МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. В.Н. КАРАЗИНА

Ю.А. Киценко, К.Э. Немченко

Методические материалы по курсу

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Харьков, 2009

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

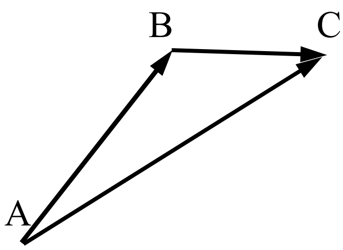
Данное методическое пособие предназначено для студентов первых курсов физико-технических специальностей. При подготовке пособия авторами использовался опыт преподавания аналитической геометрии на физико-техническом и физико-энергетическом факультетах Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина.

Предлагаемый в пособии материал разбит на 17 тем. В начале каждой темы дается небольшое теоретическое введение, за которым следуют задачи, предлагаемые для решения студентам. Рядом с номерами задач в скобках для удобства приводятся их номера по задачнику [1]. При этом задачи, имеющие теоретическое значение, и задачи повышенной сложности обозначены звездочкой. Номера задач, предлагаемых студентам для самостоятельного решения, обведены рамкой.

В разделе «РЕШЕНИЕ ИЗБРАННЫХ ЗАДАЧ» студентам предлагается подробное решение задач 1.9, 5.6, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.6(1), 12.15, 12.16. В разделе «ОТВЕТЫ» приводятся ответы к большинству задач пособия. К задачам на доказательство ответы не приводятся.

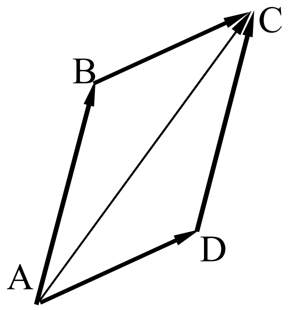
Тема 1. Линейные операции над векторами

Сложение направленных отрезков.



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Правило треугольника.

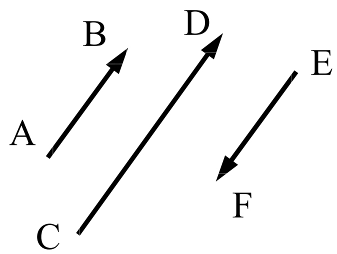


$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

Правило параллелограмма.

Умножение направленных отрезков на числа.

Примеры умножения на числа



$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AB}$$

Определение умножения направленного отрезка на число.

$$\overrightarrow{AC} = r \cdot \overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} \overrightarrow{AC} = \vec{0},\ \textit{если } r = 0 \\ |AC| = |r| \cdot |AB|,\ \textit{при этом} \begin{cases} \overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB},\ \textit{если } r > 0 \\ \overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB},\ \textit{если } r < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Задачи к теме 1

1.1(1). Векторы $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$ служат диагоналями параллелограмма *ABCD*. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

1.2(4). В треугольнике *ABC* проведены медианы *AD*, *BE* и *CF*. Представить векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$ в виде линейных комбинаций векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$\boxed{\textbf{1.3(5).}}$ В треугольнике ABC проведены медианы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$. Найти сумму этих векторов.

1.4(8). Точки *K* и *L* служат серединами сторон *BC* и *CD* параллелограмма *ABCD*. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$.

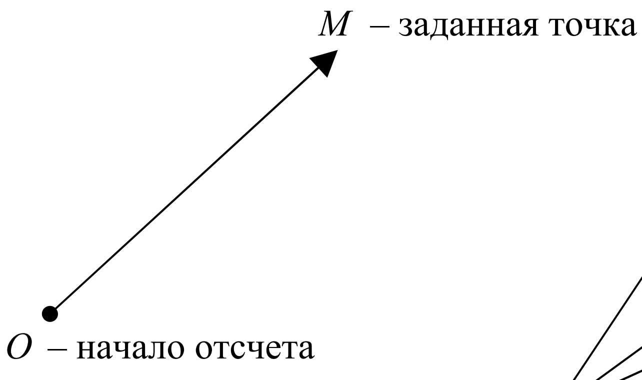
1.5(9). В плоскости треугольника *ABC* найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам треугольника, была равна нулю.

