Перелік задач з атомно-ядерної фізики, які пропонуються для студентів 3-го курсу ФТФ та ФЕФ в 5-му семестрі 2009/2010 навчального року

Тема 1. Модель атома за Томсоном. Формула та модель атома Резерфорда.

<u>Аудиторне заняття 1.</u>

2.1. Виходячи з томсонoвської моделі атома, визначити:
а) радіус атому водню, якщо його енергія іонізації дорівнює 13.6еВ;
б) частоту коливань електрона, якщо радіус атому водну дорівнює r. При якому значенні r довжина хвилі випроміненого світла дорівнює 600нм?

Вказівки.

2.5 α–частинка з кінетичною енергією K_α налітає з прицільним параметром 0,9 10^{-11} см на нерухоме ядро свинцю. Знайти:
а) модуль прирощення вектора імпульсу розсіяної α–частинки, якщо K_α =2,3 МеВ.
б) при якому значенні K_α модуль прирощення вектора імпульсу розсіяної α–частинки буде максимальним для даного прицільного параметра. Який при цьому кут розсіювання?

Вказівки.

2.16. Вузький пучок протонів з кінетичною енергією 100 кеВ падає нормально на золоту фольгу товщиною 1.0 мг/см^2. Розсіяні під кутом 60^o протони реєструє лічильник, круглий вхідний отвір якого має площу 1.0см^2, і знаходиться на відстані 10см від фольги та орієнтований перпендикулярно до падаючих на нього протонів. Яка доля розсіяних протонів попадає в отвір лічильника?

Вказівки.

2.17. Знайти поперечний переріз ядра атома золота, який відповідає розсіянню протонів з кінетичною енергією K_p *=1,2 МеВ* в інтервалі кутів від $\Theta=\pi/3$ до π.

Вказівки.

<u>Домашнє завдання 1.</u>

2.2. На яку мінімальну відстань приблизиться α–частинка (ядро атому ^4_2He) з кінетичною енергією K_α=40 кеВ (при лобовому зіткненні):
а) до нерухомого атому свинцю $^{207}_{82}Pb$;
б) до первісно нерухомому ядра ^7_3Li?

Вказівки.

В першому випадку, оскільки ядро нерухоме, задача розв'язується в лабораторній системі координат. В момент зупинки α–частинки її кінетична енергія повністю переходить в потенційну $K_a = 2Ze^2 / r_{\min}$. Звідки: $r_{\min} = 2Ze^2 / K_\alpha = 5.9\ 10^{-10}$ см.
В другому випадку маси взаємодіючих ядер порівняльні і задача повинна розв'язується в системі центру мас, де $K_\alpha^{'} = K_\alpha / \left(1 + \mathrm{m}_\alpha / \mathrm{m}_{\mathrm{Li}}\right)$.Тоді мінімальна відстань дорівнює:
$r_{min} = \left(2Ze^2 / K_\alpha\right)\left(1 + m_\alpha / m_{Li}\right) = 3.4 \cdot 10^{-11}$ см
2.3. За допомогою законів збереження енергії та моменту імпульсу вивести формулу зв'язку тангенса кута розсіювання (θ) з параметрами зіткнення зарядженої частинки (q_1), яка налітає з кінетичною енергією (K_α) на нерухоме ядро (q_2) з прицільною відстанню b*:*
$tg\left(\theta / 2\right) = \left(q_1 q_2\right) / \left(2bK_\alpha\right)$.

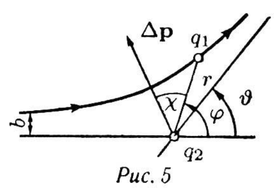


Рис. 5

Вказівки.

Із закону збереження енергії витікає, що модуль імпульсу розсіяної частинки залишається таким же як до розсіяння. Звідки одержимо модуль приросту вектора імпульсу розсіяної частинки

$$|\Delta \vec{p}| = 2 p_0 sin(\theta / 2) \qquad (1).$$

З іншого боку, модуль приросту вектора імпульсу дорівнює

$$|\Delta \vec{p}| = \int F_n dt = \int \frac{q_1 q_2 r \cos\chi}{r^3} dt = q_1 q_2 \int \frac{\sin(\varphi - \theta/2) d\varphi}{r^2 \dot{\varphi}}, \qquad (2)$$

Де F_n - проекція вектора сили взаємодії на напрямок вектора Δр. Знаменник підінтегрального виразу згідно закону збереження моменту імпульсу $m r^2 \dot{\varphi} = bmv_0$, дорівнює $r^2 \dot{\varphi} = -bv_0$, де v_0 - швидкість частинки далеко від ядра. Після інтегрування, одержимо

$$|\Delta \vec{p}| = (2q_1 q_2 / bv_0) cos(\theta / 2) . \qquad (3)$$

Із рівнянь (1) та (3) отримаємо: $tg(\theta/2) = (q_1 q_2)/(2bK_\alpha)$.

2.4. α–Частинка з імпульсом p_α=53 МеВ/*c* (де *c* – швидкість світла) розсіялась під кутом 60° в кулонівському полі нерухомого ядра урану. Найти прицільну відстань.

Вказівки.

Скористуємось формулою зв'язку тангенса кута розсіювання (θ) з параметрами зіткнення зарядженої частинки (q_1), яка налітає з кінетичною енергією (K_α) на нерухоме ядро (q_2) з прицільною відстанню b: $tg(\theta/2) = (q_1 q_2)/(2bK_\alpha)$. Звідки $b = (q_1 q_2)/(2K_\alpha tg(\theta/2))$. Оскільки $K_\alpha = p_\alpha^{\ 2}/(2m_\alpha)$, отримаємо

$$b = (q_1 q_2) m / (p^2 tg(\theta/2)) = 0.6 \text{ пм.}$$

2.22. Вузький пучок протонів з кінетичною енергією K_α=1. МеВ падає нормально на латунну фольгу товщиною ρd = 1.5 мг/см^2. Знайти долю протонів , які розсіялись на кути більше 30°, якщо масове відношення міді ($^{63}_{29}$Cu, ρ_{Cu} =8.9 г/см^3) і цинку ($^{64}_{30}$Zn, ρ_{Zn} =7.0 г/см^3) у фользі відповідно дорівнює 7:3.

Вказівки.

Скористуємось формулою Резерфорда для відносної кількості частинок ($\frac{dN}{N}$), розсіяних в тілесний кут $d\Omega$ під кутом θ до початкового напрямку їх руху:

$$\frac{dN}{N} = n \left(\frac{q_1 q_2}{4K}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)},$$

Де *n* – кількість ядер фольги на одиницю поверхні; *K* – кінетична енергія падаючих частинок. Відносна кількість ядер, які розсіялись на кути більше 30°, визначається інтегралом

$$\eta = n \left(\frac{q_1 q_2}{4K}\right)^2 \int_{\pi/6}^{\pi} \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{\sin^4(\theta/2)}$$

Повна відносна кількість розсіяних частинок буде складатись з кількості частинок розсіяних на ядрах міді (η_{Cu}), та ядрах цинку (η_{Zn}), які визначаються відповідною товщиною фольги:
$(\rho d)_{Cu}$ = 0.7x1.5 мг/см^2 = 0.105 мг/см^2 ; $(\rho d)_{Zn}$ = 0.3x1.5 мг/см^2 = 0.045 мг/см^2.

Кількість цих ядер на одиницю поверхні із урахуванням числа Авагадро (N=6,023x10^{23} (грам-атом)$^{-1}$) дорівнює: $n_{Cu} = (\rho d)_{Cu} N / A_{Cu}$, де A_{Cu} –масове число міді. Підставляючи чисельні значення, маємо: $n_{Cu} = (0.105x10^{-3} \quad 6,023x10^{23})/63 = 10^{18}$ ядер/см^2.

Відносна кількість протонів розсіяних на ядрах міді

$$\eta_{Cu} = n_{Cu}\left(\frac{q_p q_{Cu}}{4KMB}\right)^2 \int_{\pi/6}^{\pi} \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{\sin^4(\theta/2)} = 10^{18}\left(\frac{1e29e}{4\cdot 1.0}\right)^2 4\pi\left(\frac{1}{\sin^2(\pi/12)} - \frac{1}{\sin^2(\pi/2)}\right)$$

Тема 2. Водне-подібні атоми. Спектральні серії водню. Комбінаційний принцип Рітца

Аудиторне заняття 2.

2.29. Вирахувати для атомарного водню:
а) довжини хвиль перших трьох спектральних ліній серії Бальмера;
б) мінімальну роздільну здатність λ/δλ спектрального приладу, при якій можна розділити перші N=20 ліній серії Бальмера.

Вказівки:
а) Для знаходження довжини хвилі спектральної лінії серії Бальмера скористуємось формулою для спектроскопічного хвильового числа: $K^{Б} = z^2 R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})$, де $n = 3, 4, 5...$,

$K = \frac{1}{\lambda}$, тобто перша спектральна лінія серії Бальмера для атомарного водню знаходиться так: $\lambda = (K^{Б})^{-1} = [1^2 R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2})]^{-1} = 650$ нм. Так само знаходяться довжини хвиль й для другої і третьої спектральних ліній.

б) Скористуємось формулою для розподільної здатності $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\overline{\lambda}}{\lambda_I - \lambda_{II}} = \frac{(\lambda_{II} + \lambda_I)/2}{\lambda_{II} - \lambda_I}$,

тобто для N=20 (це означає прилад повинен відрізняти 20-ю лінію від попередньої – 19)

$\lambda_I = \lambda_{19} = 367{,}8343 нм$; $\lambda_{II} = \lambda_{20} = 367{,}5354 нм$. $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = 1230 = 1.23\cdot 10^3$

2.30. В спектрі випромінювання атомарного водню відомі довжини хвиль двох ліній серії Бальмера: 410,2 та 486,1 нм. До якої серії належить спектральна лінія, хвильове число якої дорівнює різниці хвильових чисел цих ліній? Яка її довжина хвилі?

