КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Задачи для практических занятий (6 семестр)

Задачи по квантовой механике. В.М.Галицкий, Б.М.Карнаков, В.И.Коган. 1981.

Квантовая механика. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.1989.

Основные понятия теории линейных операторов

1.1. Рассмотреть следующие операторы ($-\infty < x < +\infty$):
а) отражения $\hat{I}$: $\hat{I}\Psi(x) = \Psi(-x)$;
б) сдвига $\hat{T}_a$: $\hat{T}_a\Psi(x) = \Psi(x+a)$;
в) изменения масштаба $\hat{M}_c$: $\hat{M}_c\Psi(x) = \sqrt{c}\Psi(cx),\ c > 0$;
г) комплексного сопряжения $\hat{K}$: $\hat{K}\Psi(x) = \Psi^*(x)$.
Являются ли эти операторы линейными? Найти вид операторов, которые по отношению к указанным являются: транспонированными, комплексно сопряженными, эрмитово сопряженными, обратными.

1.2. Для указанных ниже операторов найти операторы, которые по отношению к ним являются транспонированными, комплексно сопряженными, эрмитово сопряженными:
а) $id/dx, -\infty < x < +\infty$;
б) $i\partial/\partial r$, r - радиальная переменная сферической системы координат ($0 \le r < \infty$).

1.3. Для произвольного линейного оператора $\hat{L}$ показать следующее:
а) $(\hat{L}^+)^+ = \hat{L}$;
б) операторы $\hat{L}^+\hat{L}$ и $\hat{L}\hat{L}^+$ являются эрмитовыми.
в) операторы $\hat{L} + \hat{L}^+$ и $i(\hat{L} - \hat{L}^+)$ эрмитовы.

1.4. Показать, что если оператор $\hat{C}$ эрмитов, то оператор $\hat{G} = \hat{A}\hat{C}\hat{A}^+$ также является эрмитовым.

1.5. Показать, что произвольный оператор $\hat{F}$ можно представить в виде $\hat{F} = \hat{A} + i\hat{B}$, где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ - эрмитовы операторы.

1.6. Показать, что если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ - эрмитовы, то операторы $\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}$ и $i(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})$ также эрмитовы.

1.8. Показать, что при алгебраических действиях с коммутаторами справедлив закон дистрибутивности, т.е. что коммутатор суммы равен сумме коммутаторов:
$\left[\sum\limits_i \hat{A}_i,\ \sum\limits_k \hat{B}_k\right] = \sum\limits_{i,k} [\hat{A}_i,\ \hat{B}_k]$.

1.9. Даны три оператора $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. Выразить коммутатор произведения $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{C}$ через коммутаторы $[\hat{A}, \hat{C}]$ и $[\hat{B}, \hat{C}]$.

1.10. Доказать тождество Якоби для коммутаторов операторов $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$:
$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$.

1.12. Оператор $\hat{F}$ вида $\hat{F} = F(\hat{f})$, где $F(z)$ -некоторая функция переменной z, представимая в виде ряда $F(z) = \sum\limits_n c_n z^n$, можно понимать как оператор, равный $\hat{F} = \sum\limits_n c_n \hat{f}^n$. Используя это определение найти явный вид следующих операторов:
а) $\exp(i\pi\hat{I})$;
б) $\hat{T}_a = \exp\left(a\frac{d}{dx}\right)$
(оператор $\hat{I}$ определен в 1.1).

1.13. Предполагая λ малой величиной, найти разложение оператора $(\hat{A}-\lambda\hat{B})^{-1}$ по степеням λ.