1.6(10). Дан четырехугольник *ABCD*. Найти такую точку *M*, чтобы $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

$\boxed{\textbf{1.7(13).}}$ Дан тетраэдр *ABCD*. Найти точку *M*, для которой $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

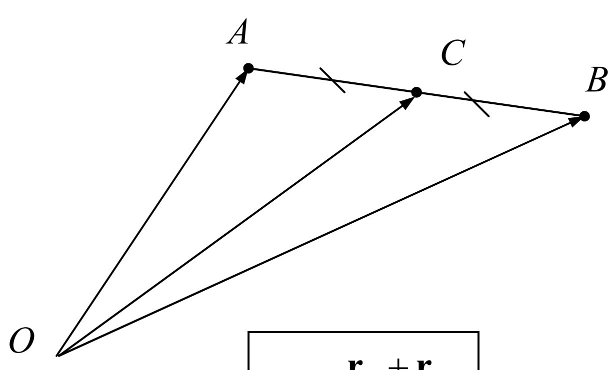
Справочный материал

Радиус-вектор



$$\boxed{\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM}}$$

Середина отрезка



$$\boxed{\mathbf{r}_C = \frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B}{2}}$$

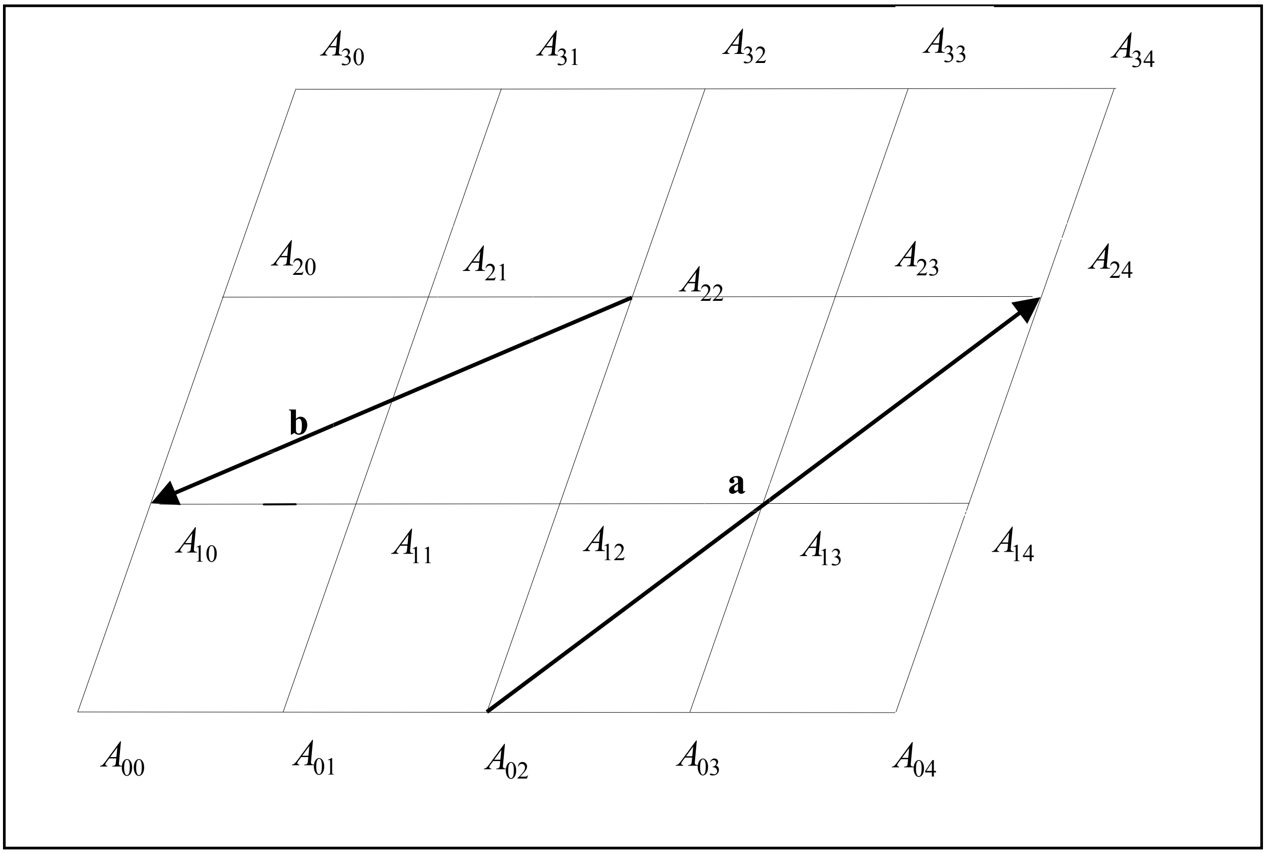
$\boxed{\textbf{1.8(17).}}$ Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна $\vec{0}$.

