, знаємо тепер радіуси-вектори цих точок і, отже,можемо побудувати рівняння загального перпендикуляра як пряму, що проходить через ці точки.

З другого боку, ми одержали ще один вираз для вектора $\overrightarrow{KM} = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{q}_1 u - \mathbf{r}_{20} - \mathbf{q}_2 v$, що повинен збігатися з раніше отриманим (13.3.1).

$$\overrightarrow{KM} = \frac{(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}) \cdot (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)}{(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)^2}(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2).$$

Тобто ми повинні переконатися в справедливості рівності

$$\boldsymbol{\rho} + \mathbf{q}_1 \frac{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_2^2}{\Delta} - \mathbf{q}_2 \frac{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_1^2}{\Delta} = \frac{\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)}{(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)^2}\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2,$$

яке після множення на $\Delta = \mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2 - (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)^2 = (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)^2$ набуває вигляду

$$\boldsymbol{\rho}\left\{\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2 - (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)^2\right\} + \mathbf{q}_1\left\{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_2^2\right\} - \mathbf{q}_2\left\{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_1^2\right\} =$$

$$= \{\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)\}(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2). \tag{4.3.3}$$

Переконатися в тому, що ліву частину цієї рівності можна представити у вигляді правої частини можна таким способом. Представимо ліву частину цієї рівності у вигляді невідомого вектора $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\rho}\left\{\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2 - (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)^2\right\} + \mathbf{q}_1\left\{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_2^2\right\} - \mathbf{q}_2\left\{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_1^2\right\}.$$

Спочатку знайдений скалярний добуток множимо $\mathbf{X}$ по черзі на вектори $\mathbf{q}_1$ і на $\mathbf{q}_2$ і переконуємося в тому, що ці добутки дорівнюють нулю. Виходить, вектор $\mathbf{X}$ перпендикулярний векторам $\mathbf{q}_1$ на $\mathbf{q}_2$, а отже, він рівнобіжний векторові $\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2$ і його можна представити у вигляді

$$\mathbf{X} = \lambda(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2).$$

Щоб знайти коефіцієнт λ, множимо $\mathbf{X}$ на векторний добуток $(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)$ і для λ одержимо таке співвідношення:

$$\{(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)\boldsymbol{\rho}\}\left\{\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2 - (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)^2\right\} = \lambda(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)^2.$$

Звідси знаходимо, що

$$\lambda = (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)\boldsymbol{\rho}.$$

Отже, вектор $\mathbf{X}$ дорівнює

$$\mathbf{X} = \{(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)\boldsymbol{\rho}\}(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2),$$

що і треба було довести.

Як додаткову вправу можна довести рівність (13.3.3) шляхом послідовних прямих перетворень лівої частини в праву. Дамо лише невелику підказку. Якщо перенести перший доданок у лівій частині праворуч, то в правій частині виявиться подвійний векторний добуток деяких векторів.

Задача 4.4. Взаємне розташування прямих на площині й площин у просторі. Алгебра і геометрія.

У нашому курсі ми неодноразово говорили, що аналітична геометрія надає чудову можливість представити більшість алгебраїчних теорем і задач наочно. Розгляньмо приклад розв’язку системи двох рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}.$$

Спочатку припустімо, що в правій частині цих рівнянь не стоять одні нулі, тобто хоча б один з коефіцієнтів C_i не дорівнює нулю. Таку систему рівнянь називають неоднорідною системою й алгебраїчне розв'язок цієї системи добре відомий:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{C_1B_2 - C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{C_1B_2 - C_2B_1}{\Delta}$$

та

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{A_1C_2 - A_2C_1}{\Delta}$$

Цей розв'язок є єдиним, коли знаменники в цих виразах не дорівнюють нулю. Нагадаємо, що в знаменнику цих виразів стоїть так званий визначник системи рівнянь:

$$\Delta = A_1B_2 - A_2B_1.$$

Якщо знаменники дорівнюють нулеві, а чисельники не дорівнюють нулеві, то розв'язку немає. Можливий випадок, коли і чисельники, і знаменники, дорівнюють нулю, тобто виконується співвідношення

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1 = C_2 : C_1.$$

Тоді рівняння системи є по суті одним і тим ! самим рівнянням, і система має безліч рішень, у яких невідомі виявляються залежними одна від одної. Зв'язок між змінними визначається кожним з рівнянь системи $A_1x + B_1y = -C_1$, $A_2x + B_2y = -C_2$ або будь-яким рівнянням, отриманим з них підчас множення на ненульове число.

Усі ці висновки можна представити і геометричною мовою. Для цього досить помітити, що рівняння системи є рівняннями прямих ліній, а спільний розв'язок цих рівнянь є ні що інше, як пошук спільних точок у цих прямих.

Рівняння в системі є рівняннями прямих, записаними в загальному вигляді. Виходить, нам задані нормалі до цих ліній:

$$\mathbf{N}_1 = (A_1, B_1) \text{ та.} \mathbf{N}_2 = (A_2, B_2)$$

Рівність нулю визначника системи виявляється еквівалентним паралельності цих векторів:

$$\Delta = A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \Leftrightarrow A_2 : A_1 = B_2 : B_1 \Leftrightarrow \mathbf{N}_1 \parallel \mathbf{N}_2.$$

Отже, якщо визначник системи не дорівнює нулю, то нормалі, а разом з ними і самі прямі не рівнобіжні одне одному, а отже, вони мають *єдину* точку перетинання.

Якщо визначник виявляється рівним нулю, то це рівносильно тому, що прямі виявляються рівнобіжними. Відстань ρ_{12} між ними можна визначити з нормованого рівняння:

$$\rho_{12} = \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Ми бачимо, що якщо для коефіцієнтів C справедливе таке ж відношення, що і для коефіцієнтів A і B, тобто

$$C_2 : C_1 = A_2 : A_1 = B_2 : B_1$$

то відстань між рівнобіжними прямими дорівнює нулю. Виходить, у цьому випадку прямі збігаються і кожна з них є розв’язком системи. Якщо це співвідношення для коефіцієнтів C не виконується, то відстань між рівнобіжними прямими не дорівнює нулю, і, отже, прямі не мають спільних точок, а система рівнянь не має розв’язку.