Вказівки:
Для вирішення цієї задачі потрібно скористуватись комбінаційним принципом Рітца: якщо відомі два хвильових числа однієї серії, то їх різниця буде також хвильовим числом якоїсь лінії іншої серії цього атому. З формули для спектроскопічного хвильового числа серії Бальмера $K^{Б} = z^2 R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})$, де $n = 3, 4, 5...$, $K = \frac{1}{\lambda}$, знайдемо n для двох відомих довжин хвиль: $n_1 = 6$, $n_2 = 4$. Тобто $K = R(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2})$ - це друга лінія Брекета. $K^{Бр} = \frac{1}{\lambda}$,

$\lambda = 2627 нм$.

2.34. У якого водне подібного іона різниця довжин хвиль головних ліній серії Бальмера і Лаймана дорівнює 59,3 нм?

Вказівки:
Запишемо формулу для знаходження хвильового числа головних ліній серій Бальмера і Лаймана: $K_1^{Б} = z^2 R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}) = \frac{5R}{36} z^2$ та $K_1^{Л} = z^2 R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}) = \frac{3R}{4} z^2$; $K = \frac{1}{\lambda}$.

Різниця довжин хвиль головних ліній визначається як $\Delta\lambda = \frac{1}{K_1^{Б}} - \frac{1}{K_1^{Л}} = \frac{88}{15Rz^2}$, знаходимо

$z = \sqrt{\frac{88}{15R\Delta\lambda}}$ 3. Тобто це Li^{++}.

Домашнє завдання 2.

Задача 1. Знайти в довжинах хвиль спектральні інтервали, в яких містяться серії Лаймана, Бальмера і Пашена для атомарного водню. Зобразити на шкалі хвиль їх відносне розташування та виділити видиму частину спектру.

Вказівки:
Для знаходження спектральних інтервалів скористуємось формулами для спектроскопічних хвильових чисел для заданих серій – $K^{Л} = R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2})$, $n = 2,3...$; $K^{Б} = R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})$, $n = 3,4...$; $K^{П} = R(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2})$, $n = 4,5...$, згадаємо, що $K = \frac{1}{\lambda}$ та підставимо граничні значення, наприклад для серії Лаймана n дорівнює на лівому краї інтервалу 2, а на правому безкінечність. Для n=2 $\lambda = \left(K^{Л}\right)^{-1} = \left(R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2})\right)^{-1} = [1.1 \cdot 10^{-2} (1-1/4)]^{-1} = 121.21$ нм,

$n =$ $\lambda = \left(K^{Л}\right)^{-1} = \left(R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty})\right)^{-1} = [1.1 \cdot 10^{-2} \; 1]^{-1} = 90,91$ нм. Подібно до цього знаходяться інтервали для інших серій. Підказка: видима частина спектру - 400÷750 нм.

2.32. Які лінії містить спектр поглинання атомарного водню в діапазоні довжин хвиль від 94,5 до 130,0 нм?

Вказівки:
В умові задачі вказано, що треба знайти лінії у спектрі поглинання – це означає, що треба використовувати формулу для лінії Лаймана (вона відповідає першому енергетичному рівню) - $K^{Л} = R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2})$, де $K = \frac{1}{\lambda}$. Для розв'язання задачі потрібно записати цю формулу двічі для різних λ та виразити n_1 та n_2. $n_1 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{R\lambda_1}}} = 5,13$ та

$n_2 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{R\lambda_2}}} = 1,823$. Тобто спектр містить 2 (121.6 нм), 3 (120,6 нм), 4 (97,3 нм) та не містить 5 (94,9). Помилка в тому, що ми не враховуємо рух ядра.

2.35. В спектрі деяких водне-подібних іонів довжина хвилі третьої лінії серії Бальмера дорівнює 108,5 нм. Знайти енергію зв'язку електрона в основному стані цих іонів.

Вказівки:
Для розв'язання задачі запишемо формулу спектроскопічного хвильового числа воднеподібних атомів для серії Бальмера: $K^{Б} = z^2 R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})$ $n = 3,4...$. Звідси знайдемо z - заряд ядра атома. $z = [\lambda R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})]^{-1/2}$ та підставимо n=5 (тому що третя лінія, рахуємо починаючи с 3); получимо z=2. Скористаємось формулою для повної енергії зв'язаної

системи $E=-z^2\dfrac{Rhc}{n^2}$, основний стан іона: n=1.

$$E=-4\frac{1.01\times10^{5}\cdot 4.136\cdot10^{-15}\cdot 3\cdot10^{11}}{1}=54.47 \text{ эВ.}$$

Тема 3. Модель воднеподібних атомів згідно теорії Бора.

<u>Аудиторне заняття 3.</u>

2.24. Оцінити час протягом якого електрон упав би на ядро, якщо він рухається по орбіті з радіусом 0,5 10^{-8} см і втрачає енергію згідно з класичною теорією $dE/dt=-\left(2e^2/3c^3\right)a^2$, де *a*-прискорення електрона. Врахувати, що вектор прискорення весь час спрямований до центру атома.

Вказівки:

Запишемо баланс сил діючих на електрон згідно з моделлю атому водню по Бору: $\dfrac{m_e v^2}{r}=\dfrac{ze^2}{r^2}$, оскільки $\dfrac{v^2}{r}=a$ то знайдемо $a=\dfrac{ze^2}{mr^2}$. Підставимо а в формулу згідно якої електрон втрачає енергію та розділимо змінні: $dE=-\dfrac{2e^2}{3c^3}\cdot\dfrac{z^2e^4}{m^2r^4}dt$. Розпишемо енергію $E=K_e+U=\dfrac{m_e v^2}{2}-\dfrac{ze^2}{2}=\dfrac{ze^2}{2r}-\dfrac{ze^2}{r}=-\dfrac{ze^2}{2r}$. Диференціюємо вираз для енергії по r та підставляємо у диференційне рівняння записане вище.

$$\frac{ze^2}{2r^2}dr=-\frac{2e^2}{3c^3}\frac{z^2e^4}{z^4m^2}dt$$

$$dt=-\frac{3m^2r^2c^3}{4e^4z}dr$$

Час падіння електрона визначається як $\tau=\int_r^0=\int_0^r\dfrac{3m^2r^2c^3}{4e^4z}dr=\dfrac{m^2c^3}{4e^4z}r^3\Big|_0^r\approx 1.317\cdot10^{-11}c$

2.26. Вважаючи ядро нерухомим вирахувати для іона He^+:

а) радіуси перших двох Боровських орбіт;

б) кінетичну енергію електрона та його енергію зв'язку в основному стані;

в) перший потенціал збудження та довжину хвилі резонансної лінії.

Вказівки:

Розв'язання задачі подібно до розв'язання домашньої задачі номер 2.26д та відрізняється лиш тим, що для гелію z дорівнює двом, а не одиниці.

2.36. Енергія зв'язку електрона в атомі He дорівнює $E_{зв}$=24,6 еВ. Знайти енергію необхідну для послідовного вилучення обох електронів з цього атома.

Вказівки:

Для вилучення першого електрона потрібно затратити енергію зв'язку в атомі He, а для другого – енергію зв'язку He^+. $E_{зв}^{He^+}=\left|-\dfrac{m_e}{2}\dfrac{z^2e^4}{\hbar^2}\right|=55$ eB. $E_{повна}=E_{зв}^{He}+E_{зв}^{He^+}=79,6$ eB

2.47. Вирахувати для мезоатома водню ((в якому замість електрона рухається мюон, який має той же заряд, але масу в 270 раз більшу):

а) відстань між мюоном і ядром в основному стані;

б) довжину хвилі резонансної лінії;

в) енергію зв'язку в основному стані мезоатомів водню, ядра яких протон і дейтрон.

Домашнє завдання 3

2.26д. Вважаючи ядро нерухомим вирахувати для атома водню Н:
а) радіуси перших двох Боровських орбіт;
б) кінетичну енергію електрона та його енергію зв'язку в основному стані;
в) перший потенціал збудження та довжину хвилі резонансної лінії

Вказівки:
а) для знаходження радіусів перших двох Боровських орбіт потрібно записати формулу радіуса n-ої стаціонарної орбіти - $r_n = \frac{\hbar}{ze^2 m_e} \cdot n^2$ та підставити в цю формулу n=1,2; для водню z=1. $r_1 = \frac{(1.05 \cdot 10^{-27})^2}{1 \cdot (4.8 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28}} \cdot 1^2 = 5.26 \cdot 10^{-9}$; $r_2 = r_1 \cdot 2^2 = 2.1 \cdot 10^{-8}$

б) для знаходження кінетичної енергії електрона потрібно згадати формулу для кінетичної енергії - $K = mv^2 / 2$ та записати формулу для швидкості електрону $V_n = \frac{ze^2}{\hbar} \cdot \frac{1}{n}$, тобто

$K = \frac{m_e \cdot z^2 e^4}{2 \cdot \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}$, основний стан означає, що z=1.