1.9(22). Из точки O выходят два вектора, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM} = \mathbf{c}$, идущий но биссектрисе угла AOB.

$\boxed{\textbf{1.10(25).}}$ Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Принимая за базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ **и** $\overrightarrow{AA'}$, найти в этом базисе координаты векторов совпадающих с ребрами, диагональю параллелепипеда, диагоналями ребер, для которых вершина A' служит началом.

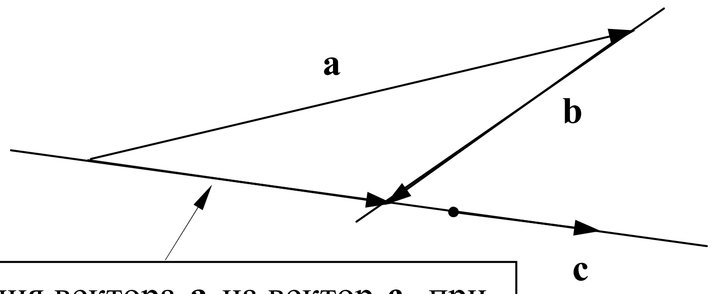
1.11. Представьте направленный отрезок, соединяющий любые две точки на рисунке в виде линейной комбинации указанных на рисунке отрезков $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_{02}A_{24}}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{A_{22}A_{10}}$. Например: $\overrightarrow{A_{01}A_{00}} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Попробуйте получить общую формулу для произвольного направленного отрезка:

$$\overrightarrow{A_{nm}A_{kl}} = ?\mathbf{a} + ?\mathbf{b}.$$



Справочный материал

Проектирование вдоль заданного вектора



Проекция вектора **a** на вектор **c**, при проектировании вдоль вектора **b**.

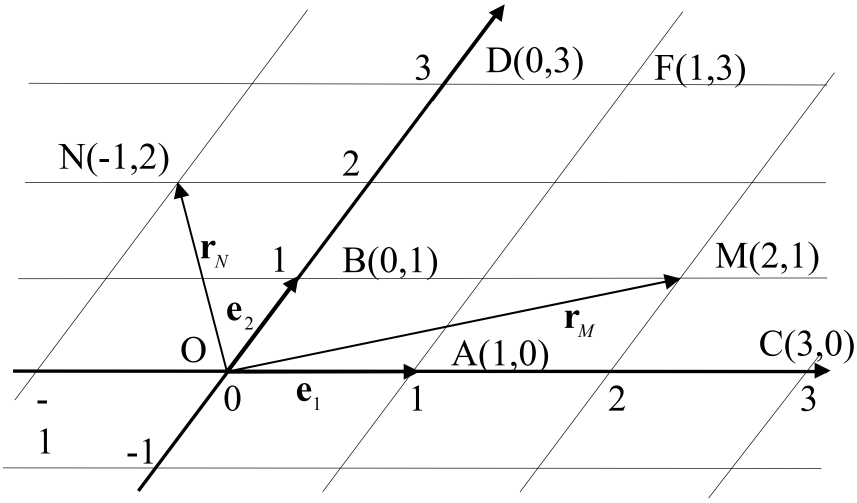
1.12(32). Даны радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, и $\mathbf{r}_3$ трех последовательных вершин параллелограмма. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}_4$ четвертой вершины этого параллелограмма.