1.14. Доказать следующее соотношение:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + ...$$

1.15. В общем случае линейный оператор $\hat{L}$ можно рассматривать как линейный интегральный оператор, т.е. $\Phi(\xi) \equiv \hat{L}\Psi(\xi) \equiv \int L(\xi, \xi')\Psi(\xi')d\xi'$, где $L(\xi, \xi')$ -ядро оператора $\hat{L}$ (ξ – совокупность переменных используемого представления). Как ядра операторов $\hat{L}^*$, $\tilde{\hat{L}}$, $\hat{L}^+$ связаны с ядром

$L(\xi, \xi')$ оператора $\hat{L}$? Найти ядра операторов $\hat{I}, \hat{M}_c, \hat{T}_a, \quad \hat{x} \equiv x, \quad \hat{p} \equiv -i\hbar d/dx$. Операторы $\hat{I}, \hat{M}_c, \hat{T}_a$ определены в 1.1.

Собственные функции, собственные значения, средние

1.19. В состоянии, описываемом волновой функцией вида $\Psi(x) = C \exp\left[\frac{ip_0 x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right]$, где p_0, x_0, a – вещественные параметры, найти функцию распределения по координатам частицы. Определить средние значения и флуктуации координаты и импульса частицы.

1.20. Волновая функция состояния частицы имеет вид $\Psi(x) = C\exp(ip_0 x/\hbar)\varphi(x)$, $\varphi(x)$ -вещественная функция. Показать, что p_0 – средний импульс частицы в рассматриваемом состоянии.

1.22. Показать, что средние значения эрмитовых операторов $\hat{L}^+\hat{L}$ и $\hat{L}\hat{L}^+$ ($\hat{L}$ – некоторый линейный оператор) в произвольном состоянии неотрицательны.

1.23. Показать, что собственные значения оператора квадрата любой физической величины неотрицательны.

1.24. Эрмитов оператор $\hat{f}$ удовлетворяет соотношению $\hat{f}^2 = c\hat{f}$, где c - некоторое вещественное число. Каковы собственные значения такого оператора?

1.25. Найти собственные функции и собственные значения физической величины, представляющей линейную комбинацию одноименных компонентов импульса и координаты: $\hat{f} = \alpha\hat{p}+\beta\hat{x}$. Убедиться в ортогональности полученных функций и нормировать их соответствующим образом. Рассмотреть предельные случаи: $\alpha \to 0; \beta \to 0$.

1.27. Эрмитов оператор (матрица) $\hat{f}$ имеет N различных собственных значений. Показать, что оператор $\hat{f}^N$ линейно выражается через операторы $\hat{1}, \hat{f}, ..., \hat{f}^{N-1}$. В качестве примера рассмотреть оператор отражения (инверсии) $\hat{I}$.

1.29. Эрмитовы операторы $\hat{A}, \hat{B}, \hat{L}$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям: $[\hat{A}, \hat{L}] = 0, [\hat{B}, \hat{L}] = 0, [\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$. Показать, что среди собственных значений оператора $\hat{L}$ обязательно есть вырожденные.

1.31. В состоянии квантовомеханической системы, описываемом волновой функцией Ψ_A, физическая величина A имеет определенное значение. Имеет ли в этом состоянии определенное значение также величина B в случаях, если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$:

а) не коммутируют;

б) коммутируют ?

Одномерное движение

2.3. Найти функцию распределения по координатам и импульсам, средние значения этих величин и их флуктуации для стационарных состояний частицы, находящейся в бесконечно глубокой потенциальной яме

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \infty, & x < 0, \quad x > a. \end{cases}$$

2.4. Состояние частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a $(0 < x < a)$ описывается волновой функцией вида:

а) $\Psi(x) = Ax(x-a)$;

б) $\Psi(x) = B\sin^2(\pi x/a)$.

Найти распределение вероятностей различных значений энергии частицы, средние значения и средние квадратичные флуктуации энергии.

2.6. Найти изменения энергетических уровней и волновых функций стационарных состояний заряженного линейного осциллятора при наложении на него однородного электрического поля, направленного вдоль оси колебаний.

2.20*. Для частицы в поле $U(x)$ вида

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ 0, & 0 < x < a, \\ U_0, & x > a, \end{cases}$$

найти условие существования состояний дискретного спектра. Рассмотреть предельный случай $U_0 = \infty$.

Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. – М.: Наука, 1989. Стр. 90, N 2. Определить уровни энергии для частицы в поле $U(x)$ вида

$$U(x) = \begin{cases} U_1, & x < 0, \\ 0, & 0 < x < a, \\ U_2, & x > a, \end{cases}$$

2.11. Найти уровни энергии и нормированные волновые функции состояний дискретного спектра частицы в поле $U(x) = -\alpha\delta(x), \quad \alpha > 0$. Найти средние значения кинетической и потенциальной энергий в этих состояниях.

2.22. Частица находится в бесконечно глубокой потенциальной яме. Вычислить среднюю силу, с которой частица действует на каждую из стенок ямы в стационарных состояниях. Сравнить с результатом классической механики.

2.44. Найти волновые функции стационарных состояний частицы в поле

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0, & x > 0 \quad (U_0 > 0), \end{cases}$$

для случая, когда энергия частицы E меньше высоты потенциальной стенки U_0. Убедиться в ортогональности полученных функций и нормировать их на δ-функцию по энергии. Образуют ли полученные функции полную систему?

2.46. Определить коэффициент отражения частиц от потенциальной стенки из 2.44 при энергии $E > U_0$. Рассмотреть предельные случаи $E \to \infty$ и $E \to U_0$.

2.54. Показать, что для барьера произвольной формы автоматически выполняется соотношение $R(E) + D(E) = 1$, где R – коэффициент отражения, D – коэффициент прохождения частиц.

2.55. Показать, что для барьера произвольной формы коэффициенты прохождения и отражения частиц с данной энергией E не зависят от того, с какой стороны частицы налетают на барьер.

Момент импульса

3.2. Дать простую интерпретацию коммутативности операторов проекций импульса и некоммутативности операторов проекций момента импульса, исходя из кинематического смысла этих операторов, связанного с бесконечно малыми переносами и поворотами.

3.3. Показать, что равенство $\mathbf{L^2} = l(l+1)$ получается с помощью элементарных формул теории вероятностей, исходя из того, что возможные проекции момента на произвольную ось равны m $(m = -l, -l+1, ...l)$ и все эти значения проекции момента равновероятны, а оси равноправны.

3.4. Найти следующие коммутаторы:
а) $[\hat{L}_i, \mathbf{\hat{r}^2}]$, $[\hat{L}_i, \mathbf{\hat{p}^2}]$, $[\hat{L}_i, (\mathbf{\hat{p}\hat{r}})]$, $[\hat{L}_i, (\mathbf{\hat{p}\hat{r}})^\mathbf{2}]$;
б)$[\hat{L}_i, (\mathbf{\hat{p}\hat{r}})\mathbf{\hat{p}}]$, $[\hat{L}_i, (\mathbf{\hat{p}\hat{r}})\mathbf{\hat{r}}]$, $[\hat{L}_i, (a\mathbf{\hat{r}} + b\mathbf{\hat{p}})]$;
в) $[\hat{L}_i, \hat{x}_k\hat{x}_i]$, $[\hat{L}_i, \hat{p}_k\hat{p}_i]$, $[\hat{L}_i, \hat{x}_k\hat{p}_i]$,
где $\mathbf{\hat{r}}$, $\mathbf{\hat{p}}$, $\mathbf{\hat{L}}$ – операторы радиуса-вектора, импульса и момента импульса частицы; a и b – постоянные величины.

3.6. Используя коммутационные соотношения для оператора момента, найти Sp $\hat{L}_i$, где $\hat{L}_i$ – матрица i-го компонента момента $\mathbf{\hat{L}}$.

3.7. Представить оператор момента системы двух частиц в виде двух слагаемых, описывающих момент частиц в с.ц.м. (момент относительного движения) и момент центра масс системы.