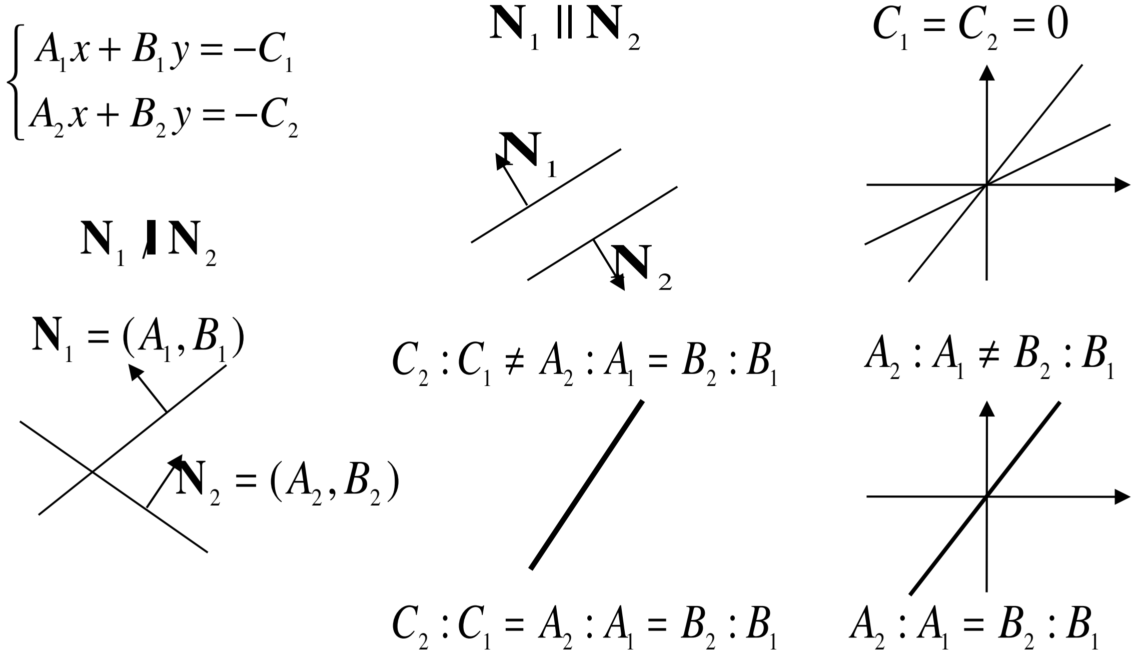


Рис. 4.2. Розв’язок системи рівнянь і взаємне розташування двох прямих на площині

Ми бачимо, що між алгебраїчним і геометричним підходами можлива повна еквівалентність. Через це міркування мовою площин і прямих часто використовують підчас розв’язуючи задачі в алгебрі, зокрема, системи рівнянь великого числа мінних.

Розгляньмо випадок, коли праві частини обох рівнянь дорівнюють нулю – так званий однорідний випадок. У цьому виразі ситуація дещо зворотна. Якщо визначник системи не дорівнює нулю, то можливим є тільки тривіальний розв’язок. $x = 0$ та. $y = 0$ Ситуація змінюється, коли визначник системи стає рівним нулю $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$. Тоді рівняння системи через пропорції $A_2 : A_1 = B_2 : B_1$ знову виявляється тим самим рівнянням, що визначає всю множину розв’язків системи.

Особливо важливі такі розв'язки у фізиці, коли вирішують задачу про так звані, *власні* рухи якоїсь системи. Так називаються рухи системи за відсутності зовнішніх сил, що відіграють роль неоднорідностей. Тому для розв'язку таких задач потрібно дорівняти нулю визначник системи рівнянь руху цієї фізичної системи.

Задача 4.5. «Відбиття» променя від трикутника.

Ця традиційна задача про так зване трасування променями світла, що виникає підчас побудови графічних зображень у комп'ютерній графіці, де поверхні фігур задаються трикутниками.

У цій задачі потрібно визначити, чи має заданий промінь спільну точку з заданим у просторі трикутником, і знайти напрямок відбитого від цієї точки променями.

Отже, припустімо, що нам у просторі задано промінь, що виходить з точки $\mathbf{r}_0$ з напрямним вектором $\mathbf{q}$. Тоді рівняння цього променя можна записати в параметричному вигляді:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t \text{, причому } t > 0 . \tag{4.5.1}$$

Трикутник ABC у просторі задамо радіусами-векторами його вершин: $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ і $\mathbf{r}_C$. Вирішимо задачу за кілька дій.

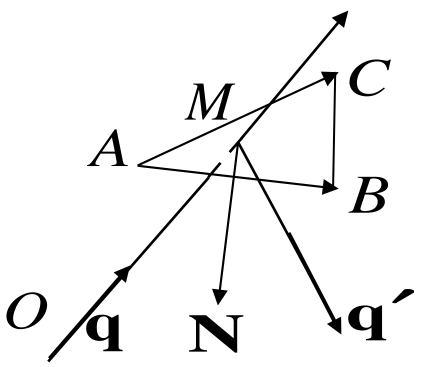
1. Трикутник ABC визначає площину, в якій він належить. Рівняння цієї площини запишемо у векторному параметричному вигляді, вибравши як напрямляючи вектори будь-яку пару напрямлених відрізків $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ або $\overrightarrow{CA}$:

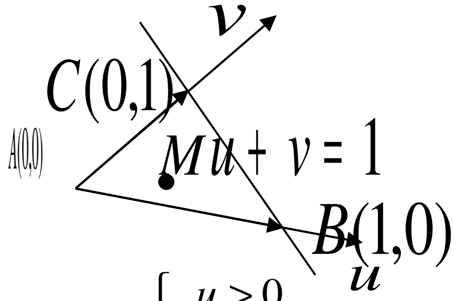
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} = \mathbf{r}_A + u(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) + v(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A) . \tag{4.5.2}$$

Точку перетинання променями (13.5.1) і площини (13.5.2) знайдемо, прирівнявши відповідні компоненти в цих векторних рівняннях.

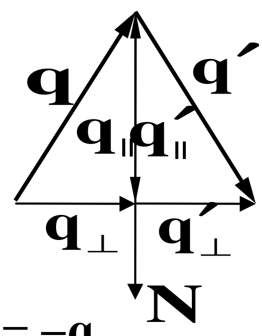
$$\begin{cases} x_0 + q_x t = x_A + u(x_B - x_A) + v(x_C - x_A) \\ y_0 + q_y t = y_A + u(y_B - y_A) + v(y_C - y_A) . \\ z_0 + q_z t = z_A + u(z_B - z_A) + v(z_C - z_A) \end{cases} \tag{4.5.3}$$

Ми одержали систему з трьох рівнянь для трьох невідомих t, u і v.





$$\Delta ABC : \begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \\ u + v < 1 \end{cases}$$



$$\mathbf{q}'_{\parallel} = -\mathbf{q}_{\parallel}$$

$$\mathbf{q}'_{\perp} = \mathbf{q}_{\perp}$$

Рис. 4.3. Відбиття променя від трикутника. Афінна система в площині трикутника. Закони відбиття

Припустімо, що система має єдиний розв'язок t_0, u_0 і v_0, що описують деяку точку M перетинання променя з трикутником.