1.13(33). Зная радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ и $\mathbf{r}_4$ четырех вершин *A*, *B*, *C*, *A'* параллелепипеда *ABCDA'B'C'D'*, найти радиусы-векторы четырех остальных его вершин.

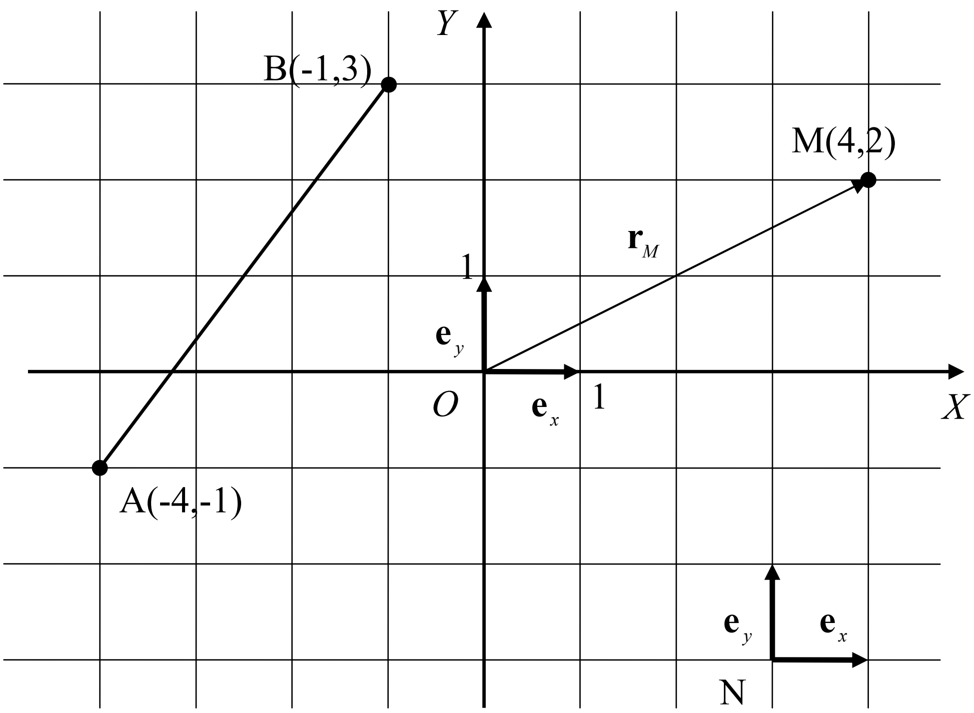
1.14(35). Даны радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ вершин треугольника *ABC*. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки пересечения его медиан. Где находится центр тяжести этого треугольника.

Тема 2. Система координат

Аффинная система координат



Декартовая система координат



Определение 2.1. Векторы $\mathbf{a}_i$ $(i = 1...N)$ называются линейно независимыми, если линейная комбинация $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{a}_i = 0$ только в случае, когда все коэффициенты $\alpha_i = 0$ $(\forall i)$.

Определение 2.2. Векторы $\mathbf{a}_i$ $(i = 1...N)$ называются линейно зависимыми, если из них можно составить линейную комбинацию $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{a}_i = 0$, в которой хотя бы один из коэффициентов не равен нулю $\exists \alpha_i \neq 0$.

