Задачи по курсу «Электродинамика»,
предлагаемые студентам 3 курса физико-технического факультета в 5 семестре

В порядковом номере задачи в скобках указывается либо номер этой же задачи в «Сборнике задач по электродинамике» В.В. Батыгина и И.Н. Топтыгина, либо номер задачи и страница в «Теории поля» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, издания 1988 г.

I. Векторный анализ

Задание 1.

1(39). Доказать тождества:
а) $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi$;
б) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div}\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi$;
в) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\operatorname{grad}\varphi$;
г) $\operatorname{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\cdot\mathbf{B}$;
д) $\operatorname{rot}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$;
е) $\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B} + \mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$.

У к а з а н и е. Доказательство этих тождеств следует производить с помощью оператора ∇, пользуясь правилами дифференцирования и перемножения векторов и не переходя к проекциям на оси координат.

2(40). Доказать тождества:
а) $\mathbf{C}\cdot\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{A}$;
б) $(\mathbf{C}\cdot\nabla)(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}\times(\mathbf{C}\cdot\nabla)\mathbf{A}$;
в) $(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B} = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A}$
г) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\operatorname{rot}\mathbf{C} = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{C} - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{C}$;
д) $(\mathbf{A}\times\nabla)\times\mathbf{B} = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B} - \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B}$;
е) $(\nabla\times\mathbf{A})\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B} - \mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}$.

3(41). Вычислить $\operatorname{grad}\varphi(r)$; $\operatorname{div}\varphi(r)\mathbf{r}$; $\operatorname{rot}\varphi(r)\mathbf{r}$; $(\mathbf{l}\cdot\nabla)\varphi(r)\mathbf{r}$.

4(42). Найти функцию $\varphi(r)$, удовлетворяющую условию $\operatorname{div}\varphi(r)\mathbf{r} = 0$.

5(43). Найти дивергенции и вихри следующих векторов: $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$, $\varphi(r)(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$, $\mathbf{r}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – постоянные векторы.

6(44). Вычислить $\operatorname{grad}\mathbf{A}(r)\cdot\mathbf{r}$, $\operatorname{grad}\mathbf{A}(r)\cdot\mathbf{B}(r)$, $\operatorname{div}\varphi(r)\mathbf{A}(r)$, $\operatorname{rot}\varphi(r)\mathbf{A}(r)$, $(\mathbf{l}\cdot\nabla)\varphi(r)\mathbf{A}(r)$.

7(49). Интеграл по объему $\int(\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A})dV$ преобразовать в интеграл по поверхности.

8(50). Вычислить интегралы $\oint\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})dS$, $\oint(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}\,dS$, где $\mathbf{a}$ – постоянный вектор, $\mathbf{n}$ – орт нормали поверхности.

9(51). Интегралы по замкнутой поверхности $\oint\mathbf{n}\varphi\,dS$, $\oint(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\,dS$, $\oint(\mathbf{n}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}\,dS$ ($\mathbf{b}$ – постоянный вектор, $\mathbf{n}$ – орт нормали) преобразовать в интегралы по объему, заключенному внутри поверхности.

У к а з а н и е. Решение выполнить по образцу предыдущей задачи.

10(56). Интеграл $\oint u df$, взятый по некоторому замкнутому контуру, преобразовать в интеграл по поверхности, опирающейся на этот контур (u, f – скалярные функции координат).

11(57). Доказать тождество:
$$\int[\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{B}) - \mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{A})]\,dV = \oint[(\mathbf{B}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\times\operatorname{rot}\mathbf{B})]\,d\mathbf{S}.$$

II. Преобразования Лоренца

Задание 2.

12(543). Пусть система S' движется относительно системы S со скоростью V вдоль оси x. Часы, покоящиеся в S' в точке (x_0', y_0', z_0'), в момент t_0' проходят мимо точки (x_0, y_0, z_0) в системе S, где находятся часы, показывающие в этот момент времени t_0. Написать формулы преобразования Лоренца для этого случая.

