ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ПО КУРСУ "МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ"(Ш семестр)

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Общие понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Простейшие типы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

1. Решить уравнения: а) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 1;\ y(1) = 2.$

б) $\frac{dy}{dx} = y^2; \quad y(x_0) = y_0.$

2. Решить уравнение: $\frac{dx}{dy} = \sin x \quad x_0(t = 0) = \frac{\pi}{4}.$

Описать качественное решение для всех $t > 0$. Каково поведение $x(t)$ при $t \to \infty$ для произвольного начального условия $x_0(t_0)$.

3. Найти все фиксированные точки уравнения $\frac{dx}{dt} = x^2 - 1$ и классифицировать их устойчивость.

4. Исследовать типы фиксированных точек уравнения $\frac{dx}{dt} = \alpha + x^2$ в зависимости от значений параметра α.

5. С помощью метода изоклин нарисовать решения уравнений: $y' = y - x^2; \quad y' = x^2 = \frac{x^2+y^2}{2} - 1; \quad y' = \frac{y}{x+y}.$

6. Найти множество екстремальных точек решений уравнения: $\frac{dy}{dx} = y - x^2.$

7. Построить дифференциальное уравнение семейства кривых: $y = (x - C)^3 \quad (C = const; \quad -\infty < x < \infty).$

8. Построить уравнение семейства плоских кривых, ортогональных к семейству кривых, определенных уравнением $x^2 = y + C_x$.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

1. Решить задачи и для каждой из них построить несколько интегральных кривых:

1) $y' = 3y^{2/3}$. 2) $e^x dx - (1 + e^x) y dy = 0, \quad y(0) = 1.$

3) $(x^2 + 1)(y^2 - 1)dx + xydy = 0,$ 4) $xydx + (x + 1)dy = 0.$

5) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy,$ 6) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1.$

7) $y'\mathrm{ctg}x + y = 2, \quad y(0) = -1,$ 8) $y' - xy^2 = 2xy.$

9) $xy' + y = y^2; \quad y(1) = \frac{1}{2}.$ 10) $2x^2yy' + y^2 = 2;$

11) $x\frac{dx}{dt} + t = 1;$ 12) $y' = \cos(y - x).$

2. Решить однородные уравнения:

1) $(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy$ 2) $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

3) $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x+y}{x},$ 4) $2y + (x^2y + 1)xy' = 0.$

3. Линейные уравнения 1-го порядка.

Примеры:

1) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$. 2) $\frac{dy}{dx} - 2xy = 3x^2 - 2x^4$.

Решить примеры: 1) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$ 2) $\frac{dy}{dx} - 2xy = 3x^2 - 2x^4$.

2. Решить задачи:

1) $x^2y' + xy + 1 = 0$; 2) $(2e^y = x)y' = 1$; 3) $y' = \frac{y}{3x-y^2}$;

4) $(x+1)(y' + y^2) = -y$; 5) $xdx = (x^2 - 2y + 1)dy$;

6) $(x+1)(yy' - 1) = y'$ 7) $x(e^y - y') = 2$;

8) $(x^2 - 1)y' \sin y + 2x \cos y = 2x - 2x^3$;

9) $y(x) = \int\limits_o^x y(t)dt + x + 1$;

10) $\int\limits_0^x (x-t)y(t)dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)dt$.

3. Проинтегрировать уравнения Бернулли:

1) $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}$, 2)$x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$, 3) $x^3\frac{dy}{dx} \cdot \sin y + 2y = x\frac{dy}{dx}$.

4. Проинтегрировать уравнение Риккати: $\frac{dy}{dx} + ay(y-x) = 1$, если известно его частное решение $y = x$.

4. Уравнение в полных дифференциалах.

Примеры. Проинтегрировать уравнения.

1) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$, 2) $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$;

3) $y(y^2+1)dx + x(y^2-x+1)dy = 0$, 4) $(x^2-y^2+y)dx + x(2y-1)dy = 0$;

5) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$; 6) $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$;

7) $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$ 8)$(x-y)dx + (x+y)dy = 0$,

9) $(3y^2 + 2xy + 2x)dx = (6xy + x^2 + 3)dy = 0$,

10) $(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y \cdot dy = 0$,

11) $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0$.