Определение 2.3. Базис пространства – упорядоченный набор линейно независимых векторов, содержащий максимально возможное для данного пространства количество векторов.

Теорема 2.1. Разложение вектора пространства по базису этого пространства – единственно.

Теорема 2.2. При сложении векторов их координаты складываются, а при умножении на число – умножаются на это число:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; c_i = a_i + b_i,$$

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} \;\Leftrightarrow\; c_i = \lambda a_i.$$

Задачи к теме 2

$\boxed{\textbf{2.1(28).}}$ Установить, в каком из перечисленных ниже случаев тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ будет линейно зависима, то есть когда один из векторов можно представить в виде линейной комбинации двух других:

а) $\mathbf{a} = (5,2,1)$, $\mathbf{b} = (-1,4,2)$, $\mathbf{c} = (-1,-1,6)$;

б) $\mathbf{a} = (6,4,2)$, $\mathbf{b} = (-9,6,3)$, $\mathbf{c} = (-3,6,3)$;

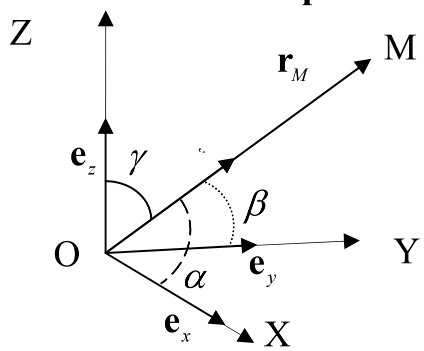
в) $\mathbf{a} = (6,-18,12)$, $\mathbf{b} = (-8,24,-16)$, $\mathbf{c} = (8,7,3)$.

2.2(30). Даны два вектора $\mathbf{a} = (2,5,14)$ и $\mathbf{b} = (14,5,2)$. Найти проекцию вектора $\mathbf{a}$ на плоскость xOy при направлении проектирования, параллельном вектору $\mathbf{b}$.

$\boxed{\textbf{2.3(31).}}$ Найти проекцию вектора $\mathbf{d} = (16,10,18)$ на плоскость, определяемую векторами $\mathbf{a} = (1,2,3)$ и $\mathbf{b} = (2,-2,1)$ при направлении проектирования, параллельном вектору $\mathbf{c} = (4,0,3)$.

Справочный материал

Направляющие косинусы



$$\cos\alpha = \mathbf{e}_x\mathbf{e}_M\,;$$
$$\cos\beta = \mathbf{e}_x\mathbf{e}_M\,;$$
$$\cos\gamma = \mathbf{e}_x\mathbf{e}_M\,;$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$\boxed{\mathbf{2.4(50).}}$ Даны две смежные вершины *A* =(–1, 3), *B* = (2, 1) параллелограмма *ABCD*. Найти две другие его вершины при условии, что диагональ *AC* параллельна оси *Ox*, а диагональ *BD* параллельна оси *Oy*.

2.5(51). Даны три вершины параллелограмма (–2, 1), (1, 3), (4, 0). Найти четвертую его вершину *D*. Система координат (далее СК) аффинная.

$\boxed{\mathbf{2.6(56).}}$ В третьем октанте найти точку, зная, что ее расстояния до осей *Ox*, *Oy*, *Oz* равны соответственно 5; $3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{13}$. СК – прямоугольная.

2.7(59). Даны две точки *A* = (1, 2, 3), *B* = (7, 2, 5). На прямой *AB* найти такую точку *M*, чтобы точки *B* и *M* были расположены по разные стороны от точки *A* и чтобы отрезок *AM* был вдвое длиннее отрезка *AB*. СК – аффинная.

В последующих задачах этой темы СК - прямоугольная

2.8(60). Дана окружность с центром в точке (6, 7) и радиусом 5. Из точки (7, 14) к этой окружности проведены касательные. Найти их длины.