$K_e^1 = \frac{9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 1^2 \cdot (4.8 \cdot 10^{-10})^4}{2 \cdot (1.05 \cdot 10^{-27})^2} \cdot \frac{1}{1^2} = 2.19 \cdot 10^{-11} ерг = 13.69 еВ$ та $E_{зв} = K_e^1$

в) перший потенціал збудження знаходиться, як $V_1 = \frac{|E_1 - E_2|}{e}$ та дорівнює

$V_1 = 13.6 \cdot (\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}) = 10.2 В$. Довжина хвилі резонансної лінії визначається з співвідношення $eV_1 = h\nu$, від сюди знаходимо ν та згадаємо, що $\lambda = c / \nu$.

$$\lambda = \frac{ch}{eV_1} = \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 4.136 \cdot 10^{-15}}{10.2} = 121.65 нм$$

2.45. Вирахувати відношення маси протона до маси електрона, якщо відомо, що відношення сталі Рідберга важкого та легкого водню дорівнює 1,000272, а відношення мас ядер 2,00.

Вказівки:
З умов задачі - $\frac{R_D}{R_H} = 1.000272$ та $\frac{m_D}{m_H} = 2$. Запишемо формулу для знаходження сталої Ридберга - $R = R \cdot (\frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_я}})$. Перепишемо її для двох даних випадків (важкий та легкий водень) та розділимо один вираз на інший: $\frac{R_D}{R_H} = \frac{(1 + \frac{m_e}{2m_p})^{-1}}{(1 + \frac{m_e}{m_p})^{-1}} = \frac{2(\frac{m_e}{m_p} + 1)}{2 + \frac{m_e}{m_p}}$, помножимо

навхрест, $2R_D + R_D \dfrac{m_e}{m_p} = 2(R_H \dfrac{m_e}{m_p} + R_H)$, знаходимо співвідношення

$$\frac{m_p}{m_e} = [\frac{2(1-2\dfrac{R_D}{R_H})}{\dfrac{R_D}{R_H}-2}]^{-1} = 1838.24$$

2.46. Знайти для легкого і важкого водню різницю:
а) в енергіях зв'язку електронів в основних станах;
б) перших потенціалів збудження;
в) довжин хвиль резонансних ліній.

Вказівки:

а) запишемо формулу для визначення енергії зв'язку $E_n = -\dfrac{z^2 m_e e^4}{2\hbar^2}\dfrac{1}{n^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{m_e}{m_я}}$. Різниця

енергій для легкого та важкого воднів визначається як $\left|E_1^D - E_1^H\right|$ та дорівнює

$$\left|E_1^D - E_1^H\right| = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2}[\frac{1}{1+\dfrac{m_e}{2m_p}} - \frac{1}{1+\dfrac{m_e}{m_p}}] = 13.6\ [\frac{1}{1+\dfrac{m_e}{2\ 1836 m_e}} - \frac{1}{1+\dfrac{m_e}{1836 m_e}}] = 3.7\ 10^{-3}$$

б) різниця перших потенціал збудження знаходиться, як

$$\left|V_{1D} - V_{1H}\right| = \frac{\left|E_{1D} - E_{1H}\right|}{e}[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}] = 3.7\cdot 10^{-3}\ 3/4 = 2.78\cdot 10^{-3}$$. Довжина хвилі

резонансної лінії як $\left|\lambda_D - \lambda_H\right| = \dfrac{ch}{e\left|V_{1D} - V_{1H}\right|} = \dfrac{3\cdot 10^{10}\ 6.62\ 10^{-27}}{2.78\cdot 10^{-3}} = нм$

Тема 4. Корпускулярні властивості електромагнітного випромінювання. Фотоелектричний ефект та ефект Компотна.

Аудиторне заняття 4.

1.42. Мідну кульку віддалену від других предметів опромінюють електромагнітними променями з довжиною хвилі λ =200 нм. До якого максимального потенціалу зарядиться кулька?

1.45. Електроди вакуумного фотоелементу (один цезієвий, другий мідний) замкнуті зовні закоротко. Цезієвий електрод опромінюють моно-енергетичним випромінюванням. Знайти:
а) довжину хвилі випромінювання, при якій з'явиться фотострум;
б) максимальну швидкість фотоелектронів, які підлітають до мідного електроду якщо довжина хвилі випромінювання дорівнює 220 нм.

1.51. Вузький пучок рентгенівського випромінювання з довжиною хвилі λ падає на розсіювальну речовину. Знайти λ, довжини хвиль зміщених складових випромінювання розсіяного під кутами $\theta=60^o$ та $\theta=120^o$, відрізняються друг від друга в два рази.

1.54. Фотон з енергією 0,46 МеВ розсіявся під кутом 120^0 на нерухомому вільному електроні. Знайти:
а) енергію розсіяного фотона;
б) кінетичну енергію електрона.

1.56. При опроміненні речовини рентгенівським випромінюванням з довжиною хвилі λ знайдено, що максимальна кінетична енергія комптонівських електронів $T_{макс}$=0,44МеВ. Визначити λ.

Домашнє завдання 4

1.44. Знайти максимальну кінетичну енергію фотоелектронів вирваних з поверхні літію електромагнітним випромінюванням, напруженість електричної складової якого змінюється з часом по закону: T=a(1+cosωt) cosω$_0$t, де *a* –стала; ω=6·10^{14} с$^{-1}$; ω$_0$=3,6·10^{15} с$^{-1}$.

Вказівки:

Запишемо формулу Ейнштейна для фотоефекту $K_e = h\nu - A_{out}$.Для літію $A_{out} = 2.39$ eB .

Перепишемо формулу для визначення напруженості

$$T = a(1+\cos\omega t)\cos\omega_0 t = a\cos\omega_0 t + a\cos\omega t\cos\omega_0 t = a\cos\omega_0 t + a\,\frac{\cos(\omega-\omega_0)t + \cos(\omega+\omega_0)t}{2} =$$

$$= a\cos\omega_0 t + \frac{a}{2}\cos(\omega t - \omega_0 t) + \frac{a}{2}\cos(\omega t + \omega_0 t)$$

Вибираємо максимальне значення частоти, $\omega + \omega_0$ та підставляємо його у першу формулу.

$K_{max} = h(\omega+\omega_0)/2\pi - A_{out} = \hbar(\omega+\omega_0) - A_{out}$, це дорівнює

$K_{max} = 1.05\cdot10^{-27}\cdot(6\cdot10^{14} + 3.3\cdot10^{15}) - 2.39 = 0.36$ eB

1.48. Фотон з довжиною хвилі λ =17 пм вириває із нерухомого атому електрон. Енергія зв'язку якого $E_{зв}$=69,3 кеВ. Знайти імпульс переданий атому в результаті такого процесу, якщо електрон вилетів під прямим кутом до напряму нелітаючого фотону.

1.49. Користуючись законами збереження показати що вільний електрон не може поглинути фотон.

Тема 5. Хвилі де-Бройля. Співвідношення невизначеностей.

<u>Аудиторне заняття 5.</u>

3.2. При збільшенні енергії електрона на 200 еВ його дебройдівська довжина хвилі змінилася в два рази. Знайти початкову довжину хвилі електрона.

3.9. +3.10. Релятивістська частинка з масою спокою m$_0$.має кінетичну енергію K. Знайти:

а) дебройлівську довжину хвилі частинки;

б) значення K, при яких похибка в довжині хвилі визначеної згідно нерелятивістської формули не перевищує 1% для електрона та протона.

в) знайти кінетичну енергію при якій дебройдівська довжина хвилі електрона дорівнює його комптонівській довжині хвилі.

3.23. Впевнитись, що вимірювання x- координати частинки за допомогою мікроскопу (рис 3.1) привносить невизначеність до її імпульсу Δp_x таку, що $\Delta x\,\Delta p_x \geq h/2\pi$. Майте на увазі, що розділення мікроскопу d=λ /sin θ, де λ - довжина хвилі використаного світла.

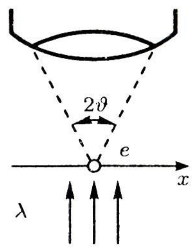


Рис. 3.1

3.26. Оцінити невизначеність в швидкості електрона в атомі водню припускаючи що розмір атома порядку 10^{-8} см. Порівняти одержане значення зі швидкістю електрона на першій Боровській орбіті.

<u>Домашнє завдання 5</u>

*3.*1. Визначити дебройлівську довжину хвилі електрона та протона, які рухаються з кінетичною енергією 1,0 кеВ. При яких значеннях кінетичної енергії їх довжина хвилі буде дорівнювати 100 пм?

Вказівки:

Запишемо формулу для довжини хвилі у класичному (нерелятивістському випадку)

$\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{K\cdot 2m}}$.Знайдемо для електрона $\lambda = \dfrac{4.136\cdot10^{-15}}{\sqrt{1\cdot10^{3}\cdot2\cdot9.1\cdot10^{-28}/(1.6\cdot10^{-12})}} = 38.8\,пм$.

Таким самим чином знаходиться довжина хвилі й для протона.

Для знаходження кінетичної енергії при відомої довжини хвили потрібно виразити з цієї формули $K = \dfrac{h^2}{2\lambda^2 m}$.

3.7. Нейтрон з кінетичною енергією K_n=0,25 еВ пружно зіткнувся з первісно нерухомим ядром атому ^{4}He. Знайти довжини хвиль обох частинок в їх Ц - системі до та після зіткнення.

3.14. Потік моно енергетичних електронів падає нормально на діафрагму з вузькою щілиною шириною b=2,0 мкм. Знайти енергію електронів, якщо на екрані на відстані від щілини l=50 см ширина центрального дифракційного максимуму становить Δx=0,36 мм.
3.22. Показати, що вимірювання *x* – координат частинок за допомогою вузької щілини шириною *b* вносить невизначеність до їхніх імпульсів Δp_x – таку, що $\Delta x \Delta p_x \geq h$.