Оскільки заданий промінь відповідає позитивним значенням параметра $t > 0$, то величина t_0 повинна бути позитивною:

$$t_0 > 0. \tag{4.5.4}$$

Залишилося перевірити, чи належить ця точка трикутникові ABC. Для цього розгляньмо величини u і v як координати на площині ABC у системі відліку з центром у точці A й осями координат AB і AC. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ є при цьому базисними векторами. Тоді координати точок трикутника ABC у цій системі відліку задовольняють такий системі нерівностей:
$u > 0$, $v > 0$ і $u + v < 1$. В останній нерівності ми використовували рівняння прямої $u + v = 1$, що з'єднує точки B і C. Отже, величини u_0 і v_0 повинні задовольняти цим нерівностям:

$$u_0 > 0,\ v_0 > 0\ ,\ u_0 + v_0 < 1. \tag{4.5.5}$$

Припустімо, що точка M виявилася всередині трикутника, і перейдімо до наступної дії.
2. Щоб знайти напрямний вектор $\mathbf{q}'$ відбитого променя, скористаємося законами відбиття. Для цього уведемо вектор нормалі $\mathbf{N}$ до площини трикутника, виразивши його через напрямні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ цієї площини:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A). \tag{4.5.6}$$

Відповідно до законів відображення проекції напрямних векторів падаючого $\mathbf{q}$ і відбитого $\mathbf{q}'$ променів на нормаль відрізняються знаком, але збігаються за величиною, тобто:

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{N}}\, \mathbf{q}' \equiv \mathbf{q}'_{\parallel} = -\mathbf{q}_{\parallel}. \tag{4.5.7}$$

Поперечні ж до вектора $\mathbf{N}$ компоненти напрямних векторів однакові:

$$\mathbf{q}'_{\perp} = -\mathbf{q}_{\perp}. \tag{4.5.8}$$

Виходить, вектор $\mathbf{q}'$ можна записати в такому вигляді:

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}'_{\parallel} + \mathbf{q}'_{\perp} = -\mathbf{q}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\perp} = -\mathbf{q}_{\parallel} + \mathbf{q} - \mathbf{q}_{\parallel} = \mathbf{q} - 2\mathbf{q}_{\parallel} = \mathbf{q} - 2\frac{(\mathbf{N}\mathbf{q})}{\mathbf{N}^2}\mathbf{N}. \tag{4.5.9}$$

Це співвідношення, поряд з виразами (13.5.4)–(13.5.6) і системою (13.5.3), є розв'язком поставленої задачі.

Самостійно слід розібратися з випадком, у якому система (13.5.3) не має розв'язку.

Завдання до розділу 4

Усні питання для повторення матеріалу

1. Які з форм запису рівняння прямої виглядають однаково на площині й просторі?
2. Які форми запису рівняння прямої застосовні лише в прямокутних системах координат?
3. Скільки параметрів містить параметричне рівняння площини?
4. Які існують векторні форми запису рівняння площини?
5. Перерахуйте можливі способи розташування прямої і площини.

Контрольні задачі

1. Дано загальне рівняння прямої $2x+8y+4=0$. Одержіть з нього:
   а) рівняння прямої у відрізках;
   б) рівняння з кутовим коефіцієнтом;
   в) канонічне рівняння прямої;
   г) рівняння прямої, що проходить через дві точки.
2. Дано загальне рівняння площини $3x+1y+27z-9=0$. Одержіть з нього:
   а) рівняння площини у відрізках;
   б) рівняння площини, що проходить через три точки;
   в) канонічне рівняння площини;
   г) векторне параметричне рівняння площини.
3. В афінній системі координат дано трикутник ABC: $A=(a_x,a_y)$, $B=(b_x,b_y)$, $C=(c_x,c_y)$. Напишіть рівняння медіани цього трикутника, проведеної з вершини A. Розгляньте можливі розв'язки цієї задачі в прямокутній системі координат.
4. У прямокутній системі координат дано точку $A=(a_x,a_y,a_z)$. Напишіть рівняння:
   а) перпендикулярів, опущених із точки A на координатні площини;
   б) перпендикулярів, опущених із точки A на осі координат;
   в) написати рівняння площин, що проходять через точку A і перпендикулярних до осей координат.
5. Напишіть рівняння спільного перпендикуляра до двох перехресних прямих $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_{10}+\mathbf{q}_1u$ і $\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_{20}+\mathbf{q}_2v$.

Теми для індивідуальних науково-дослідних задач.

1. Розгляньте можливе розташування двох і трьох площин у просторі. Виразіть всі співвідношення в алгебраїчній формі.
2. Запропонуйте свої методи розбиття довільних поверхонь на трикутники, плоскі чотирикутники.

3. Дано промінь і паралелепіпед (прямокутний) у просторі. Визначить, чи перетинає промінь паралелепіпед і чому дорівнює довжина відрізка променя, що перебуває усередині паралелепіпеда.

Розділ 5. Лінії і поверхні

5.1. Рівняння лінії і поверхні.

Визначення рівняння лінії.

Рівняння $f(x, y) = 0$ називають рівнянням лінії, якщо йому задовольняють координати всіх точок цієї лінії і не задовольняють координати точок, що не належать цій лінії.

Визначення алгебраїчних ліній. Алгебраїчна лінія порядку N – це лінія, рівняння якої має вигляд полінома N -го порядку:

$$\sum_{i,j=0}^{i+j\le N} a_{ij}x^i y^j = 0.$$

Теорема про інваріантості порядку алгебраїчної лінії.

Під час лінійних перетворень координат порядок алгебраїчної лінії не змінюється.

Визначення циліндра.

Циліндр – це поверхня, утворена рівнобіжними прямими. Рівняння циліндра можна записати у вигляді рівняння $f(x, y) = 0$, у якому відсутня одна з координат.

Визначення конуса. Конус – це поверхня, утворена прямими, що проходять через одну точку – *вершину* конуса. Рівняння конуса можна записати у вигляді $f(x, y, z) = 0$, де $f(x, y, z)$ – однорідна функція.

Визначення поверхні обертання.

Поверхня обертання – це поверхня, утворена лінією в просторі під час її обертанні навколо заданої осі.

Якщо віссю обертання є вісь OZ, то рівняння поверхні обертання можна записати у вигляді $f(x^2 + y^2, z) = 0$

5.2. Короткі відомості про лінії і поверхні.

1. Рівняння лінії на площині:

$$f(x, y) = 0.$$

2. Рівняння поверхні в просторі:

$$f(x, y, z) = 0.$$

3. Рівняння лінії в просторі:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

4.Параметричне рівняння лінії:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

5. Параметричне рівняння поверхні:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v).$$

6. Рівняння циліндра:

$$f(x, y) = 0.$$

7. Рівняння конуса:

$$f(x, y, z) = 0, \text{ якщо } f(kx, ky, kz) = k^n f(x, y, z).$$

8. Рівняння поверхні обертання:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Завдання до розділу 5

Усні питання для повторення матеріалу

1. Що таке рівняння лінії?
2. Чому рівняння лінії на площині відрізняється від рівняння лінії в просторі?
3. Які види рівняння поверхні ви знаєте?
4. Чи обов'язково циліндр або конус є фігурами обертання?
5. Наведіть приклади відомих вам лінійчатих поверхонь.

Контрольні задачі

1. До якого з видів поверхонь: а) циліндр, б) конус, в) поверхня обертання – належать поверхні, рівняння яких мають вигляд:

   1) $x^2 + y^2 = 4$;
   2) $x^2 - y^2 = 9$;
   3) $x^3 - 2y^3 = 5z^3$;
   4) $x^2 = 2y$.