2.9(61). Дана окружность радиуса 10 с центром (–4, 6). Найти точки ее пересечения с биссектрисами координатных углов.

2.10(62). Найти центр *M* и радиус *r* окружности, описанной около треугольника с вершинами (–2, –2), (2, 6), (5, –3).

$\boxed{\mathbf{2.11(66).}}$ Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки (6,0) и (4, 0) и касающейся оси *Oy*.

2.12(70). Найти точку *M*, отстоящую от точки *A* = (–4, 0, 1) на расстояние 9, зная направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{OM}$: $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$.

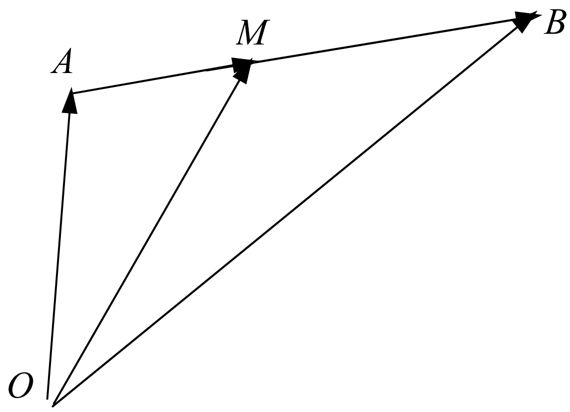
$\boxed{\mathbf{2.13(72).}}$ Луч образует с осями *Ox* и *Oy* углы, соответственно равные $\pi/4$ и $\pi/3$, а с осью *Oz* — тупой угол. Найти этот угол.

Тема 3. Деление отрезка в заданном отношении

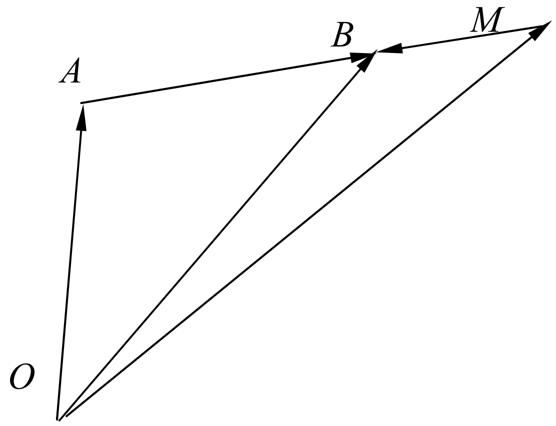
Точка M делит направленный отрезок в отношении λ:

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$

$\lambda > 0$ – точка лежит внутри отрезка



$\lambda < 0$ – точка лежит вне отрезка



Радиус-вектор точки M:

$$\mathbf{r}_M = \frac{1}{1+\lambda}\mathbf{r}_A + \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{r}_B .$$

Координаты точки M:

$$x_M = \frac{1}{1+\lambda}x_A + \frac{\lambda}{1+\lambda}x_B ,$$

$$y_M = \frac{1}{1+\lambda}y_A + \frac{\lambda}{1+\lambda}y_B , \text{ и т.д.}$$

Замечание: Если существует число λ, такое что $\mathbf{r}_M = \frac{1}{1+\lambda}\mathbf{r}_A + \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{r}_B$, то точка M лежит на прямой AB.

Задачи к теме 3

3.1(80). На оси координат даны три точки: A =(2), B =(7), C=(4). Найти:

1) отношение, в котором точка C делит отрезок $\overrightarrow{AB}$;

2) точку D, делящую отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении –2/3;

3) середину E отрезка $\overrightarrow{CD}$;

4) отношение, в котором точка E делит отрезок $\overrightarrow{AB}$.

$\boxed{\textbf{3.2(83).}}$ На оси координат даны три точки O =(0), E = (1) и M = (x). Найти отношение, в котором точка O делит направленный отрезок $\overrightarrow{ME}$.