5. Уравнения, не разрешенные относительно производной.

Примеры: 1)$(y')^2 - (2x+y)y' + 2xy - 0$, 2) $(y')^2 + y(y-x)y' - xy^3 = 0$, 3) $(y')^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy \sin x = 0$.

Пример. В каких точках плоскости xoy нарушается единственность решений уравнения $(y')^2 - (y + x^2)y' + x^2y = 0$.

Написать три разных решения этого уравнения, проходящих через точки (0,0) и (1,1).

Решить уравнения:

1)$e^{y'} + y' = x$, 2) $x^3 + (\frac{dy}{dx})^3 - 3x\frac{dy}{dx} = 0$, 3) $y = y' + \ln y'$,

4) $(\frac{dy}{dx})^3 - y^2(a - \frac{dy}{dx}) = 0$, 5) $(y')^3 - 1 = 0$,

6) $(\frac{dy}{dx})^3 - 4xy\frac{dy}{dx} + 8y^2 = 0$; 7) $y = (\frac{dy}{dx})^2 - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}$.

Решить уравнения Лагранжа:

1)$y = 2x\frac{dy}{dx} + (\frac{dy}{dx})^2$; 2) $y = 2xy' - (y')^3$. 3)$y' + y = x(y')^2$.

Решить уравнение $y = x + 2y' - (y')^2$ и найти его особое решение.

Решить уравнения Клеро: 1) $xy' - y = \ln y'$; 2) $y = xy' - (y')^2$; 3) $y + xy' = 4\sqrt{y'}$; 4) $x(y')^2 + 1 = 2yy'$; 5) $y = x(y')^2 - 2(y')^3$.

Решить уравнения методом введения параметра:

1) $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$; 2) $y'(x - \ln y') = 1$; 3) $y = \ln(1 + (y')^2)$;
4) $(y')^4 - (y')^2 = y^2$; 5) $(y')^2 - (y')^3 = y^2$; 6) $x((y')^2 - 1) = 2y'$;
7) $y = 2xy' + y^2(y')^3$; 8) $y = xy' - x^2(y')^3$.

Решить уравнения:

1) $y - y' = y^2 + xy'$; 2) $x^2y' = y(x + y)$; 3) $xy' = e^y + 2y'$;
4) $2(x - y^2)dy = ydx$; 5) $y' = \frac{1}{x - y^2}$.

6. Особые точки уравнений 1-го порядка. Исследовать особые точки уравнений и дать чертежи расположения интегральных кривых:

1) $y' = \frac{2x+y}{3x+4y}$; 2) $y' = \frac{x-4y}{2y-3x}$; 3) $y' = \frac{2x-y}{x-y}$;
4) $y' = \frac{x+4y}{2x+3y}$; 5) $y' = \frac{x-2y}{3x-4y}$; 6) $y' = \frac{4x-y}{3x-2y}$.

7. Уравнения n-го порядка, разрешимые в квадратурах. Уравнения, допускающие понижения порядка.

Решить уравнения:

1) $y''' = \ln x$; $x_0 = 1$, y_0, y_0', y_0'' - любые числа. 2) $e^{y''} + y'' = x$;
3) $y''' = \sqrt{1 - x^2}$; $(y'')^3 - 2y'' - x = 0$. 4) $ay'' = -(1 + (y')^2)^{3/2}$.

Проинтегрировать уравнение движения:

$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$; $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0$, $x(t = 0) = x_0$.

Решить уравнения:

1) $x^2y'' = (y')^2$; 2) $y^3y'' = 1$; 3) $(y')^2 + 2yy'' = 0$.
4) $y''' = (y'')^2$; 5) $y'' \cdot y = (y')2 - (y')^3$; 6) $yy'' = y'(y' + 1)$.
7)$xy'' - y' = x^2yy'$; 8) $x^2yy'' = (y - xy')^2$; 9) $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{(y')^2}{y}$.