2. Який вигляд буде мати рівняння лінії в новій системі координат, що повернена щодо старої системи координат на кут 45°, якщо у вихідній системі рівняння лінії має вигляд $x^2 - y^2 = 2$?

3. Запропонуєте параметричний опис еліпса, спіралі й гвинтової лінії.

Теми для індивідуальних науково-дослідних задач

1. Дослідіть перетворення координат, під час яких змінюється порядок алгебраїчної лінії. Чому може дорівнювати визначник матриці таких перетворень? Чи можливі зворотні їм перетворення?
2. Дослідіть можливі лінійчаті поверхні, відмінні від площин, конусів і циліндрів. Окремо розгляньте гіперболоїд з однією порожниною і гіперболічний параболоїд.

Розділ 6. Основні лінії другого порядку

6.1. Парабола.

Визначення параболи. Парабола – це множина точок, які перебувають на однакових відстанях від заданої точки (фокуса) і заданої прямої (директриси).

Задача 6.1. Доведіть, що в параболи є тільки одна вісь симетрії.

6.2. Еліпс

Визначення еліпса. Еліпс – це множина точок, сума відстаней від яких до заданих точок (фокусів) є сталою величиною.

Визначення еліпса через директрису й ексцентриситет. Еліпс – це множина точок, для кожної з яких відношення відстані до заданої точки (фокуса) до відстані до заданої прямої (директриси) є сталою величиною і дорівнює ексцентриситету.

Задача 6.2. Знайдіть закон руху точки, максимально вилученої в обраному напрямку від фокуса еліпса за рівномірного його обертання навколо цього фокуса.

6.3. Гіпербола.

Визначення гіперболи. Гіпербола – це множина точок, різниця відстаней від яких до двох заданих точок (фокусів) є сталою величиною.

Визначення гіперболи через директрису й ексцентриситет. Гіпербола – це множина точок, для кожної з яких відношення відстані до заданої точки (фокуса) до відстані до заданої прямої (директриси) є сталою величиною і дорівнює ексцентриситету.

Теорема про визначення еліпса, параболи й гіперболи за допомогою директриси й ексцентриситету. Множина точок, для кожної з яких відношення відстані до заданої точки (фокуса) до відстані до заданої прямої (директриси) є сталою величиною і дорівнює ексцентриситету, являє собою

а) еліпс, якщо $e<1$;

б) параболу, якщо $e=1$;

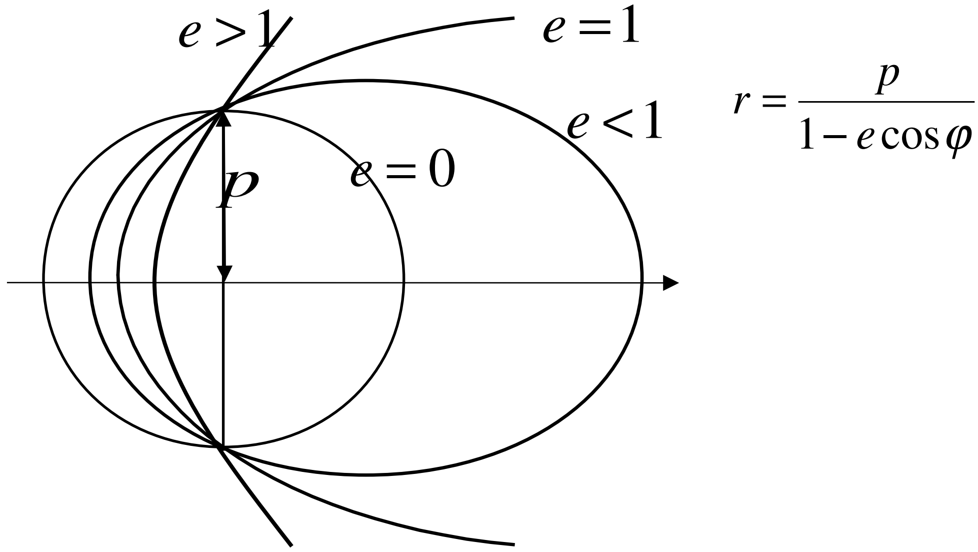
в) гіперболу, якщо $e>1$.

Окремому випадку $e=0$ відповідає окружність, $e=\sqrt{2}$ – рівнобічна

Задача 6.3. Яка лінія утворюється з гіперболи, якщо припустити, що фокуси гіперболи збіглися.

6.4. Загальні властивості еліпса, параболи й гіперболи

Полярне рівняння.



Рівняння при вершині. Така назва має на увазі, що це рівняння задане в системі відліку, центр якої збігається з вершиною лінії.

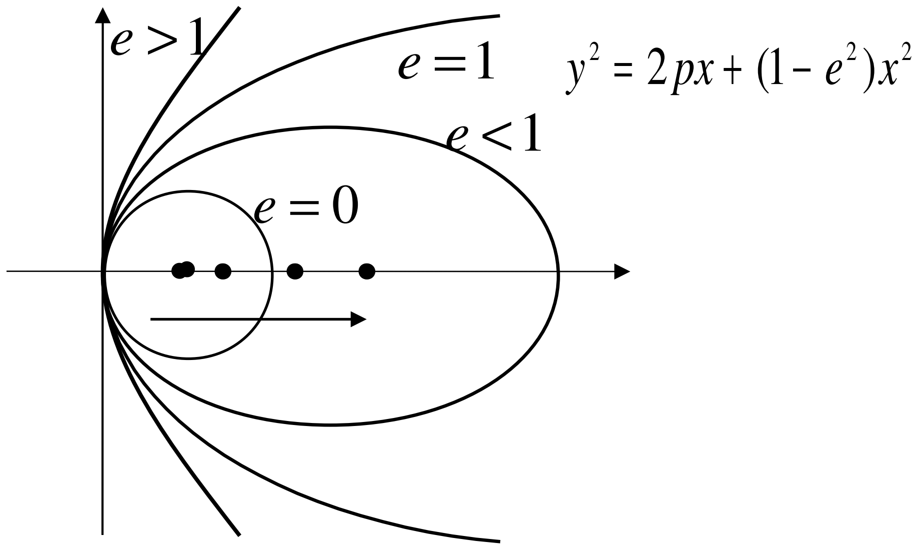


Рис. 6.1. Сімейство ліній другого порядку, які відповідають рівнянню при вершині для різних значень ексцентриситету. Стрілкою показано зсув одного з фокусів