13(545). Длину стержня, движущегося вдоль своей оси в некоторой системе отсчета, можно находить таким образом: измерять промежуток времени, в течение которого стержень проходит мимо фиксированной точки этой системы, и умножать его на скорость стержня. Показать, что при таком методе измерения получается обычное лоренцево сокращение.

14(546). Система S' движется относительно системы S со скоростью V. В момент, когда начала координат совпадали, находившиеся там часы обеих систем показывали одно и то же время $t = t' = 0$. Какие координаты в каждой из этих систем в дальнейшем будет иметь мировая точка, обладающая тем свойством, что находящиеся в ней часы систем S и S' показывают одно и то же время $t = t'$. Определить закон движения этой точки.

15(547). Пусть для измерения времени используется периодический процесс отражения светового «зайчика» попеременно от двух зеркал, укрепленных на концах стержня длиной l. Один период – это время движения «зайчика» от одного зеркала до другого и обратно. Световые часы неподвижны в системе S' и ориентированы параллельно направлению движения. Пользуясь постулатом о постоянстве скорости света, показать, что интервал собственного времени $d\tau$ выражается через промежуток времени dt в системе S формулой $d\tau = dt\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

16(548). Решить предыдущую задачу для случая, когда световые часы ориентированы перпендикулярно направлению относительной скорости.

17(549). «Поезд» $A'B'$, длина которого $l_0 = 8,64 \cdot 10^8$ *км* в системе, где он покоится, идет со скоростью $V = 240000$ *км/сек* мимо «платформы», имеющей такую же длину в своей системе покоя. В голове B' и хвосте A' «поезда» имеются одинаковые часы, синхронизированные между собой. Такие же часы установлены в начале A и в конце B «платформы». В тот момент, когда голова «поезда» поравнялась с началом «платформы», совпадающие часы показывали 12 *час* 00 *мин*. Ответить на следующие вопросы: а) можно ли утверждать, что в этот момент в какой-либо системе отсчета все часы также показывают 12 *час* 00 *мин*; б) сколько показывают каждые из часов в момент, когда хвост «поезда» поравнялся с началом «платформы»; в) сколько показывают часы в момент, когда голова «поезда» поравнялась с концом платформы?

18(550). Какой промежуток времени Δt занял бы по земным часам полет ракеты до звездной системы Проксима – Центавра и обратно (расстояние до неё 4 световых года), если бы он осуществлялся с постоянной скоростью $v = \sqrt{0,9999}\ c$? Из расчета какой длительности путешествия следовало бы запасаться продовольствием и другим снаряжением? Каков запас кинетической энергии T $[T = (\gamma - 1)mc^2]$ в такой ракете, если ее масса 10^4 *кг*?

19(551). Два масштаба, каждый из которых имеет длину покоя l_0 равномерно движутся навстречу друг другу параллельно общей оси x. Наблюдатель, связанный с одним из них, заметил, что между совпадением левых и правых концов масштабов прошло время Δt. Какова относительная скорость v масштабов? В каком порядке совпадают их концы для наблюдателей, связанных с каждым из масштабов, а также для наблюдателя, относительно которого оба масштаба движутся с одинаковой скоростью в противоположные стороны?

Задание 3

20(552). Вывести формулу лоренцева преобразования от системы S' к системе S для радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и времени t, не предполагая, что скорость $\mathbf{V}$ системы S' относительно S параллельна оси x. Результат представить в векторной форме.

21(554). Вывести формулы сложения скоростей для случая, когда скорость $\mathbf{V}$ системы S' относительно S имеет произвольное направление. Формулы представить в векторном виде.

22(555). Даны три системы отсчета: S, S' и S''. Система S'' движется относительно S' со скоростью V', параллельной оси x'. S' – относительно S со скоростью V, параллельной оси x. Соответствующие оси всех трех систем параллельны. Записать преобразования Лоренца от S'' к S и получить из них формулу сложения параллельных скоростей.