Тема 6. Розвязування рівняння Шредінгера для заданого потенціалу

Аудиторне заняття 6.

3.47. Частинка з масою m знаходиться в одновимірному потенційному полі *U(x)* показаному на малюнку 3.3, де $U(0)=\infty$. Знайти:

а) рівняння яке визначає можливі значення енергії частинки в області $E < U_0$; привести його до виду

$$\sin kl = \pm kl(\hbar/\sqrt{2ml^2U_0}),\ \ k=\sqrt{2mE}/\hbar$$

Показати за допомогою графічного вирішення цього рівняння що можливі значення енергії частинки створюють дискретний спектр:

б) мінімальні значення величини $l^2 U_0$ при яких з'являються перший та n–й дискретні рівні. Скільки рівнів містить яма для якої $l^2U_0 = 75\hbar^2/m$?

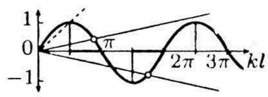


Рис. 6

Вказівки:

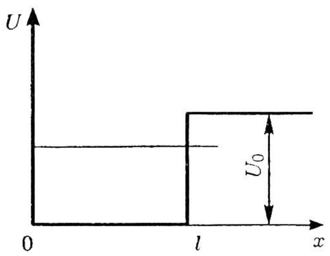


Рис. 3.3

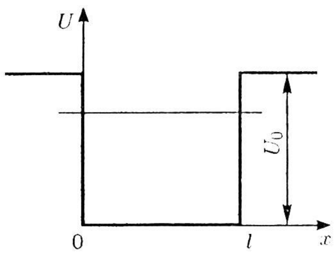


Рис. 3.4

3.48. В попередній задачі енергія єдиного рівня $E = U_0/2$. Скориставшись рішенням цієї задачі визначити:

а) значення $l^2 U_0$ такої ями;

б) найбільш вірогідне значення координати частинки та зобразити приблизний графік залежності $\psi^2(x)$;

в) вірогідність знаходження частинки в області $x > l$.

Вказівки:

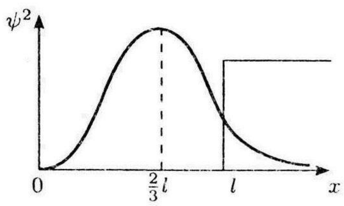


Рис. 7

Домашнє завдання 6

3.49. Частинка з масою m знаходиться в одновимірному симетричному потенційному полі *U(x)* показаному на малюнку. Знайти рівняння, яке визначає можливі значення енергії частинки в області $E<U_0$; привести його до виду

$$kl = n\pi - 2\arcsin(\hbar k/\sqrt{2mU_0}),\ k=\sqrt{2mE}/\hbar,\ \text{а } n \text{ - ціле число.}$$

Показати за допомогою графічного вирішення цього рівняння що можливі значення енергії частинки створюють дискретний спектр

Вказівки:

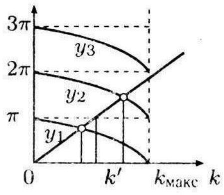


Рис. 8

3.50. Скориставшись рішенням попередньої задачі визначити значення $l^2 U_0$ при якому:

а) енергія основного стану частинки та зобразити $E = U_0/2$:

б) з'явиться другий та n – й дискретні рівні. Скільки дискретних рівнів містить яма для якої $l^2 U_0 = 75\hbar^2/m$?

Тема 7. Проходження частинок крізь потенціальний бар'єр висотою U_0 і шириною L*.*

Аудиторне заняття 7.

3.61. Частинка з масою m та енергією E падає на прямокутний потенційний бар'єр показаний на малюнку 3.7 Знайти:

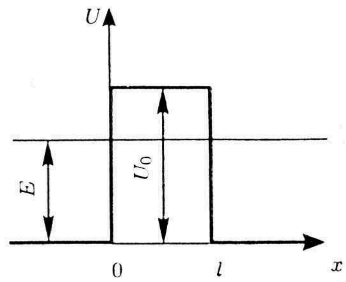


Рис. 3.7

а) коефіцієнт прозорості D та коефіцієнт відбиття R в випадку $E > U_0$. Впевнитись в тому що одержані вирази співпадають з відповідними формулами попередньої задачі якщо в них змінити знак в U_0. Знайти D при $E \rightarrow U_0$.

б) перші три значення E, при яких електрон буде проходити через цей бар'єр без перешкоди, якщо U_0.=10, еВ а l = 0,5 нм;

в) коефіцієнт прозорості D в випадку $E < U_0$. Спростити одержаний вираз якщо D<<1;

г) Вірогідність проходження електрона та протона з $E = 5$ *еВ* через цей бар'єр, якщо U_0.=10, еВ а l = 0,1 нм;

Домашнє завдання 7

3.60. Частинка з масою m та енергією E падає на прямокутну потенційну яму показану на малюнку 3.6, де l –ширина ями, а U_0.-її глибина . Знайти:

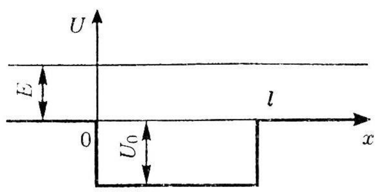


Рис. 3.6

а) коефіцієнт прозорості D та коефіцієнт відбиття R;

б) значення E, при яких частинка буде проходити через цю яму без перешкоди. Впевнитись в тому що це трапиться при умові l = nλ/2, де λ-довжини хвилі частинки всередині ями, n = 0, 1, 2, …

Тема 8. Аналіз розв'язання рівняння Шредінгера в сферичних координатах.

Аудиторне заняття 8.

4.64. Частинка з масою m рухається в центральносиметричному потенційному полі $U(r)$. Знайти:

а) рівняння Шредінгера для кутової та радіальної частини хвильової функції $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\,Y(\theta, \varphi)$. Вважаючи власні значення оператора L^2 відомими привести рівняння для функції R (r) до вигляду

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U-\frac{L^2}{2mr^2})R=0$$

б) залежність хвильової функції від азимутального кута φ.

4.65. Частинка знаходиться в центральносиметричному потенційному полі в стані, який характеризується хвильовою функцією $\psi(r,\vartheta,\varphi)=R_l(r)Y_{l,m_l}(\vartheta,\varphi)$. Який фізичний зміст функції $\left|Y_{l,m_l}(\vartheta,\varphi)\right|^2$? Скориставшись табл.. 4.1 (набрать эту таблицу!) вирахувати нормувальні коефіцієнти функцій

А) $Y_{1,0}$;

Б) $Y_{2,1}$.

Тема 9. Розв’язання рівняння Шредінгера для водне-подібних атомів. Радіальна складова.

<u>Аудиторне заняття 9.</u>

4.70. Привести рівняння, яке визначає радіальну частину хвильової функції електрона в кулонівському полі ядра Z, до безрозмірного виду. Як одиниці вимірювання взяти атомну одиницю довжини (перший борівський радіус) та атомну одиницю енергії (енергію зв’язку електрона в атомі водню).

Вказівки:
Для розв’язання цієї задачі потрібно записати рівняння Шредінгера для воднеподібних атомів:

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2dR}{rdr}+\frac{ze^2 2m}{r\hbar^2}R=-\frac{2m}{\hbar^2}ER$$

та згадати чому дорівнює енергія зв’язку основного стану електрона, перший борівський радіус: $E_{зв}=\left|E_1\right|=\left|-\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\right|$, $r_1=\frac{\hbar^2}{e^2 m_e}$. Приведемо до безрозмірного виду: $\rho=\frac{r}{r_1}$, $\varepsilon=\frac{E}{E_1}$

та перепишемо рівняння Шредінгера з урахуванням цих змін ($R(r)$ $R(\rho)$):

$$\frac{1}{r_1^2}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho r_1^2}\frac{dR}{d\rho}+\frac{ze^2 2m}{\rho r_1\hbar^2}R=-\frac{2m}{\hbar^2}E_1\varepsilon R$$

. Помножимо цей вираз на r_1^2 та підставимо значення r_1 і ε:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\frac{ze^2 2mr_1}{\rho\hbar^2}R+\frac{2mr_1^2}{\hbar^2}E_1\varepsilon R=0$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\frac{ze^2 2m_e}{\rho\hbar^2}\frac{\hbar^2}{e^2 m_e}R+\frac{2m_e}{\hbar^2}\frac{\hbar^4}{e^4 m_e^2}\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\varepsilon R=0$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+(\frac{2z}{\rho}+\varepsilon)R=0$$

4.72. Електрон в атомі водню перебуває в стаціонарному стані, який описується сферично-симетричною хвильовою функцією $\psi(r)=A(1+ar)e^{\alpha r}$, де *A*, *a* і α - деякі сталі. За допомогою рівняння Шредінгера знайти:

а) сталі *a* і α, а також енергію електрона

а) нормувальний коефіцієнт А.