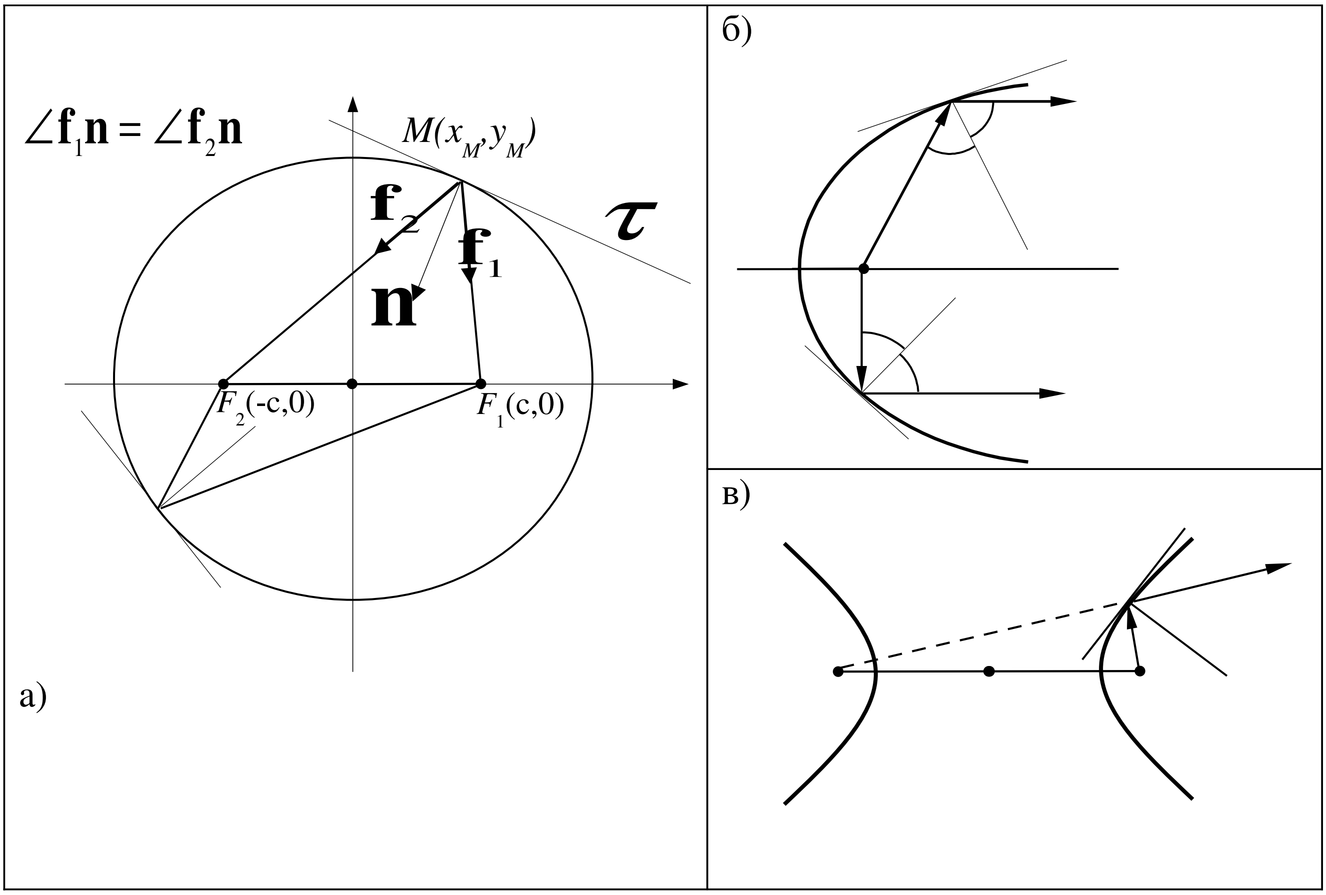
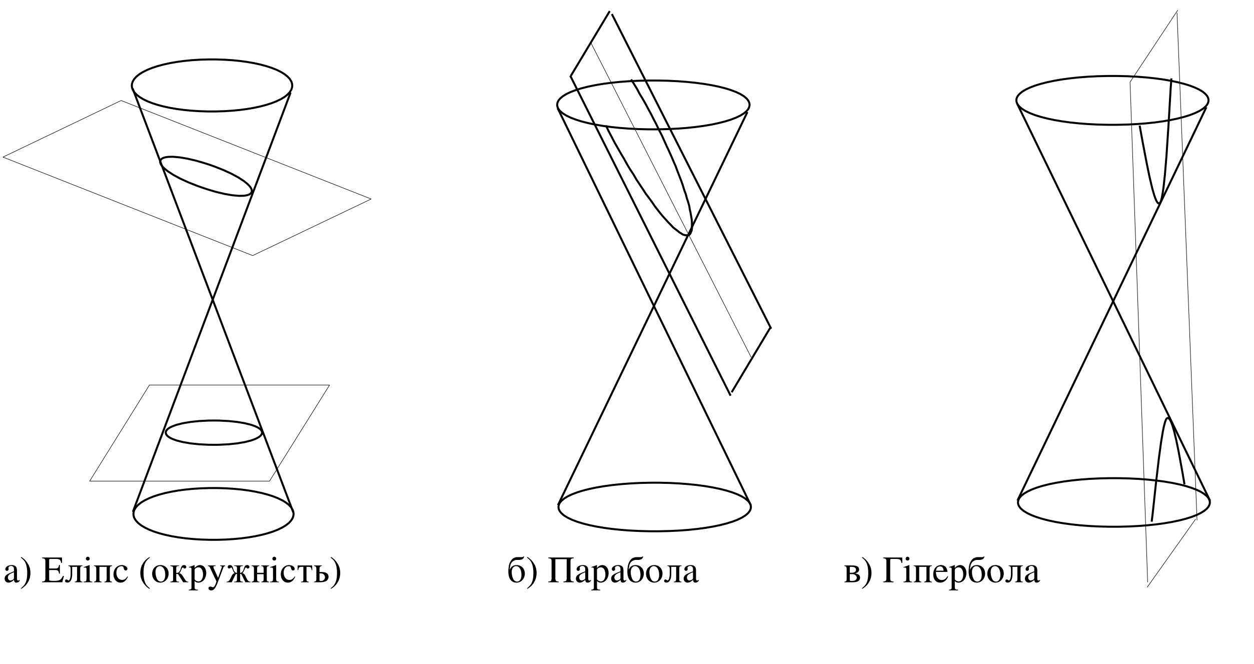


Рис. 6.2. Оптичні властивості а) еліпса, б) параболи та в) гіперболи

Конічні перетини.