23(556). Доказать формулу

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - v'^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}/c^2},$$

где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ – скорости частицы в системах S и S', $\mathbf{V}$ - скорость S' относительно S.

24(557). Доказать соотношение

$$v = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}' + \mathbf{V})^2 - (\mathbf{v}' \times \mathbf{V})^2/c^2}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}/c^2},$$

где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ – скорости частицы в системах S и S', $\mathbf{V}$ – скорость S' относительно S.

25(560). Два пучка электронов летят навстречу друг к другу со скоростями $v = 0,9\ c$ относительно лабораторной системы координат. Какова относительная скорость V электронов: а) с точки зрения наблюдателя в лаборатории; б) с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с одним из пучков электронов.

Задание 4

26(553). Записать формулы преобразования Лоренца для произвольного 4-вектора $A_i = (A_0, \mathbf{A})$, не предполагая, что скорость $\mathbf{V}$ системы S' относительно S параллельна оси x.

27(559). Два масштаба, каждый из которых имеет в своей системе покоя длину l_0, движутся навстречу друг другу с равными скоростями v относительно некоторой системы отсчета. Какова длина l каждого из масштабов, измеренная в системе отсчета, связанной с другим масштабом.

28(561). Эффекты, возникающие при столкновении двух элементарных частиц, не зависят от равномерного движения этих частиц как целого; эти эффекты определяются лишь их относительной скоростью. Одну и ту же относительную скорость можно сообщить сталкивающимся частицам двумя способами (предполагается для простоты, что частицы обладают одинаковой массой m): а) один ускоритель разгоняет частицы до энергии $\mathcal{E}$, затем быстрые частицы ударяются о неподвижную мишень из тех же частиц; б) два одинаковых ускорителя расположены так, чтобы создаваемые ими пучки частиц были направлены навстречу друг другу; каждый из ускорителей при этом должен разгонять частицы до энергии $\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}$.

Сравнить между собой значения $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_0$. Рассмотреть, в частности, ультрарелятивистский случай.

29(562). Найти формулу преобразования ускорения $\dot{\mathbf{v}}$ для случая, когда система S' движется относительно системы S с произвольно направленной скоростью $\mathbf{V}$. Представить эти формулы преобразования в векторном виде.

Задание 5.

30(563). Выразить компоненты четырехмерного ускорения w_i через обычное ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ и скорость $\mathbf{v}$ частицы. Найти w_i^2. Пространственноподобно или времениподобно ускорение?

31(564). Выразить ускорение $\dot{\mathbf{v}}'$ частицы в мгновенно сопутствующей ей инерциальной системе через ее ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ в лабораторной системе. Рассмотреть случаи, когда скорость $\mathbf{v}$ меняется только по величине или только по направлению.

32(568). Относительно системы S движутся система S' со скоростью $\mathbf{V}$ и два тела скоростями $\mathbf{v_1}$ и $\mathbf{v_2}$. Каков угол α между скоростями этих тел при наблюдении в системе S и в системе S'?

У к а з а н и е. Воспользоваться результатами задач 554 и 557.

33(569). Что происходит с углом между скоростями двух тел, рассмотренных в предыдущей задаче, когда скорость системы S' относительно S стремится к c?

34(572). Пучок света в некоторой системе отсчета образует телесный угол $d\Omega$. Как изменится этот угол при переходе к другой инерциальной системе отсчета?

35(573). Если считать, что звёзды в ближайшей к нам части Галактики распределены равномерно, то каково будет их распределение $dN/d\Omega'$ для наблюдателя в ракете, летящей со скоростью, близкой к скорости света? Для фиксированного значения скорости ракеты построить приблизительную зависимость распределения звёзд от полярного угла в системе, связанной с ракетой.

III. Энергия и импульс

Задание 6.

36(621). Выразить импульс p релятивистской частицы через ее кинетическую энергию T.

37(622). Выразить скорость $\mathbf{v}$ частицы через ее импульс $\mathbf{p}$.