Вказівки:
Для розв’язання цієї задачі потрібно записати рівняння Шредінгера для воднеподібних атомів:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{2d\psi}{rdr}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi-\frac{(l+1)}{r}\psi+\frac{2me^2}{\hbar^2 r}\psi=0$$

і підставити хвильову функцію з умови задачі, для цього спочатку знайдемо першу та другу похідну:

$$\frac{d\psi}{dr}=Aae^{\alpha r}+A\alpha(1+ar)e^{\alpha r}=A(\alpha+a+\alpha ar)e^{\alpha r}$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}=A\alpha(\alpha+a+\alpha ar)e^{\alpha r}+e^{\alpha r}\alpha a=Ae^{\alpha r}(2\alpha a+\alpha^2+a\alpha^2 r)\,.$$

Підставляємо до рівняння Шредінгера:

$$Ae^{\alpha r}[2\alpha a+\alpha^2+a\alpha r]+\frac{2}{r}Ae^{\alpha r}(a+\alpha+\alpha ar)+\frac{2m}{\hbar^2}E\,A(1+ar)e^{\alpha r}+\frac{2me^2}{rh^2}A(1+ar)e^{\alpha r}-$$

$$-\frac{l(l+1)}{r^2}A(1+ar)e^{\alpha r}=0$$

$$Ae^{\alpha r}[2\alpha a+\alpha^2+a\alpha r+\frac{2}{r}(a+\alpha)+2\alpha a+\frac{2mE}{\hbar^2}+\frac{2mEar}{\hbar^2}+\frac{2me^2}{rh^2}+a\frac{2me^2}{h^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{l(l+1)}{r}a]=0$$

Вираз під скобками має дорівнювати нулю, тому коефіцієнти при однакових степенях r мають дорівнювати нулю, розпочнемо с найменшого:

$r^{-2}:l(l+1)=0\Rightarrow l=0$, $(l\quad -1)$ тому надалі немає коефіцієнтів , які стояли поряд з l.

$$r^{-1}:2(a+\alpha)+\frac{2me^2}{\hbar^2}=0$$

$$r^{0}:4a\alpha+\alpha^2+\frac{2mE}{\hbar^2}=0$$

$$r^{1}:a\alpha^2+\frac{2mEa}{\hbar^2}=0$$

Маємо систему рівнянь:

$$a+\alpha=-\frac{me^2}{\hbar^2}$$

$$4a\alpha+\alpha^2+\frac{2me^2a}{\hbar^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}=0$$

$$a(\alpha^2+\frac{2mE}{\hbar^2})=0$$

З останнього рівняння: $\alpha^2=-\frac{2mE}{\hbar^2}$ $(a\quad 0)$, скористуємось цим та перепишемо друге рівняння урахував перше:

$$4a\alpha+\alpha^2-2(a^2+\alpha a)-\alpha^2=0$$

$$-2a^2+2\alpha a=0$$

$$a=\alpha$$

Тоді з першого рівняння: $a=-\frac{me^2}{2\hbar^2}=-\frac{1}{2r_1}$. Енергію знаходимо з останнього рівняння системи: $E=-\frac{me^4}{8\hbar^2}=-\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{2^2}$.

Запишемо саму хвильову функцію: $\psi=A(1-\frac{r}{2r_1})e^{\frac{-r}{2r_1}}$. Знайдемо нормувальний коефіцієнт А виходячи з того, що вірогідність знаходження електрона де-небудь дорівнює одиниці:

$\int_V |\psi|^2 dV = 1$, $dV = 4\pi r^2 dr$. Тобто $\int_0^\infty A^2(1-\frac{r}{2r_1})^2 e^{-\frac{r}{r_1}} 4\pi r^2 dr = 1$. Інтегруємо та получаємо $A = (8\pi r_1^3)^{-1/2}$

Домашнє завдання 9

4.71. Використавши підстановку $R(r) = \chi(r)/r$, знайти асимптотичний вид радіальної частини хвильової функції *R (r)* для зв'язаних станів електрона в кулонівському полі ядра:
а) на великих відстанях від ядра;
б) на малих відстанях від ядра.

Вказівки:
Для розв'язання цієї задачі запишемо рівняння Шредінгера:
$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{2z}{r_1}\frac{R}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}R = -\frac{2mE}{\hbar^2}R$ та зробимо підстановку $R(r) = \chi(r)/r$. Для цього беремо першу та другу похідні:
$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d\chi}{dr} - \chi(r)\frac{1}{r^2}$ та $\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{1}{r}\frac{d^2\chi}{dr^2} - 2\frac{d\chi}{dr}\frac{1}{r^2} + 2\chi(r)\frac{1}{r^3}$. Після підстановки маємо таке рівняння: $[\frac{1}{r}\frac{d^2\chi}{dr^2} - 2\frac{d\chi}{dr}\frac{1}{r^2} + 2\chi(r)\frac{1}{r^3}] + \frac{2}{r}[\frac{1}{r}\frac{d\chi}{dr} - \chi(r)\frac{1}{r^2}] + \frac{2z}{r_1}\frac{\chi}{r^2} - \frac{l(l+1)}{r^3}\chi = -\frac{2mE}{r\hbar^2}\chi$.

Скоротимо та помножимо на r: $\frac{d^2\chi}{dr^2} + (\frac{2z}{rr_1} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2})\chi = 0$.

а) на великих відстанях від ядра – скоротимо члени зі ступеню при r нижчою за -1:

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\chi = 0$$

Рішення цього рівняння має такий вид: $\chi = b_1 e^{-\kappa r} + b_2 e^{\kappa r}$, де $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. Із умови обмеженості $R(r)$ маємо: $b_2 = 0$, тому $R(r) \sim \frac{1}{r}e^{-\kappa r}$.

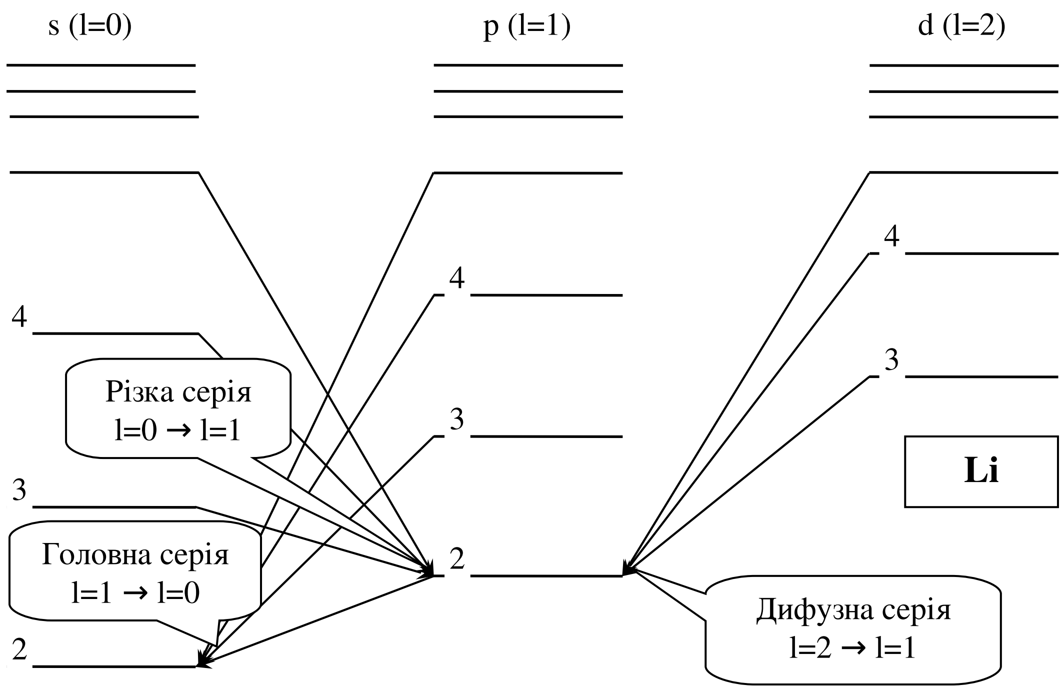
б) на малих відстанях від ядра – скоротимо члени зі ступеню при r вищою за -2:
$\frac{d^2\chi}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\chi = 0$. Для цього рівняння шукаємо рішення у виді $\chi = Ar^\alpha$. Підставляємо:
$\alpha(\alpha-1)Ar^{\alpha-2} - \frac{l(l-1)}{r^2}Ar^\alpha = 0$. Маємо $\alpha_1 = l+1$ та $\alpha_2 = -l$. Викреслюємо α_2 виходячи із умови обмеженості $R(r)$. Тобто $R(r) \sim \frac{1}{r}r^{l+1} = r^l$.

Тема 10. Енергетичні рівні в атомах лужних металів.

Аудиторне заняття 10.

5.2. Вирахувати квантові дефекти S-, P-, та D- термів атому Li, якщо відомо, що енергія зв'язку валентного електрона в основному стані дорівнює 5,39 еВ, перший потенціал збудження 1,85 еВ а довжина хвилі головної лінії дифузної серії 610 нм. Який із перерахованих термів найбільш близький до водне-подібного та чим це зумовлено?

Вказівки:
Зробимо малюнок:



Квантовий дефект – це поправка зв’язана з нецентральністю поля (див. малюнок нижче), яке діє на валентний електрон - σ_l .

Запишемо формулу для енергії на n-му рівню з ураховуючи вище сказаний ефект:

$$E_{n,l}^{щм} = -\frac{13.6 eB}{(n-\sigma_l)^2} .$$

З умови задачі енергія зв’язку електрона в основному стані дорівнює $E_{зв} = \left|E_{2,0}\right| = 5.35\, eB$,

звідси ми знайдемо $\sigma_0 = 2 - \sqrt{\frac{13.6}{E_{2,0}}} = 0.41$.