3.12. Показать, что в состоянии Ψ_m с определенным значением m проекции момента на ось z выполняются соотношения:
а) $<\hat{l}_x> = <\hat{l}_y> = 0$;
б) $<\hat{l}_x\hat{l}_y> = -<\hat{l}_y\hat{l}_x> = im/2$
в) $<\hat{l}_x^2> = <\hat{l}_y^2>$.

3.13. В состоянии Ψ_{lm} с определенными значениями момента l и его проекции m на ось z найти средние значения $< \hat{l}_x^2 >, < \hat{l}_y^2 >$.

3.15. В состоянии частицы, характеризующемся угловой зависимостью волновой функции вида $\Psi = A\cos^n\varphi$ (φ – угол поворота относительно некоторой оси z, n – целое число) найти вероятности различных значений m проекции момента на ось z.

3.20. Показать, что из $[\hat{L}_i, \hat{f}] = 0$ для оператора физической величины $\hat{f}$ следует, что матричный элемент вида

$$< n, L, M'|\hat{f}|n, L, M >$$

(где n - означает набор квантовых чисел, которые вместе с L и M образуют полный набор) отличны от нуля лишь при $M' = M$ и при этом не зависят от M.

3.26. Указать в l_z - представлении явный вид операторов компонент момента, повышающего $\hat{l}_+$ и понижающего $\hat{l}_-$ операторов для момента $l = 1$. Каков вид операторов $\hat{l}_\pm^3$?

3.30. Найти явный вид оператора $\hat{R}(\vec{\alpha})$ поворота системы координат на угол $\vec{\alpha}$, действующего в пространстве состояний частицы с моментом $l = 1$.

3.34. Моменты l_1 и l_2 двух слабо взаимодействующих систем складываются в результирующий момент величины L. Показать, что в таких состояниях (с определенным значением L) скалярные произведения $\hat{\vec{l}}_1 \cdot \hat{\vec{l}}_2$, $\hat{\vec{l}}_1 \cdot \hat{\vec{L}}$, $\hat{\vec{l}}_2 \cdot \hat{\vec{L}}$ также имеют определенные значения.

3.35. Каков спектр физической величины, представляющей собой квадрат векторного произведения двух моментов l_1 и l_2?

3.37. Имеются две слабо взаимодействующие системы 1 и 2, состояния которых характеризуются квантовыми числами (l_1, m_1) и (l_2, m_2) момента и его проекции на ось z. Найти средние значения $\hat{\vec{L}}$ и $\hat{\vec{L}}^2$ полного момента совокупной системы (1 + 2).

3.38. В условиях предыдущей задачи вычислить вероятности различных значений суммарного момента L для частного случая $m_1 = l_1, m_2 = l_2 - 1$.

Движение в центральном поле

4.28. В основном состоянии водородоподобного атома (иона) найти для электрона величину $< r^n >$.

4.29. Найти эффективный (средний) потенциал $\varphi(r)$, действующий на заряженную частицу, пролетающую сквозь невозбужденный атом водорода (пренебрегая поляризуемостью последнего). Получить предельные значения $\varphi(r)$ для больших и малых расстояний частицы от атома.

4.31. Найти среднее электрическое поле и его флуктуацию (флуктуацию компонентов поля) на больших расстояниях от атома водорода, находящегося в основном состоянии. Обратить внимание на характер убывания найденных величин с увеличением расстояния.

4.33. Найти уровни энергии $E_{n_r l}$ и волновые функции $\Psi_{n_r lm}$ стационарных состояний частицы в бесконечно глубокой сферической яме

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r \le a, \\ \infty, & r > a. \end{cases}$$

Изменение состояний во времени

7.1. Вывести правило дифференцирования по времени произведения двух операторов.

7.4. Показать, что среднее значение производной по времени физической величины, не зависящей явно от времени, в стационарном состоянии дискретного спектра равно нулю.

7.10. Состояние частицы, находящейся в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме ширины a $(0 < x < a)$ в начальный момент времени имеет вид $\Psi(x, t = 0) = A\sin^3\frac{\pi x}{a}$. Найти волновую функцию в произвольный момент времени. Показать, что через некоторое время T частица возвращается в исходное состояние.