38(623). Частица с массой m обладает энергией $\mathcal{E}$. Найти скорость v частицы. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

39(624). Найти приближенные выражения кинетической энергии T частицы с массой m: а) через ее скорость v и б) через ее импульс p с точностью до v^4/c^4 и p^4/m^4c^4 соответственно, при $v \ll c$.

40(635). π^0-мезон движется со скоростью v и распадается на лету на два γ-кванта.Найти угловое распределение γ-квантов распада $dW/d\Omega$ в лабораторной системе отсчета, учитывая, что в системе покоя π^0-мезона оно сферически симметрично.

41(636). Выразить энергию π^0-мезона, рассмотренного в предыдущей задаче, через отношение f числа γ-квантов распада, испускаемых в переднюю полусферу, к числу γ-квантов, испускаемых в заднюю полусферу.

Контрольная работа №1
по темам «Векторный анализ» и «Преобразования Лоренца» (задания 1–4)

Задание 7.

42(640). Определить массу m некоторой частицы, зная, что она распадается на две частицы с массами m_1, m_2. Из опыта известны величины импульсов p_1, p_2 частиц, образовавшихся при распаде, угол θ между их направлениями. Вычислить массу заряженного π-мезона, распадающегося по схеме $\pi \to \mu + \nu$, если из опыта известно, что π-мезон до распада покоился, а μ-мезон получил после распада импульс $p_\mu c = 29,8$ *Мэв*. Масса μ-мезона, $m_\mu c^2 = 105,7$ *Мэв*.

43(641). Определить массу m_1 некоторой частицы, зная, что она представляет собой одну из двух частиц, образовавшихся при распаде частицы с массой m и импульсом p. Импульс p_2, масса m_2 и угол θ_2 вылета второй частицы, образовавшейся при распаде, также известны.

44(642). Частица с массой m_1 и скоростью v сталкивается с покоящейся частицей массы m_2 и поглощается ею. Найти массу m и скорость V образовавшейся частицы.

45(651). Частица с массой m налетает на покоящуюся частицу с массой m_1. Происходит реакция, в которой рождается ряд частиц с общей массой M. Если $m + m_1 < M$, то при малых кинетических энергиях налетающей частицы реакция не идет – она запрещена законом сохранения энергии. Найти минимальное значение кинетической энергии налетающей частицы (энергетический порог T_0 реакции), начиная с которого реакция становится энергетически возможной.

46(654). Доказать, что рождение пары электрон – позитрон одним γ-квантом возможно только, если в реакции участвует частица с массой покоя $m_1 \neq 0$ (внутренне состояние этой частицы не меняется; ее роль состоит в том, что она принимает часть энергии и импульса, делая возможным выполнение закона сохранения). Найти порог T_0 реакции рождения пары.

47(655). Доказать, что законом сохранения энергии-импульса запрещена аннигиляция пары электрон – позитрон, сопровождаемая испусканием одного γ-кванта, но нет запрета на реакцию аннигиляции пары с испусканием двух фотонов.

48(674). Доказать, что излучение и поглощение света свободным электроном в вакууме невозможно. Исходить из закона сохранения энергии – импульса.

Задание 8.

49(625). Найти скорость v частицы с массой m и зарядом e, прошедшей разность потенциалов V_e (начальная скорость равна нулю). Упростить общую формулу для нерелятивистского и ультрарелятивистского случаев (учесть по два члена разложения).

50(626). Найти скорость v частиц в следующих случаях: а) электроны в электронной лампе ($T = 300$ *эв*); б) электроны в синхротроне на 300 *Мэв*; в) протоны в синхроциклотроне на 680 *Мэв*; г) протоны в синхрофазотроне на 10 *Гэв*.