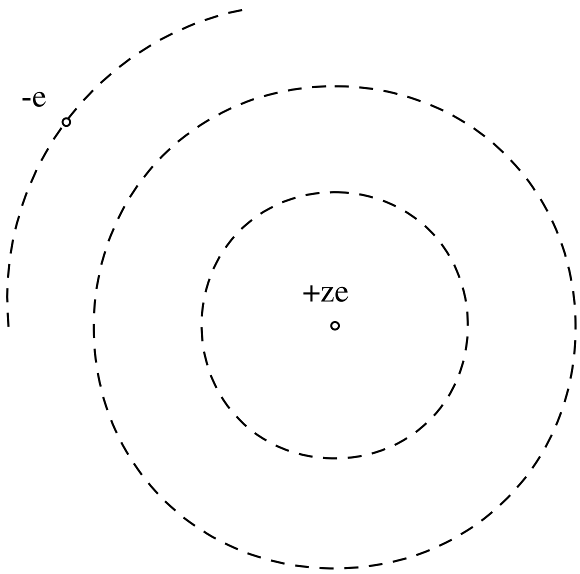
Перший потенціал збудження $e\Delta\varphi = 1.85\, eB$. З іншого боку $\left|E_{1,0}\right| - \left|E_{2,0}\right| = e\Delta\varphi$. Звідси

$$\sigma_1 = 2 - \sqrt{\frac{13.6}{5.35 - 1.85}} = 0.04 .$$

Довжина хвилі головної лінії дифузної серії $\lambda_{г.л.} = 610 нм$ - це різниця енергій рівнів (2, 1) та (3, 2): $\left|E_{2,1}\right| - \left|E_{3,2}\right| = \frac{hc}{\lambda}$. Звідси

$$\sigma_2 = 3 - \sqrt{\frac{13.6}{3,54 - \frac{1239,8}{620}}} = 0.00 .$$

Тобто $\sigma_0 = 0.41$, $\sigma_1 = 0.04$, $\sigma_3 = 0.00$.



5.3. Знайти енергію зв’язку у валентного електрона в основному стані атому якщо відомо що довжини хвиль головної лінії різкої серії та її короткохвильової границі відповідно дорівнюють 813 та 349 нм.

Вказівки:

Використаємо довжину хвилі головної лінії різкої серії $\lambda_{гл} = 813нм$, $|E_{2,1}| - |E_{3,0}| = \dfrac{hc}{\lambda}$; та довжину хвилі короткохвильової границі $\lambda_{кг} = 349нм$, $|E_{2,1}| - |E\ \ | = \dfrac{hc}{\lambda}$. З цих двох рівнянь, врахувавши, що $|E_{\infty}| = 0$, знайдемо σ_0 аналогічно до попередньої задачі.

Енергія зв'язку знаходиться з формули $E_{зв} = |E_{20}| = \dfrac{13.6eB}{(2-\sigma_0)^2} = \dfrac{13,6}{(2-0,41)^2} = 5,38$.

5.5. Вирахувати для іона Be⁺ квантові дефекти S- та P- термів, а також довжину хвилі заголовної лінії різкої серії, якщо відомо що довжини хвиль заголовної лінії головної серії та її короткохвильової границі дорівнюють 321 та 68,8 нм.

Вказівки:
Запишемо формулу для знаходження енергії на n-му рівні з урахуванням поправки:
$E^{щм}_{n,leфф} = -z^2 \dfrac{13.6eB}{(n-\sigma_l)^2}$. Використовуючи її та записавши рівняння для головної лінії головної серії і короткохвильової границі знайдемо поправки нецентральності поля:
$\dfrac{1240}{\lambda_{глг}} = |E_{2,0}| - |E_{2,1}|$, $\dfrac{1240}{\lambda_{кг}} = |E_{2,0}| - |E_{\infty}|$. Ураховуючи $|E_{\infty}| = 0$ отримаємо: $\sigma_0 = 0.28$, $\sigma_1 = 0.04$.

Довжині хвилі головної лінії різкої серії знаходиться із рівняння: $|E_{2,1}| - |E_{3,0}| = \dfrac{1240}{\lambda_{глр}}$ звідки $\lambda_{глр} = 179,5нм$.

<u>Домашнє завдання 10</u>

5.1. Знайти потенціал іонізації та перший потенціал збудження атома Na, у якого квантові дефекти основного терму 3S та терму 3P дорівнюють відповідно 1,37 та 0,88.

Вказівки:
Енергія іонізації – це найменша енергія потрібна для того, щоб вирвати електрон із атому й віднести на безкінечність, тобто для натрію (один електрон на зовнішній, третій оболонці)

$$e\varphi_{іон} = |E_{30}| = \frac{13.6eB}{(3-\sigma_0)^2} = 5.12eB \quad \Rightarrow \varphi_{іон} = 5.12 \ B.$$

Перший потенціал збудження це різниця енергій між першим основним рівнем та першим можливим наступним, тобто для натрію:

$$e\varphi_{зб} = |E_{30}| - |E_{31}| = 5.12 - \frac{13.6eB}{(3-\sigma_1)^2} = 2.09eB \quad \Rightarrow \varphi_{зб} = 2.09 \ B.$$

5.4. Скільки спектральних ліній , дозволених правилами відбору, виникає при переході атомів літію в основний стан із станів:
а) 4S;
б) 4P.

Вказівки:
Згідно з правилом відбору $\Delta l = \pm 1$ таких переходів може бути:
а) 6, а саме: 4s → 3p, 4s → 2p, 3p → 3s, 3p → 2s, 3s → 2p, 2p → 2s;
б) 12, а саме: 4p → 4s, 4p → 3s, 4p → 2s, 4p → 3d, 4s → 3p, 4s → 2p, 3d → 3p, 3d → 2p, 3p → 3s, 3p → 2s, 3s → 2p, 3p → 2s.

Тема 11. Квантові характеристики електронів в атомах.

<u>Аудиторне заняття 11.</u>

5.16. Виписати можливі терми атомів які мають крім заповнених оболонок:
а) два електрони *s* та *p*;
б) два електрони p та d;
в) три електрони *s, p,* та *d.*

Вказівки:
а) s-електрон: $l_1 = 0$, $s_1 = 1/2$; p-електрон: $l_2 = 0$, $s_2 = 1/2$.
Вираз $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ накладає обмеження на квантове число L: $|l_1 - l_2| \le L \le l_1 + l_2$.
$1 \le L \le 1 \Rightarrow L = 1$
Вираз $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ накладає обмеження на квантове число S: $|s_1 - s_2| \le S \le s_1 + s_2$.
$0 \le S \le 1 \Rightarrow S = 0,1$
Вираз $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ накладає обмеження на квантове число J: $|L - S| \le J \le L + S$.
Розглянемо можливі варіанти:
L=1, S=0: $1 \le J \le 1 \Rightarrow J = 1$.
L=1, S=1: $0 \le J \le 2 \Rightarrow J = 0,1,2$.
Спектральні терми записуються як ${}^{2S+1}L_J$, тобто в нашому випадку це: ${}^{1}P_1$ - синглетне P_1, ${}^{3}P_0$ - триплетне P_0, ${}^{3}P_1$, ${}^{3}P_2$.

б) p-електрон: $l_1 = 1$, $s_1 = 1/2$; d-електрон: $l_2 = 2$, $s_2 = 1/2$.
$|l_1 - l_2| \le L \le l_1 + l_2$.
$1 \le L \le 3 \Rightarrow L = 1,2,3$
$|s_1 - s_2| \le S \le s_1 + s_2$.
$0 \le S \le 1 \Rightarrow S = 0,1$
$|L - S| \le J \le L + S$.
Розглянемо можливі варіанти:
L=1, S=0: $1 \le J \le 1 \Rightarrow J = 1 \Rightarrow {}^{1}P_1$.
L=1, S=1: $0 \le J \le 1 \Rightarrow J = 0,1 \Rightarrow {}^{3}P_0, {}^{3}P_1$.
L=2, S=0: $2 \le J \le 2 \Rightarrow J = 2 \Rightarrow {}^{1}D_2$.
L=2, S=1: $1 \le J \le 3 \Rightarrow J = 1,2,3 \Rightarrow {}^{3}D_1, {}^{3}D_2, {}^{3}D_3$.
L=3, S=0: $3 \le J \le 3 \Rightarrow J = 3 \Rightarrow {}^{1}F_3$.
L=3, S=1: $2 \le J \le 4 \Rightarrow J = 2,3,4 \Rightarrow {}^{3}F_2, {}^{3}F_3, {}^{3}F_4$.

в) s-електрон: $l_1 = 0$, $s_1 = 1/2$; p-електрон: $l_2 = 1$, $s_2 = 1/2$; d-електрон: $l_3 = 2$, $s_3 = 1/2$.
$|l_1 - l_2 + l_3| \le L \le l_1 + l_2 + l_3$ (зліва має бути найменше значення, справа – найбільше).
$1 \le L \le 3 \Rightarrow L = 1,2,3$
$|s_1 - s_2 + s_3| \le S \le s_1 + s_2 + s_3$.
$1/2 \le S \le 3/2 \Rightarrow S = 1/2, 3/2$
$|L - S| \le J \le L + S$.
L=1, S=1/2: $1/2 \le J \le 3/2 \Rightarrow J = 1/2, 3/2 \Rightarrow {}^{2}P_{1/2}, {}^{2}P_{3/2}$.
L=1, S=3/2: $1/2 \le J \le 5/2 \Rightarrow J = 1/2, 3/2, 5/2 \Rightarrow {}^{4}P_{1/2}, {}^{4}P_{3/2}, {}^{4}P_{5/2}$.
Таким самим чином знаходяться терми при L=2,3.

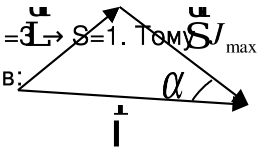
5.19. Визначити можливу мультиплетність:

а) терму $D_{3/2}$;
б) термів атомів Li, Be, та B, якщо збуджуються електрони тільки зовнішніх незамкнутих під оболонок.

Вказівки:
а) $D_{3/2}$ означає, що L=2, J=3/2.