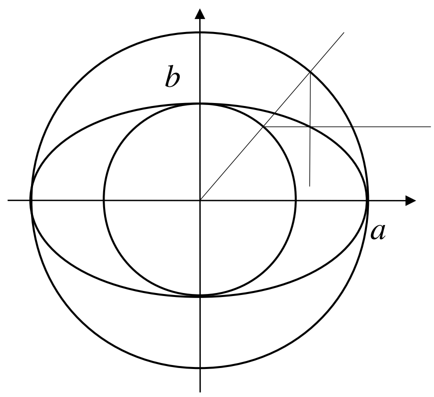
а) Еліпс (окружність) б) Парабола в) Гіпербола

Рис. 6.3 Перетини конуса

Задача 6.1. Рівняння кола в полярній системі відліку можна задати в параметричному вигляді

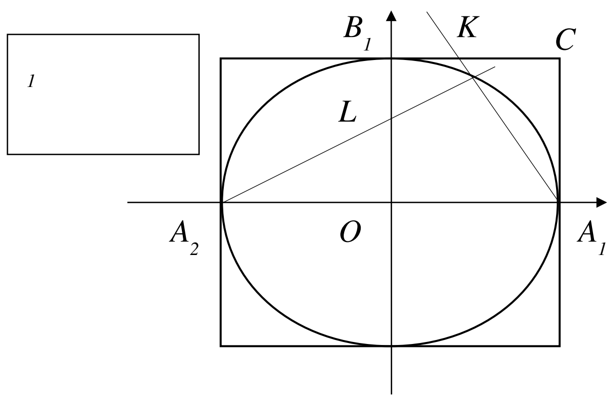
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases},$$

де величина кута відіграє роль параметра. Узагальніть такий опис на випадок еліпса. Поясніть за допомогою отриманої формули наступний метод побудови еліпса.



Для побудови еліпса з півосями a і b, будуємо два концентричні кола з центром у початку координат і радіусами, що дорівнюють рівними a і b відповідно. Потім з початків координат проводимо промінь. Далі з точки перетину променя з меншім колом проводимо горизонтальну пряму. А через точку перетину променя з більшим колом проводимо вертикальну пряму. Точка перетину цих прямих лежить на еліпсі.

Задача 6.2. Розгляньте ще один зі способів побудови еліпса в нарисній геометрії. Переконайтеся самостійно в його справедливості.



Проведемо з точки A_2 пряму так, щоб вона поділяла відрізок OB_1 у заданому відношенні. З точки A_1 проведемо пряму, що поділяє в цьому ж відношенні відрізок CB_1. Тоді точка перетину цих прямих виявиться на еліпсі з півосями OA_1 і OB_1.

Задача 6.3. Покажіть, що рівняння при вершині можна одержати прямо з визначення еліпса, параболи й гіперболи через директрису й ексцентриситет.

Задача 6.4. Виведіть полярне рівняння для другої гілки гіперболи.

Задача 6.5. Чи можна за допомогою куль Данделена (або аналогічним способом) довести, що парабола є конічним перетином.

Завдання до розділу 6

Усні питання для повторення матеріалу

1. Що таке півосі еліпса?
2. Яке геометричне значення має ексцентриситет еліпса?
3. Чому дорівнює відстань між гілками гіперболи?
4. Чому говорять, що парабола росте повільніше за будь-яку пряму?
5. Яка з ліній другого порядку: а) замкнута, б) незамкнута, в) має дві гілки?
6. Під час обертання якої з ліній другого порядку виходить поверхня, що використовують в антенах і телескопах?
7. Чи може пряма лінія тричі перетинати гіперболу?

Контрольні задачі

1. Дано лінію другого порядку

а) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

б) $x^2=8y$;

в) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{1}=1$.

Визначить величину ексцентриситету цих ліній і координати їхніх фокусів.
2. Визначить радіус і координати центра окружності $x^2+2x+y^2-6y=9$.
3. Визначить півосі і координати фокусів еліпса $x^2-4x+2y^2+12y=18$.
3. Складіть рівняння лінії другого порядку, осі якої збігаються з осями координат, знаючи, що вона проходить через точки $A=(a_x,a_y)$, $B=(b_x,b_y)$.
4. Знайдіть найбільший радіус кола, що лежить усередині параболи і торкається параболи в її вершині. Запропонуйте принаймні два різних розв'язки .
5. Побудуйте за допомогою олівця, лінійки, ниток і котушок (і т. п.) еліпс, параболу й гіперболу.

Теми для індивідуальних науково-дослідних задач

1. Дослідіть рух масивного тіла в гравітаційному полі. Виведіть рівняння можливих траєкторій руху в канонічному вигляді.
2. Запропонуйте параметричні рівняння для ліній другого порядку. Розгляньте різні види параметризації.
3. У домашніх умовах дзеркало для телескопа-рефлектора можна одержати, обертаючи судину, у який повільно застигає епоксидний клей. Яким чином при цьому одержати дзеркало із заданою фокусною відстанню?

4. Іноді говорять, що ковзанярі заточують ковзани «по параболі». Чи правда це і яка можлива причина цього?

Розділ 7. Загальна теорія ліній другого порядку

7.1. Загальне рівняння ліній другого порядку.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Рівнобіжний перенос не змінює старших членів рівняння другого порядку.

Під час повороту старші члени виражаються через старші члени у вихідній системі, а молодші – через молодші члени. Неоднорідність, або вільний член, під час повороту не змінюється.

7.2. «Стандартне» спрощення рівняння лінії другого порядку. Поворот системи координат.

Кут повороту до приведеної системи координат $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$.

Рівняння для координат центру лінії центрального типу

$$\begin{cases} a_{11}X_0 + a_{12}Y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}X_0 + a_{22}Y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}.$$

Наведені рівняння ліній другого порядку

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$	Еліптичний і гіперболічний тип.
$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$	Параболічний тип (парабола).
$a_{22}y^2 + a_{33} = 0$	Параболічний тип (дві паралельні прямі).

1. *Інваріанти ліній другого порядку.*

Теорема про інваріанти лінії другого порядку. Під час поворотів і (або) паралельних перенесеннь не змінюється значення таких функцій коефіцієнтів загального рівняння заданої лінії другого порядку.

$$I_1 = Sp\|a_{ij}\|, \text{ де } i, j = 1, 2;$$

$$I_2 = \det\|a_{ij}\|, \text{ де } i, j = 1, 2;$$

$$I_3 = \det\|a_{ij}\|, \text{ де } i, j = 1, 2, 3.$$

Теорема про напівінваріант лінії другого порядку. Функція K коефіцієнтів загального рівняння заданої лінії другого порядку

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

є інваріантом під час поворотів, а для ліній, у яких другий і третій інваріанти дорівнюють нулю $I_2 = 0$ и $I_3 = 0$, функція K інваріантна й під час паралельних перенесеннь.

Таблиця 7.1. Класифікація ліній гіперболічного типу

Гіперболічний тип: $I_2 < 0$	
$I_3 \neq 0$	$I_3 = 0$
Гіпербола	Пари перетин них прямих
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

Таблиця 7.2 Класифікація ліній еліптичного типу.

Еліптичний тип: $I_2 > 0$		
$I_1 I_3 < 0$	$I_1 I_3 = 0$	$I_1 I_3 > 0$
Еліпс	Точка (пари уявних перетин них прямих)	Уявний еліпс
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

Таблиця 7.3. Класифікація ліній параболічного типу.