Понизить порядок приведенных ниже уравнений, пользуясь их однородностью, и решить их:

1)$xyy'' - x(y')^2 = yy,'$ 2) $(x^2 + 1)((y')^2 - yy'') = xyy'$.
3) $y'' = (2xy - \frac{5}{x})y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$, 4) $x^2(2yy'' - (y')^2) = 1 - 2xyy'$.
5) $x^2yy'' + (y')^2 = 0$, 6) $x^2((y'^2) - 2yy'') = y^2$;
7) $yy' + xyy'' - x(y')^2 = x^3$.

Решить уравнения:

1) $\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{1}{x}\frac{d^4y}{dx^4} = 0$, 2) $y\frac{d^2y}{dx^2} - (\frac{dy}{dx})^2 = 0$;

3) $4y' + (y'')^2 = 4xy''$; 4) $(1+y^2)yy'' = (3y^2-1)(y')^2$.

8. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.

Пример. Исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми.

1) $x+2$, $x-2$. 3) $\sin x$, $\cos x$. 5) x, 0, e^x.

2) $6x+9$, $8x+12$. 4) e^x, e^{2x}, e^{3x}. 6) x, e^x, xe^x.

Найти общие решения уравнений, зная их частные решения.

1) $xy''+2y'-xy=0$, $y_1 = \frac{e^x}{x}$. 2) $y''-2(1+\mathrm{tg}^2 x)y = 0$, $y_1 = \mathrm{tg} x$.

9. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Найти общее решение однородных уравнений.

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$. 2) $y'' + a^2 y = 0$,

3) $y''' - y' = 0$, 4) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$,

5) $y'' + 4y' + 5y = 0$ 6) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$,

7) $4y'' + 4y' + y = 0$, 8) $y''' - 8y = 0$. 9) $y^{IV} + 4y = 0$.

10)$y^V - 10y''' + 9y' = 0$, 11) $y'''' - 3y + 2y = 0$ 12) $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$

13. $y'' - y' = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

Решить уравнения (методом стандартной правой части или операторным методом).

1) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$, 2) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$,

3) $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$, 4) $y'' - y = 4\mathrm{sh} x$,

5) $y'' + y = 4xe^x$, 6) $y'' = 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$,

7) $y'' - 2y' + 2y = (x + e^x)\sin x$, 8) $y'' - 7y' + 12y = 5$,

9) $y'' + y = 4\sin x$, 10) $y'' + 9y = \exp(5x)$,

11) $y'' - 4y = \sin\frac{3}{2}x \sin\frac{x}{2}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

12) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f \cdot \cos\omega t$;

13) $y'' - 2y' = 2xe^x$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

Решить уравнения Эйлера.

1) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$. 2) $x^3y''' + xy' - y = 0$. 3) $x^3y'' - 2xy = 6\ln x$.

4) $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$. 5) $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$.

10. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Найти общее решение уравнений методом вариации постоянных.

1) $xy'' - y' = x^2$. 2) $\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = f(t)$. 3)$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

Построить функцию Коши для уравнений $y'' + \omega^2 y = 0$; $y'' - ay = 0$.

Найти решение уравнения $y'' + y - 2y = 3te^t$ методом Коши.

Найти решение неоднородного уравнения

$y''' + y'' = f(x); \quad y(x_0) = y'(x_0) = y''(x_0) = 0$

1) методом вариации постоянных;

2) методом Коши.

Найти решение уравнения методом Коши: $y'' + y = x\cos x$.

11. Краевые задачи.

Решить уравнения

1) $y'' + y = 0; \quad y(0) = A, \quad y(\frac{\pi}{2}) = B; \qquad$ 2) $y'' + y = 0; \quad y(0) = 3, \quad y(\pi) - -3;$

3) $y'' + y = 0; \quad y(0) = 3, \quad y(\pi) = 2.$

Определить значения λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(l) = 0$ и найти эти решения.

Пример. Найти решения уравнений

$y'' - y' = 0; \quad y(0) = 3; \quad y(1) - y'(1) = 1.$

$x^2 y'' - 2y = 0; \quad y(1) = 1;$

$$\lim_{x\to\infty} y'(x) = 0.$$

Пример. Построить функцию Грина для задачи

$y'' + y = f(x); \quad y(0) = 0; \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0.$

Пример. Найти решение краевой задачи

$y'' + y = sinx; \quad y(0) = 0; \quad y(\frac{x}{2}) = 0.$

Пример. Построить функцию Грина для краевой задачи.