5.22. Знайти кут між спіновим та повним механічними моментами в векторній моделі атома:
а) який знаходиться в стані D з максимально можливим значенням повного механічного моменту;
б) який має крім заповнених оболонок три електрони (*p, d,* та *f*) та який має максимально можливий для цієї конфігурації повний механічний момент.

Вказівки:
а) ${}^3D$ означає, що L=2; 2S+1=3 → S=1. Тому $J_{\max} = 3$.



Вирахуємо довжини векторів:

$$|\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$$
$$|\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar$$
$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar = \sqrt{12}\hbar$$

та запишемо теорему косинусів: $L^2 = S^2 + J^2 - 2|\vec{S}||\vec{J}|\cos\alpha$. Виразимо α та підставимо отриманні довжини векторів. $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \alpha = 35°$

б) p-електрон: $l_1 = 1$, $s_1 = 1/2$, $J_{1\max} = 3/2$; p-електрон: $l_2 = 2$, $s_2 = 1/2$, $J_{2\max} = 5/2$; d-електрон: $l_3 = 3$, $s_3 = 1/2$, $J_{3\max} = 7/2$.
$L = l_1 + l_2 + l_3 = 6$, $S = s_1 + s_2 + s_3 = 3/2$, $J = J_1 + J_2 + J_3 = 15/2$.
Аналогічно до попередньої частини знаходимо довжини векторів та кут між ними:

$$|\vec{S}| = \sqrt{\frac{15}{4}}\hbar, |\vec{L}| = \sqrt{42}\hbar, |\vec{J}| = \sqrt{\frac{225}{4}}\hbar \Rightarrow \cos\alpha = 0.62 \Rightarrow \alpha = 51.7°.$$

5.23. Атом знаходиться в стані ${}^4F$ маючи при цьому максимально можливий повний механічний момент. Визначити кратність виродження цього стану по *J*. Який фізичний зміст одержаної величини?

Вказівки:
${}^4F$ означає, що L=3; 2S+1=4 → S=3/2; → $J_{\max} = 9/2$.
Кратність виродження по J знаходитися як $2J+1$ та дорівнює 10. Це число станів з різними значеннями m_j.

<u>Домашнє завдання 11.</u>

5.15. Знайти можливі значення повних механічних моментів електронних оболонок атомів в станах ${}^4P$ и ${}^5D$

Вказівки:
${}^4P$ означає, що L=1; 2S+1=4 → S=3/2; → $1/2 \le J \le 5/2 \quad J = 1/2, 3/2, 5/2$.

Тобто $|\mathbf{l}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar = (\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{15}}{2}; \frac{\sqrt{35}}{2})\hbar$

^5D означає, що L=2; 2S+1=5 → S=2; → $0 \le J \le 4 \Rightarrow J = 0, 1, 2, 3, 4$.

$|\mathbf{l}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar = (0; \sqrt{2}; \sqrt{6}; 2\sqrt{3}; 2\sqrt{5})\hbar$

5.25. Знайти максимально можливий кут між спіновим та повним механічними моментами в векторній моделі атома, який знаходиться в стані з мультіплетністю п'ять та кратністю виродження по *J* сім. Вказати спектральний символ цього стану.

Вказівки:

Мултіплетність п'ять означає, що $2S+1=5 \Rightarrow S=2$, кратність виродження по J сім – $2J+1=7 \Rightarrow J=3$, тому $L_{\max} = 2+3=5$. З цього маємо спектральний символ стану $^5H_3$.

Для знаходження максимально можливого кута між спіновим та повним механічним моментами скористуємось вирішенням задачі 5.22 з аудиторного заняття, тобто знаходимо довжини векторів:

$$|\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$$

$$|\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar = \sqrt{30}\hbar$$

$$|\vec{\mathbf{l}}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar = 2\sqrt{3}\hbar$$

та з теореми косинусів знаходимо максимальний кут:

$\cos\alpha = -0.707 \Rightarrow \alpha = 135°$.

5.28. Знайти максимальне число електронів, які мають в атомі однакові наступні квантові числа:

а) орбітальне квантове число *l;*

б) головне квантове число *n*

Вказівки:

а) Число значень m_l дорівнює $(2l+1)$ помножене на число m_s *(2),* тобто число електронів $N_{ел}(l) = 2(2l+1)$.

б) $N_{ел}(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2[1+3+5+...+(2n-1)] = 2\frac{n[1+2n-1]}{2} = 2n^2$

***Тема 12*. Природа рентгенівських променів. Оже-ефект.**

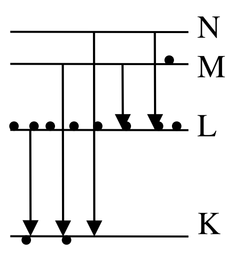
<u>Аудиторне заняття 12.</u>

5.56. Визначити довжину хвилі K_α - лінії елемента періодичної системи, починаючи з якого слід очікувати виникнення *L* – серії характеристичного рентгенівського випромінювання

Вказівки:

Запишемо закон Мозлі:

$h\nu_{k\alpha} = 10.2\,(z-1)^2$ еВ



Зробимо малюнок. Виникнення L-серії слід очікувати в елементі, який має один електрон на М-оболонці, тобто z дорівнює $2(\mathrm{K}) + 8(\mathrm{L}) + 1(\mathrm{M}) = 11$. Це натрій.

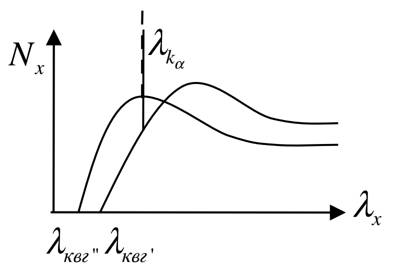
Підставим довжину хвилі $\lambda_{k_\alpha} = \frac{c}{\nu}$ до закону мозлі:

$h\frac{c}{\lambda_{k_\alpha}} = 10.2\,(z-1)^2$ еВ и знайдемо λ.

$\lambda_{k_\alpha} = hc/[10.2(z-1)^2] = 1.22$.

5.60. При збільшенні напруги на рентгенівській трубці від 10 до 20 кВ різниця довжин хвиль K_α–лінії та короткохвильової границі суцільного спектру збільшилась в три рази. Який елемент використовується в якості антикатода.

Вказівки:



Зробимо малюнок: для різних напруг на рентгенівський трубці маємо різні довжини хвиль короткохвильової границі та однакову довжину хвилі характеристичного випромінювання.

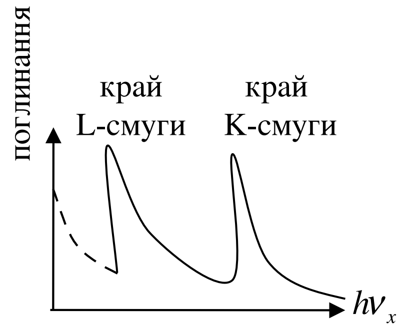
Запишемо зв'язок між енергією випромінювання та потенціалом на рентгенівській трубці: $h\nu_{квг} = eV_{уск}$ та довжину хвилі характеристичного випромінювання (див. вказівки до 5.56) $\lambda_{k_\alpha} = hc/[10.2(z-1)^2]$.

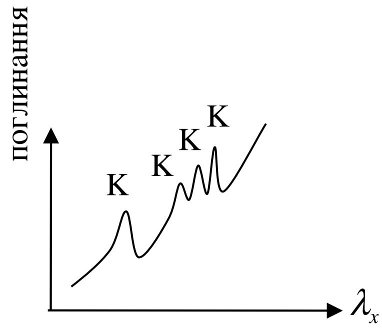
З умов задачі маємо: $\dfrac{(\lambda_{k_\alpha} - \lambda_{квг'})}{(\lambda_{k_\alpha} - \lambda_{квг''})} = 3$.

Підставимо формули написані вище та отримаємо $z = 29$, тобто антикатод виготовлено з міді.

5.62. Які серії характеристичного спектру збуджуються в молібдені та серебрі K_α–випромінюванням срібла?

Вказівки:





Зробимо малюнки.

L-полоса поглинання матиме у своєму склади 3 рівня – один s та два p (за рахунок спін-орбітального розщеплення – $j = 1/2, 3/2$).

Скористуємось таблицею з додавання 2 (Іродов).

		Край смуги поглинання, пм			
z	Елемент	K	L_1	L_2	L_3
47	Срібло	48,6	323,6	351	369,5
42	Молібден	61,9	430,5	471,5	491

Розрахуємо енергію K_α – випромінювання срібла:

$$h\nu_{K_\alpha}\,еВ = 10.2(47-1)^2 = 21583$$

та енергії на краях K-смуг молібдену й срібла:

Mo: $E_{зв}^K\,еВ = \dfrac{hc}{\lambda_K} = 20032$ - енергія зв'язку менша за енергію випромінювання срібла – тому існують усі серії;

Ag: $E_{зв}^K\,еВ = \dfrac{hc}{\lambda_K} = 25514$ - енергія зв'язку більша за енергію K_α – випромінювання срібла – тому не існує K-серія. Перевіримо чи існує L-серія: $E_{зв}^{L_1}\,еВ = \dfrac{hc}{\lambda_{L_1}} = 3831$, енергія зв'язку L-серії менша за енергію випромінювання – тому існують усі серію крім K-серії.

5.69. При опроміненні атомів криптону рентгенівськими променями з довжиною хвилі λ знайдено, що в деяких випадках вилітає два електрони: фотоелектрон, вивільнений з K-оболонки, та електрон вивільнений внаслідок ефекту Оже з L– оболонки. Енергія зв'язку K- та L– електронів відповідно дорівнює 14,4 та 2,0 кеВ. Вирахувати:

а) кінетичну енергію обох електронів, якщо λ =65 пм;

б) λ , при якій енергії обох електронів однакові.