51(629). В линейном ускорителе частица ускоряется в щели между полыми цилиндрическими электродами – «пролётными трубками», вдоль общей оси которых проходит траектория частицы. Ускорение происходит под действием высокочастотного электрического поля с частотой $\nu = \text{const}$. Разгоняются те частицы, которые проходят все промежутки между трубками при наличии там ускоряющего поля. Каковы должны быть длины пролетных трубок, чтобы частица с зарядом e и массой m пролетала через ускоряющие промежутки в те моменты времени, когда на них имеется максимальное напряжение V_e? Оценить также полную длину ускорителя с N пролётными трубками.

52(685). Выразить друг через друга вектор силы, действующей на частицу в лабораторной системе ($\mathbf{F}$) и в системе покоя ($\mathbf{F}'$). Скорость частицы $\mathbf{v}$.

IV. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле

Задание 9.

53(692). Частица с зарядом e и массой m движется с произвольной скоростью в однородном постоянном электрическом поле $\mathbf{E}$. В начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат и имела импульс $\mathbf{p}_0$. Получить зависимости трёхмерных координат и времени t частицы в лабораторной системе в виде функций её собственного времени τ. Исключив τ, представить трёхмерные координаты частицы в зависимости от t. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

54(693). Найти траекторию заряженной частицы с зарядом e и массой m в однородном постоянном электрическом поле $\mathbf{E}$, используя результаты задачи 692. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский случай.

55(694). Найти пробег l релятивистской заряженной частицы с зарядом e, массой m и начальной энергией $\mathcal{E}$ в тормозящем однородном электрическом поле E, параллельном начальной скорости частицы.

56(702). Нерелятивистская заряженная частица с зарядом e и массой m проходит через двумерное электростатическое поле с потенциалом $\varphi = k(x^2 - y^2)$, где $k = \text{const} > 0$ (линза с сильной фокусировкой). В момент времени $t = 0$ частица находится в точке с координатами x_0, y_0, z_0; начальная скорость v_0 параллельна оси z. Определить движение частицы.

Задание 10.

57(695). Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется в однородном постоянном магнитном поле $\mathbf{H}$. В начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$, обладая импульсом $\mathbf{p}_0$. Определить закон движения частицы.

58(697). Релятивистская частица движется в параллельных однородных постоянных электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{H}$ полях ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{H} \parallel z$). При $t = 0$ частица находилась в начале координат, обладая импульсом $\mathbf{p}_0 = (p_{0x}, 0, p_{0z})$. Определить зависимость x, y, z, t от собственного времени частицы τ.

59. [Л.Л., стр. 74 (1988 г.) или 71 (1973 г.)]. Выразить ускорение частицы через ее скорость и напряженность электрического и магнитного полей.

60. [Л.Л., стр. 82 (1988 г. или 79 (1973 г.)]. Определить частоты колебаний заряженного пространственного осциллятора, находящегося в постоянном однородном магнитном поле, собственная частота колебаний осциллятора (при отсутствии поля) равна ω.

Контрольная работа №2 по темам «Преобразования Лоренца» и «Энергия и импульс» (задания 5–8)

Задание 11.

61(698(а)). Определить закон движения частицы во взаимно перпендикулярных однородных постоянных электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{H}$ полях. Решить задачу, используя преобразования Лоренца и считая известным движение частицы в чисто электрическом или чисто магнитном поле (см. задачи 692 и 695).

62(698(б)). Определить закон движения частицы во взаимно перпендикулярных однородных постоянных электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{H}$ полях. Решить задачу, интегрируя уравнения: $\frac{dp^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k$ или $mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k$.

63(603). Записать формулы преобразования для векторов поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ при переходе к системе S', движущейся относительно системы S с произвольно направленной скоростью $\mathbf{V}$. Представить формулы преобразования в векторном виде.

64(605). В системе отсчета S электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны: $\mathbf{E}\perp\mathbf{H}$. С какой скоростью относительно S должна двигаться система S', в которой имеется только электрическое или только магнитное поле? Всегда ли существует решение, и единственно ли оно?

Задание 12.