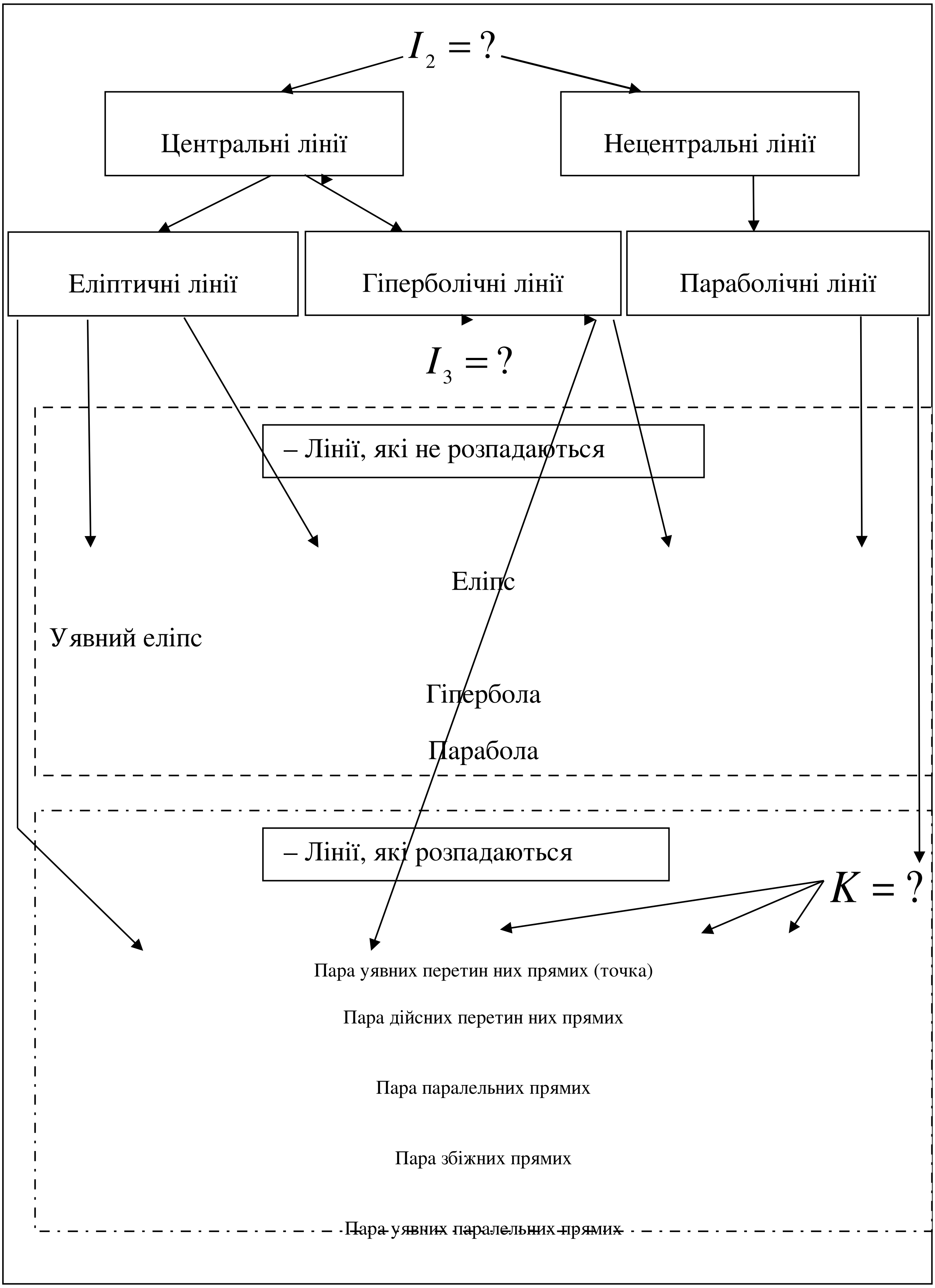
Параболічний тип: $I_2 = 0$			
$I_3 \neq 0$	$I_3 = 0$		
Парабола	Рівнобіжні прямі		
$y^2 = 2px$	$K < 0$	$K = 0$	$K > 0$
	Дійсні	Збіжні	Уявні
	$y^2 = h^2$	$y^2 = 0$	$y^2 = -h^2$

7.3. Підсумкова класифікація ліній другого порядку.

N			Тип		Назва лінії	Рівняння
1	Центральні $I_2 \neq 0$	$I_2 > 0$	Еліптичний	$I_3 I_1 < 0$	Еліпс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2				$I_3 = 0$	Точка (пара уявних прямих, які перетинаються)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
3				$I_3 I_1 > 0$	Уявний еліпс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
4			Гіперболіч	$I_3 \neq 0$	Гіпербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

5		$I_2 < 0$	ний	$I_3 = 0$		Пара перетинних прямих	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
6	Нецентральні	$I_2 = 0$	Параболічний	$I_3 \neq 0$		Парабола	$y^2 = 2px$
7				$I_3=0$	K<0	Пара паралельних прямих	$y^2 = h^2$
8					K=0	Пара збіжних прямих	$y^2 = 0$
9					K>0	Пара паралельних уявних прямих	$y^2 = -h^2$

7.4. Алгоритм визначення виду лінії другого порядку за допомогою інваріантів



7.5. Визначення параметрів лінії другого порядку.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

1. Еліпс й гіпербола.

Координати центра: $\begin{cases} a_{11}X_0 + a_{12}Y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}X_0 + a_{22}Y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$

Корені характеристичного рівняння: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(I_1 \pm \sqrt{D}\right)$.

Дискримінант $D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = I_1^2 - 4I_2$.

Кут повороту ($S = \pm 1$): $\cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{D}} S$, $\sin 2\varphi = \frac{2a_{12}}{\sqrt{D}} S$,

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}} sign(\sin 2\varphi),\ \sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}.$$

Дійсний та уявний еліпс: $S = -sign\, I_1$.

Півосі: $a^2, b^2 = \frac{|I_3|}{2I_2^2}\left(|I_1| \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2}\right)$.

Гіпербола: $S = sign\, I_3$.

Півосі: $a^2, b^2 = \mp\frac{I_3}{I_2^2}\lambda^{(\mp)}$, де $sign(\lambda^{(\pm)} I_3) > 0$.

2. Перетинні прямі (діагоналі основного прямокутника)**.**

$\left(a_{12} \pm \sqrt{-I_2}\right)(x - X_0) + a_{22}(y - Y_0) = 0$ або $a_{11}(x - X_0) + \left(a_{12} \pm \sqrt{-I_2}\right)(y - Y_0) = 0$.

3. Паралельні прямі.

$$\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \pm \sqrt{-\frac{K}{I_1^2}} = 0 \text{ або } \frac{a_{12}x + a_{22}y + a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}} \pm \sqrt{-\frac{K}{I_1^2}} = 0.$$

4. Парабола.

Параметр: $p = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}}$.

Кут повороту:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11} + a_{22}}} sign\left(a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}\right);\ \sin\varphi = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{11} + a_{22}}} sign\left(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{12}\right).$$

Вісь параболи

$$a_{11}x + a_{12}y = \frac{a_{13}a_{11} + a_{23}a_{12}}{I_1}, \text{ або } a_{12}x + a_{22}y = \frac{a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22}}{I_1}.$$

Вершину визначають як точку перетину параболи з її віссю.