Вказівки:

а) Запишемо формулу Ейнштейна:

$\frac{hc}{\lambda_x} = E_{зв}^K + K_{ф/е}$, звідси кінетична енергія фотоелектрона

$K_{ф/е} = \frac{hc}{\lambda_x} - E_{зв}^K = 19.1\ кеВ - 14.4\ кеВ = 4,7\ кеВ$.

Енергія Оже-електрона знаходиться як:

$K_{Оже} = (E_{зв}^K - E_{зв}^L) - E_{зв}^L = 14.4\ кеВ - 2\ кеВ - 2\ кеВ = 10.4\ кеВ$.

б) Із умови: $K_{Оже} = K_{ф/е}$, тому

$\frac{hc}{\lambda_x} - E_{зв}^K = E_{зв}^K - 2E_{зв}^L$, звідси довжина хвилі $\lambda_x = \frac{hc}{2(14.4-2)} = 50пм$.

<u>Домашнє завдання 12</u>

5.55. Користуючись законом Мозлі, вирахувати довжину хвиль і енергії фотонів, які відповідають K_α - лініям алюмінію (${}_{13}^{27}Al$) і кобальту (${}_{27}^{59}Co$).

Вказівки:

Запишемо закон Мозлі:

$h\nu_{K_\alpha} = 10.2\ (z-1)^2\ еВ$.

Виходячи з нього знаходимо енергію фотонів:

Co: $z = 27 \Rightarrow h\nu_{K_\alpha} = 10.2\ (27-1)^2\ еВ = 6.9\ кеВ$ та довжину хвилі: $\lambda = \frac{hc}{E} = 179.7пм$.

Аналогічно і для алюмінію ($z = 13$): $h\nu_{K_\alpha} = 1.47\ кеВ$, $\lambda = 844пм$.

5.58. Для елементів кінця періодичної системи поправка в законі Мозлі значно відрізняється від одиниці. Впевнитись в цьому на прикладі олова (Z=50), цезію (Z=55) та вольфраму (Z=74), довжини хвиль K_α –ліній яких відповідно дорівнюють 49,2; 40,2; 21,0 пм.

Вказівки:

Довжина хвилі K_α - лінії знаходиться як: $\lambda_{K_\alpha} = \frac{hc}{h\nu_{K_\alpha}} = \frac{hc}{10.2(z-n)^2}$.

Звідси знаходимо поправку $n = z - \sqrt{\frac{hc}{10.2\ \lambda_{K_\alpha}}}$.

Для Sn: $n = 50 - \sqrt{\frac{1240}{10.2 \cdot 49.2 \cdot 10^{-3}}} = 0.29$,

Cs: $n = 55 - \sqrt{\frac{1240}{10.2 \cdot 40.2 \cdot 10^{-3}}} = 0.008$,

W: $n = 74 - \sqrt{\frac{1240}{10.2 \cdot 21 \cdot 10^{-3}}} = -2.09$.

5.59. Знайти напругу на рентгенівській трубці з нікелевим антикатодом (*Z=28*), якщо різниця довжини хвиль K_α - лінії та короткохвильової межі неперервного рентгенівського спектру дорівнює *0,84 Å*.

Вказівки:

Із умови задачі $\lambda_{K_\alpha} - \lambda_{кхг} = 0.84Å$. Запишемо вирази для λ_{K_α} і $\lambda_{кхг}$:

$\lambda_{кхг} = \dfrac{hc}{eV_{прискорення}}$ і $\lambda_{K_\alpha} = \dfrac{hc}{10.2ев(z-1)^2}$. Підставимо їх в умову та виразимо напругу:

$$V = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{0.84Å} + 10.2(z-1)^2\right) = \left(\frac{1240}{0.84}\cdot 10 + 10.2(28-1)^2\right)ев = 22.198$$

5.67. Знайти кінетичну енергію електронів вирваних з K- оболонки атомів молібдену K_α – випромінюванням срібла? (Ag, Z=47; Mo: край K-смуги поглинання 61.9 пм)

Вказівки:

Запишемо формулу Ейнштейна: $E_{K_\alpha} = E^K_{зв} + K_{ф/е}$.

Енергія K_α - випромінювання срібла із закону Мозлі дорівнює:

$$h\nu_{K_\alpha} = 10.2(47-1)^2 = 21,6\ кеВ.$$

Енергія зв'язку K-електрона $E^K_{зв} = \dfrac{hc}{\lambda_{Ккраю}}$.

Кінетична енергія фотоелектрона:

$$K_{ф/е} = h\nu_{K_\alpha} - \frac{hc}{\lambda_{Ккраю}} = 21.6\ кеВ - \left(\frac{1240}{61,9}/1000\right)кеВ = 1,55\ кеВ.$$

Тема 13. Збуджені стани молекул: електронні, коливальні та обертальні збудження.

Аудиторне заняття 13.

7.1. Знайти за допомогою таблиць Додатку для молекул H_2 та NO:
а) енергію, необхідну для збудження їх на перший обертовий рівень (l_r=1);
а) кутову швидкість обертання с стані з l_r=1.
7.9. Знайти енергію необхідну для збудження молекул H_2 та J_2 з основного стану на перший коливальний рівень (v=1). У скільки разів ця енергія більше енергії збудження даної молекули на перший обертовий рівень (l_r =1)?
7.13. Визначити максимально можливе коливальне квантове число, відповідну коливальну енергію та енергію дисоціації двохатомної молекули, власна частота коливань якої ν а коефіцієнт ангармонійності *x*. Вирахувати ці величини для молекули H_2.
Додаток: Константи двохатомних молекул

Молекула	Масове число	Міжядерна відстань, 10^{-8} см	Частота коливань, *k*, $см^{-1}$	Ангармонійність, *x*, 10^{-3}	Енергія дисоціації E_D, eB
H_2	1	0.741	4395.2	28.5	4.48
N_2	14	1.094	2359.6	6.15	7.37
O_2	16	1.207	1580.4	7.65	5.08
Cl_2	35	1.988	564.9	7.09	2.48
NO	14; 16	1.150	1906	7.55	5.29
HCl	1; 36	1.275	2989.7	17.4	4.43
J_2	127	2.67	214.6	2.84	1.54

Домашнє завдання 13

7.2. Знайти для молекули *HCl* квантові числа l_r двох сусідніх обертових рівнів, різниця енергій яких становить 7,86 меВ.
7.14. Вирахувати коефіцієнт ангармонійності молекули Cl_2, якщо відомі її частота коливань та енергія дисоціації.

Тема 14. Випромінювання твердих тіл. Емпіричні закони випромінювання (Віна, Стефана-Больцмана, Планка).

<u>Аудиторне заняття 14.</u>

1.3. Початкова температура теплового випромінювання T=2000K. На скільки кельвінів змінилася ця температура, якщо найбільш вірогідна довжина хвилі в його спектрі збільшилась на $\Delta\lambda$ =250 нм?

1.5. Сонячний спектр випромінювання близький до спектру абсолютно чорного тіла, для якого найбільш імовірна довжина хвилі $\lambda_m=0,48$ *мкм*. Знайти потужність теплового випромінювання Сонця. Знайти час, протягом якого його маса зменшиться на *1%* (за рахунок теплового випромінювання). Маса сонця 2×10^{30} *кг*, його радіус R=7×10^{8} *м*. Стала в законі Стефана-Больцмана 5,7x10^{12}Вт/(см^{2}K^4), а стала в законі Віна b_λ=0,29см.K. Знайти найбільш імовірну довжину хвилі в спектрі теплового випромінювання з випромінювальною здатністю *5.7 Вт/см^2*.(Стала в законі Стефана – Больцмана $\sigma=5,7\times 10^{-8}$ *Вт/м^{2}K^4*, стала в законі Віна $b_\lambda=0,29$ *см$\cdot$ K).*

1.8. Мідну кульку з радіусом ***r****=1,0* см з чорною поверхнею помістили до вакуумної посудини, температура стінок якої підтримується при *0°K*. Початкова температура кульки $T_0=300°K$. Через який час його температура зменшиться в 1,5 рази? Теплоємність міді ***c****=0,38 Дж/(г K)*, густина $\boldsymbol{\rho}$*=8,9 г/см^3*. Стала в законі Стефана-Больцмана σ=5,67x10^{-8} Вт/(м^{2}K^4).

1.16. Перетворити формулу Планка до виду, який відповідає розподілу:
а) по круговим частотам;
б) по довжинам хвиль.
1.19. За допомогою формули Планка визначити числові значення сталих:
а) в законі Віна;
б) в законі Стефана-Больцмана.

<u>Домашнє завдання 14</u>

1.1. Скориставшись формулою Віна [$u_\nu = \nu\, f(\nu/T)$] показати, що:
а) найбільш вірогідна частота теплового випромінювання ν_m~T;
б) енергетична світимість M~T^4 (закон Стефана-Больцмана).
1.4. Знайти найбільш вірогідну довжину хвилі в спектрі теплового випромінювання з енергетичною світимістю M = 5,7 Вт/см^2.
1.8. Він запропонував наступну формулу для розподілу енергії в спектрі теплового випромінювання $u(\nu) = A\nu^3 exp(-\alpha\nu / T)$, де $\alpha = 7.64\times10^{12}$ сек$\times$ *K*. Знайти за допомогою цієї формули найбільш імовірну частоту випромінювання для *T=2000 K*