65(604). В системе отсчета S имеется однородное электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$. С какой скоростью относительно S должна двигаться S', в которой $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{H}'$. Всегда ли задача имеет решение и единственно ли оно? Чему равны абсолютные значения $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$?

66(703). Найти дифференциальные уравнения движения релятивистской частицы в электромагнитном поле, исходя из функции Лагранжа в цилиндрических координатах.

У к а з а н и е. При вычислении производной по времени в уравнениях Лагранжа нужно учитывать, что эта производная берется вдоль траектории частиц, так что r, α, z должны рассматриваться как функции времени.

67(704). Между обкладками цилиндрического конденсатора с радиусами a и b $(a < b)$ поддерживается разность потенциалов V. В пространстве между обкладками имеется аксиально симметричное магнитное поле, напряженность которого параллельна оси конденсатора. Из внутренней обкладки, играющей роль катода, вылетают электроны с нулевой начальной скоростью. Найти критическое значение потока магнитного поля $\Phi_{\text{кр.}}$ между обкладками, при котором электроны перестанут попадать на анод вследствие искривления их траекторий в магнитном поле.

68(705). Длинный прямой цилиндрический катод радиуса a, по которому течет равномерно распределенный ток $\mathscr{I}$, испускает электроны с нулевой начальной скоростью. Эти электроны движутся под действием ускоряющего потенциала V к длинному коаксиальному аноду радиуса b. Каково должно быть минимальное значение разности потенциалов $V_{\text{кр.}}$ между катодом и анодом, чтобы электроны достигали анода, несмотря на заворачивающее действие магнитного поля тока $\mathscr{I}$?

Задание 13.

69(706). По бесконечно длинному прямому цилиндрическому проводу радиуса a течет ток $\mathscr{I}$. С поверхности провода срывается электрон, начальная скорость v_0 которого направлена вдоль провода. Найти наибольшее расстояние b, на которое электрон может удалиться от оси проводника.

70(717). В бетатроне во время ускорения электрона магнитное поле непрерывно нарастает, порождая разгоняющую электрон э. д. с. индукции, а орбита его остается неизменной. Доказать, что для ускорения электрона на орбите постоянного радиуса, необходимо, чтобы полный магнитный поток Φ, пронизывающий орбиту, был вдвое больше потока Φ_0, который получился бы, если бы поле внутри орбиты было однородно и равно полю на орбите (бетатронное правило «2 : 1»).

71(708). Релятивистская частица с зарядом $-e$ и массой m движется в поле неподвижного точечного заряда Ze. Найти уравнение траектории частицы. Исследовать возможные траектории в случае, когда момент импульса $K > Ze^2/c$.

У к а з а н и е. Воспользоваться законом сохранения энергии и уравнениями, полученными в задаче 703.

72(709). Исследовать возможные траектории частицы, рассмотренной в предыдущей задаче, в том случае, когда $K \leq Ze^2/c$.

Задание 14.

73(610). Найти потенциалы φ, $\mathbf{A}$ и поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ точечного заряда e, движущегося равномерно со скоростью $\mathbf{V}$, произведя преобразование Лоренца от системы отсчета, в которой заряд покоится.

74(611). Показать, что электрическое поле равномерно движущегося точечного заряда «сплющивается» в направлении движения. При этом происходит ослабление поля E на линии движения заряда по сравнению с кулоновым полем. Как согласуется это ослабление с формулой преобразования $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$?

V. Постоянное электрическое поле в вакууме

75(81). Заряд распределен сферически симметричным образом: $\rho = \rho(r)$. Разбив распределение заряда на сферические слои, выразить через $\rho(r)$ потенциал φ и напряженность $\mathbf{E}$ поля (записать φ и $\mathbf{E}$ в виде однократного интеграла по r).

76(94а). Найти потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от системы зарядов $q, -2q$ и q, расположенных вдоль оси z на расстоянии a друг от друга (линейный квадруполь).