$y'' - y = f(x); \quad y(x)$ ограничено при всех $x \in (-\infty, \infty)$.

Пример. Построить функцию Грина для краевой задачи $y'' = f(x); \quad y(-1) = y(1) = 0; \quad -1 < x < 1.$

12. Системы дифференциальных уравнений.

Примеры. Проинтегрировать системы дифференциальных уравнений путем сведения к одному уравнению более высокого порядка.

1) $\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = x. \qquad$ 2) $\frac{dx}{dt} = 3x - 2y; \quad \frac{dy}{dt} = 2x - y$

3) $\frac{d^2x}{dt^2} = y; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = x.$

Примеры. Решить системы уравнений методом нахождения интегрируемых комбинаций.

1) $\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = x. \quad$ 2) $\frac{dx}{dt} = y - z; \quad \frac{dy}{dt} = z - x, \quad \frac{dz}{dt} = x - y.$

3) $\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$

4) $\frac{dx}{dt} = y - z; \quad \frac{dy}{dt} = x + y + t; \quad \frac{dz}{dt} = x + z + t.$

5) $\frac{dx}{2z - y} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}; \qquad$ 6) $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}.$

7) $\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$;   8) $\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$.

9) $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}$;   10. $\frac{dx}{x+y-xy^2} = \frac{dy}{x^2y-x-y} = \frac{dz}{y^2-x^2}$.

Решить системы уравнений:

1) $y' = \frac{y^2}{z-x}$; $z' = y+1$.   2) $y' = y^2 z$; $z' = \frac{z}{x} = yz^2$.

3) $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$;   4) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}$.

5) $\frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$;   6) $-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy-2z^2} = \frac{dz}{xz}$.

7) $-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy-2z^2} = \frac{dz}{xz}$.

Решить системы уравнений:

1) $\frac{dx}{dt} = x+2y$; $\frac{dy}{dt} = y+2x$.

2) $\frac{dy_1}{dt} = y_1 - y_2$; $\frac{dy_2}{dt} = y_1 + 3y_2$.

3) $\frac{dx}{dt} = 5x+2y$; $\frac{dy}{dt} = -4x - y$.

4) $\frac{dx}{dt} = 3x+y$; $\frac{dy}{dt} = -x+y$; $x(0)=1$; $y(0)=0$.

5) $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = y - 4x$ 6) $\dot{x} + x - 8y = 0$; $\dot{y} - x - y = 0$ 7) $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = 3y - 2x$

8) $\dot{x} = x - 3y$, $\dot{y} = 3x + y$ 9) $\dot{x} = 3x - y$, $\dot{y} = 4x - y$ 10) $\dot{x} = 3x - y$, $\dot{y} = 4x - y$.

11) $\dot{x} = 2x + 2z - y$
$\dot{y} = x + 2z$ $(\lambda_2 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm 1)$
$\dot{z} = y - 2x - z$.

Решить линейные неоднородные системы:

1) $\dot{x} = y + 2e^t$, $\dot{y} = x + t^2$ 2) $\dot{x} = 3x - 4y + e^{-2t}$, $\dot{y} = x - 2y - 3e^{-2t}$ 3) $\dot{x} = 2x - y$, $\dot{y} = y - 2x + 18t$

4) $\dot{x} = x - y + 8t$, $\dot{y} = 5x - 1$ 5) $\dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t}$, $\dot{y} = 2x - y$

6) $\dot{x} = x + 2y$, $\dot{y} = x - 5\sin t$ 7) $\dot{x} = 2x + 4y - 8$, $\dot{x} = 2x + 4y - 8$ 8) $\dot{x} = 3x - 6y$, $\dot{y} = x - 2y + 2\sin t$.

9) $\dot{x} = 2x - 4y$
$\dot{y} = x - 3y + 3e^t$.

13. Приближенные методы интегрирования дифференциальных уравнений.

Пример. Найти методом последовательных приближений решение уравнения $y' = x - y$; $y(0) = 1$.

Пример. Построить несколько последовательных приближений решения системы:
$\frac{dy_1}{dx} = x + y_1 y_2$, $\frac{dy_2}{dx} = x^2 - y_1^2$; $y_1(0) = 1$; $y_2(0) = 0$.