5. Осі координат канонічної системи відліку

Вісь абсцис: $(x - X_0)\sin\varphi - (y - Y_0)\cos\varphi = 0$.

Вісь ординат: $(x - X_0)\cos\varphi + (y - Y_0)\sin\varphi = 0$.

У рівнобіжних прямих визначена тільки вісь абсцис одним з рівнянь:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \text{ або } a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0.$$

Задача 7.1. Виведіть цей інваріантний вираз для ексцентриситету лінії другого порядку:

$$e = \frac{2\sqrt{D}}{I_1 + \sqrt{D}} = 1 - \frac{I_1 - \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{I_1 - \sqrt{I_1^2 + 4I_2}}.$$

Задача 7.2. Виведіть цей інваріантний вираз для площини еліпса:

$$S = \pi\sqrt{\frac{I_3^2}{I_2^3}}.$$

Завдання до розділу 7.

Усні питання для повторення матеріалу

1. Що таке приведене рівняння лінії?
2. Що таке характеристичне рівняння?
3. Скільки існує видів ліній другого порядку?
4. Що таке лінії, які розпадаються?
5. Що таке центр лінії другого порядку?

Контрольні задачі

1. Використовуючи тільки паралельне перенесення, визначить тип лінії другого порядку і її розташування щодо вихідної системи координат

$$5x^2 + 7y^2 - 30x + 14y - 35 = 0.$$

2. Визначить тип лінії і напишіть її канонічне рівняння

$$x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 5 = 0.$$

3. За яких значень інваріантів лінія другого порядку є

а) колом; б) дійсним еліпсом; в) двома перпендикулярними прямими?

4. Лінію другого порядку визначають рівнянням

$$x^2 + y^2 + \lambda(x + y) - 1 = 0.$$

Визначте тип лінії за зміною параметра λ від $-\infty$ до $+\infty$ і знайдіть її розташування щодо даної системи координат.

5. Визначить зв'язок між інваріантами двох сполучених гіпербол.

Теми для індивідуальних науково-дослідних задач.

1. Побудова лінії другого порядку.

– Виходячи з заданого рівняння лінії другого порядку, обчисліть інваріанти лінії, визначте її тип і всі параметри.

– Побудуйте лінію другого порядку виходячи з заданого рівняння другого порядку. Проведіть, за необхідністю, стандартне перетворення, рівнобіжне перенесення в канонічну систему відліку. Побудуйте канонічну систему координат, саму лінію. Укажіть фокуси, директриси, вершини, основний прямокутник й асимптоти.

2. Випадково в інтервалі від $-L$ до L вибирають кожний з коефіцієнтів рівняння лінії другого порядку. З якою відносною частотою таке рівняння буде описувати ту або іншу лінію другого порядку?

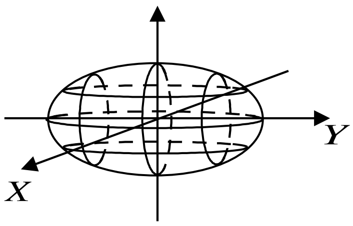
3. Визначить можливість одержання простого рівняння для визначення координат вершини параболи.

Розділ 8. Поверхні другого порядку

Короткі відомості про поверхні другого порядку.

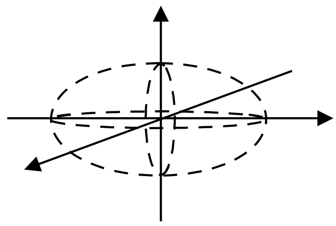
Дійсний еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



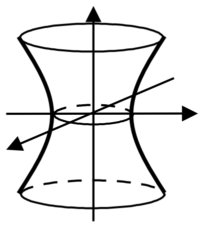
Уявний еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$



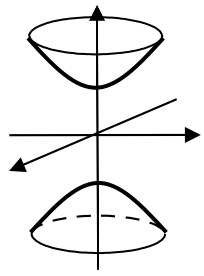
Гіперболоїд з однією порожниною

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



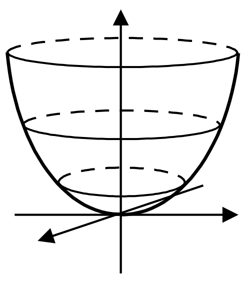
Гіперболоїд з двома порожнинами

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



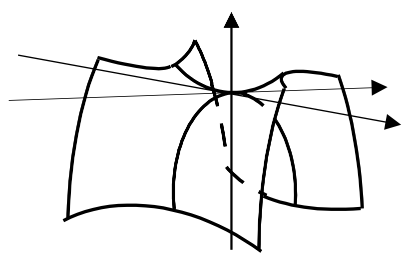
Еліптичний параболоїд

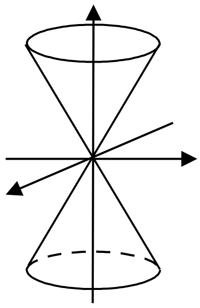
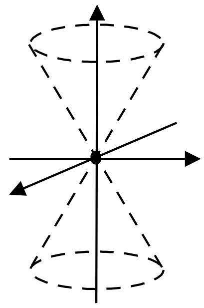
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$



Гіперболічний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$



Дійсний конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 	Уявний конус (точка) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ 

Дев'ять циліндрів, що відповідають
дев'ятьом лініям другого порядку.

Задача. 8.1. Покажіть, що еліпсоїд можна одержати, стискаючи в одному з напрямків *еліпсоїд обертання* – фігуру обертання, отриману з еліпса.

Задача. 8.2. Покажіть, що гіперболоїд з однією порожниною є лінійчатою поверхнею.

Задача. 8.3. Запропонуйте практичний спосіб, що дозволяє визначити положення фокуса колової параболічної антени.

Завдання до розділу 8.

Усні питання для повторення матеріалу

1. Перелічіть циліндричні поверхні другого порядку.
2. Назвіть обмежені речовинні поверхні другого порядку.
3. Які конічні поверхні другого порядку ви знаєте?
4. Яким чином зі сфери можна одержати еліпсоїд?
5. Перелічіть поверхні другого порядку, які розпадаються.
6. Які з поверхонь другого порядку не можуть бути фігурами обертання?
7. Наведіть приклад поверхні другого порядку, що виродилася в пряму лінію, у точку.

Контрольні задачі

1. Визначте координати центра і знайдіть радіус сфери

$$x^2+y^2+z^2+2x-8y+12z-8=0.$$

2. Використовуючи паралельне перенесення, визначте тип і місце розташування поверхні другого порядку

$$2x^2+y^2+8z^2+16x-8y+64z-32=0.$$

3. Визначте можливі перетини колового параболоїда

$$x^2+y^2=z$$

і сфери

$$x^2+y^2+(z-H)^2=R^2,$$

залежно від радіуса сфери R і висоти її центра H .

Теми для індивідуальних науково-дослідних задач.

1. Дослідить оптичні властивості поверхонь другого порядку. Якими вони будуть, наприклад, в еліптичного параболоїда?

2. За аналогією до ліній другого порядку побудуйте алгоритм визначення типу поверхні другого порядку за допомогою інваріантів.