77(94б). Найти потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от следующей системы зарядов: заряды $\pm q$ расположены в вершинах квадрата со стороной a так, что соседние заряды имеют разные знаки, причем в начале координат находится заряд $+q$, а стороны квадрата параллельны осям x и y (плоский квадруполь).

Задание 15.

78(83). Заряд электрона распределен в атоме водорода, находящемся в нормальном состоянии, с плотностью $\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} \times \exp\left[-\frac{2r}{a}\right]$, $a = 0,529 \cdot 10^{-8}$ *см* – боровский радиус атома, $e_0 = 4,80 \cdot 10^{-10}$ CGSE – элементарный заряд. Найти потенциал φ_e и напряженность E_{er} электрического поля электронного заряда, а также полные потенциал φ и напряженность поля $\mathbf{E}$ в атоме, считая, что протонный заряд сосредоточен в начале координат. Построить приблизительный ход величин φ и E.

79(119). Каким распределением зарядов создается потенциал, имеющий в сферических координатах вид: $\varphi(r) = qe^{-ar}/r$, где α, q - постоянные?

80(120). Каким должно быть распределение зарядов, чтобы созданный им потенциал имел в сферических координатах вид $\varphi(r) = \frac{e_0}{a}[\frac{a}{r} + 1]\exp[-\frac{2r}{a}]$, где e_0, a – постоянные?

81(110). Найти уравнения силовых линий системы двух точечных зарядов: заряда $+q$, находящегося в точке $z = a$, и заряда $\pm q$, находящегося в точке $z = -a$; начертить силовые линии. Имеются ли в поле точки равновесия?

У к а з а н и е. Вследствие симметрии силовые линии располагаются в плоскостях $\alpha = \text{const}$, а напряженности E_z и E_r не зависят от α (цилиндрические координаты). Переменные в дифференциальном уравнении силовых линий разделяются после замены: $u = \frac{z+a}{r}$, $v = \frac{z-a}{r}$.

Контрольная работа №3
по темам «Движение заряженных частиц в электромагнитном поле» и «Постоянное электрическое поле в вакууме» (задания 11–14)

Задание 16.

82(112). Найти уравнение силовых линий линейного квадруполя (см. 94а) и нарисовать примерную картину силовых линий.

83(121). Найти энергию взаимодействия U электронного облака с ядром в атоме водорода. Заряд электрона распределен в атоме с объемной плотностью $\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3}\exp[-\frac{2r}{a}]$, где e_0 – элементарный заряд (ср. с задачей 83), a – постоянная (боровский радиус атома).

84(122). В некотором приближении можно считать, что электронные облака обоих электронов в атоме гелия имеют одинаковый вид и характеризуются объемной плотностью $\rho = -\frac{8e_0}{\pi a^3}\exp[-\frac{4r}{a}]$, где a – боровский радиус атома, e_0 – элементарный заряд. Найти энергию взаимодействия U электронов в атоме гелия в этом приближении (нулевое приближение теории возмущений).

85. [Л.Л. стр. 144(139)]. Определить отношение магнитного и механического моментов для системы из двух зарядов (e$_1, e_2$ и m_1, m_2 – заряды и массы зарядов, скорости зарядов малы по сравнению с c, начало координат выбрать в центре инерции обеих частиц).

VI. Электромагнитные волны

Задание 17 (факультатив).

86. [Л.Л. стр. 153(148) №1]. Определить силу, действующую на стенку, от которой отражается (с коэффициентом отражения R) падающая на нее плоская электромагнитная волна.

87. [Л.Л. стр. 153(148) №2]. Методом Гамильтона–Якоби определить движение заряда в поле плоской электромагнитной волны.

88. [Л.Л. стр. 160(155) №2]. Определить движения заряда в поле плоской монохроматической линейно поляризованной волны.

89. [Л.Л. стр. 160(156) №3]. Определить движение заряда в поле монохроматической поляризованной по кругу волны.

Дата последней редакции: 20.12.2010 (А.Г. Сотников).