Пример. Найти решение уравнений в виде степенного ряда, удовлетворяющие начальным условиям (до x^n вкючительно):

1) $y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
2) $y' = y^2 - x; \quad y(0) = 1.$
3) $y' = 2x + \cos y; \quad y(0) = 0.$
4) $y' = x^2 + y^3; \quad y(1) = 1.$

Пример. Построить общее решение уравнения $y'' - xy = 0$ в виде степенного ряда.

Пример. Найти 2 члена разложения решения в ряд по степеням малого параметра ϵ: $y' = \frac{2}{y} - 5\epsilon x; \quad y(1) = 2.$

14. Уравнения в частных производных первого порядка.

Задачи. Найти решения уравнений:

1) $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad u(0, y) = py^2.$
2) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad u(x, 1) = x.$
3) $x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} + z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 4.$
4) $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = -xy.$
5) $(1 + \sqrt{z - x - y})\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2; z = 2x$ при $y = 0.$
6) $x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} + z^2\frac{\partial u}{\partial z} = u.$
7) $z\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz; \; x + y = 2, \; yz = 1.$
8) $xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$
9) $(x + z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y + z)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$
10) $y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}.$
11) $z\frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2)\frac{\partial z}{\partial y} + x = 0; \; y = x^2, \; z = 2x.$
12) $(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y; \quad z = y = -x.$
13) $x\frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y)\frac{\partial z}{\partial y} = z; \; x + y = 2z; \; xz = 1.$

15. Теория устойчивости.

Примеры. Исследовать на устойчивость тривиальное решение систем.

1) $\frac{dx}{dy} = 2x + 5y; \quad \frac{dy}{dt} = -x + 2y.$
2) $\frac{dx}{dt} = -4x + 6y; \quad \frac{dy}{dt} = -3x + 5y.$
3) $\frac{dx}{dt} = -x - 4y; \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 5y.$
4) $\frac{dx}{dt} = 2x - \ln(1 + y) + \sin x; \quad \frac{dy}{dt} = e^x + \sin(x + y) - \cos^2 y.$

Пример. Исследовать на устойчивость положений равновесия математического маятника трением $\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \sin x = 0 \quad k > 0.$

Пример. При каких значениях параметров a, b, c действительные части корней многочленов.

1) $f_1(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + a\lambda + 1$.

2) $f_2(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$.

имеют отрицательные действительные значения.

16. Элементы вариационного исчисления.

Примеры. На каких кривых могут достигать экстремума функционалы:

1) $v[y(x)] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [(y')^2 - y^2]dx; \quad y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2})$.

2) $v[y(x)] = \int\limits_0^1 [(y')^2 + 12xy]dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$.

3) $v[y(x)] = \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} ds; \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1$.

4) $v[y(x)] = \int\limits_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+(y')^2}dx, \quad y(x_1) = y_1; \quad y(x_2) = y^2$.

5) $v[y(x)] = \int\limits_0^{x_1} (1 + (y'')^2 dx;$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

$y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$.

17. Ряды Фурье.

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2П, заданную в $[-\pi, \pi]$ как

$$f(x) = \begin{cases} \;\;1, \; o < x \leq \pi, \\ -1, -\pi < x \leq 0. \end{cases}$$

Примеры. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функции:

$$1) f(x) = \begin{cases} A; \; 0 \leq xl \\ 0, \; l \leq x \leq 2l. \end{cases}$$

2) $f(x) = |x|; \quad x \in (-\pi, \pi)$.

3) $f(x) = \sin ax(-\pi, \pi)$, а не целое).

4) $f(x) = \arcsin(\cos x) \;\; (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Пример. Разложить $f(x) = x^2$ в ряд Фурье по косинусам на интервале $(-\pi, \pi)$.

Пример. Разложить $f(x) = \cos zx$ на $[-\pi < x < \pi]$ по косинусам.
Пример. Разложить в тригонометрический ряд Фурье:
1) $f(x) = e^{ax}$ $(a = const \neq 0)$. (на $-\pi < x\pi$).
2) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ на $(0, 2\pi)$.