7.13. Состояние свободной частицы в момент времени $t = 0$ описывается волновой функцией вида $\Psi(x, t = 0) = A\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + \frac{imv_0x}{\hbar}\right)$. Найти изменение состояния частицы во времени и следующие средние:
$< x(t) >, < p(t) >, < (\Delta x(t))^2 >, < (\Delta p(t))^2 >$.

7.29. Найти операторы координаты и импульса в гайзенберговском представлении для свободной частицы. Задачу предлагается решить двумя способами:
а) используя унитарное преобразование, связывающее операторы физических величин в гайзенберговском и шредингеровском представлениях;
б) непосредственным решением уравнений движения для гайзенберговских операторов.

Теория возмущений

8.1. Для частицы, находящейся в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины a ($0 < x < a$), найти в первом порядке теории возмущений смещение энергетических уровней под действием возмущения вида:

$$a)\ V(x) = \frac{V_0}{a}(a - |2x - a|);\quad b)\ V(x) = \begin{cases} V_0, & b < x < a - b, \\ 0, & 0 < x < b, \quad a - b < x < a. \end{cases}$$

Указать условия применимости полученного результата.

8.3. На заряженный линейный осциллятор наложено однородное электрическое поле $\mathcal{E}$, направленное вдоль оси колебаний. Рассматривая действие электрического поля как возмущение, рассчитать в первых двух порядках теории возмущений сдвиг энергетических уровней осциллятора. Полученный результат сравнить с точным решением.

8.4. Представим гамильтониан осциллятора в виде $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x^2}{2}$. Рассматривая формально слагаемое $\alpha x^2/2$ как возмущение, рассчитать в первых двух порядках теории возмущений сдвиг энергетических уровней осциллятора. Ответ сравнить с точным решением. Каково условие сходимости ряда теории возмущений?

8.13. Найти расщепление первого возбужденного уровня энергии плоского гармонического осциллятора под действием возмущения вида $V = \alpha xy$ (плоскость x, y – плоскость колебаний) в первом порядке теории возмущений. Указать правильные функции нулевого приближения. Сравнить с точным решением.

Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. – М.: Наука, 1989.
Стр. 170, N 1. Определить поправку второго приближения $\psi_n^{(2)}$ к собственным функциям невырожденного дискретного спектра.

Стр. 170, N 2. Определить поправку третьего приближения $E_n^{(3)}$ к собственным значениям энергии невырожденного дискретного спектра.

Стр. 170, N 3. Определить уровни энергии ангармонического линейного осциллятора, гамильтониан которого имеет форму

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4.$$

Стр. 175, N 1. Определить поправки первого приближения к собственному значению энергии и правильные волновые функции нулевого приближения для двукратно вырожденного уровня.

Стр. 175, N 2. Вывести формулы для поправок первого приближения к собственным функциям и второго приближения для собственных значений в случае, рассмотренном в предыдущей задаче.

Квазиклассическое приближение

9.16. Исходя из правила квантования Бора-Зоммерфельда, получить выражение для смещения энергетических уровней частицы при изменении потенциальной энергии на малую величину $\delta U(x)$. Показать, что результат согласуется с полученным в первом порядке стационарной теории возмущений.

9.27. Оценить в квазиклассическом приближении коэффициент прозрачности барьера вида

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0\ (1 - x/a), & x > 0. \end{cases}$$

Какова точность полученного результата?

9.28. То же, что и в предыдущей задаче, для барьера вида

$$U(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ U_0\exp\ (-x/a), & x>0. \end{cases}$$

9.31. Найти предэкспоненциальный множитель в квазиклассическом выражении для коэффициента прозрачности барьера вида

$$U(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \tilde{U}(x), & x>0 \end{cases}$$

(предпогалается, что при $x>0$ выполнены условия применимости квазиклассического приближения).