3.3(84*). На прямой даны три точки. Точка C делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $\lambda \neq 0$. Найти отношение, в котором каждая из точек A, B, C делит направленный отрезок, определяемый двумя другими.

3.4(85*). Пусть $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AQ} = \mu \cdot \overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{AR} = \nu \cdot \overrightarrow{RB}$, причем $\mu \neq \nu$. Найти отношение, в котором точка R делит отрезок $\overrightarrow{PQ}$.

$\boxed{\textbf{3.5(86*).}}$ Пусть $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AQ} = \mu \cdot \overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{PR} = \nu \cdot \overrightarrow{RQ}$. Найти отношение, в котором точка R делит отрезок $\overrightarrow{AB}$.

3.6(91). Даны середины сторон треугольника (2, 4), (–3, 0), (2, 1). Найти его вершины. Система координат (СК) аффинная.

$\boxed{\textbf{3.7(97).}}$ Даны две точки A = (9, –1) и B = (–2, 6). В каком отношении делит отрезок AB точка C пересечения прямой AB с биссектрисой второго и четвертого координатных углов? Система координат прямоугольная.

3.8(100). Дан треугольник с вершинами A = (4, 1), B = (7, 5), C = (–4, 7). Вычислить длину биссектрисы AD угла BAC. Система координат прямоугольная.

3.9(110). Найти отношение, в котором плоскость Oyz делит отрезок $\overrightarrow{AB}$: A= (2, –1, 7) и B = (4,5, –2). Система координат аффинная.

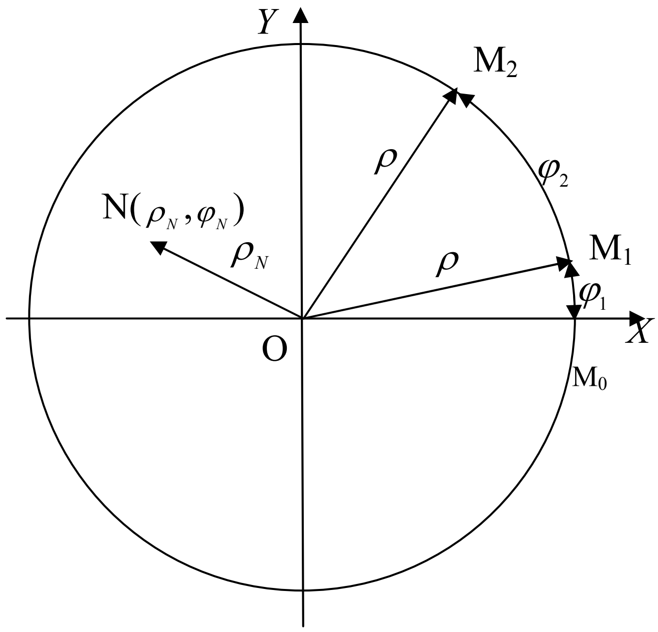
3.10(111). Даны две точки A = (8, –6, 7) и B = (–20, 15, 10). Установить, пересекает ли прямая AB какую-набудь из осей координат.

$\boxed{\textbf{3.11(112*).}}$ Даны четыре точки: A = (–3, 5, 15), B = (0, 0, 7), C = (2, –1, 4), D = (4, –3, 0). Установить, пересекаются ли прямые AB и CD, и если пересекаются, то найти точку их пересечения. Система координат аффинная.

$\boxed{\textbf{3.12(113*).}}$ Три последовательные вершины трапеции находятся в точках A = (–3, –2, –1), B = (1, 2, 3), C = (9, 6, 4). Найти четвертую вершину D этой трапеции, точку M пересечения ее диагоналей и точку S пересечения боковых сторон, зная, что длина основания AD равна 15. Система координат прямоугольная.

Тема 4. Различные системы координат

Полярная система координат



Прямые преобразования

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

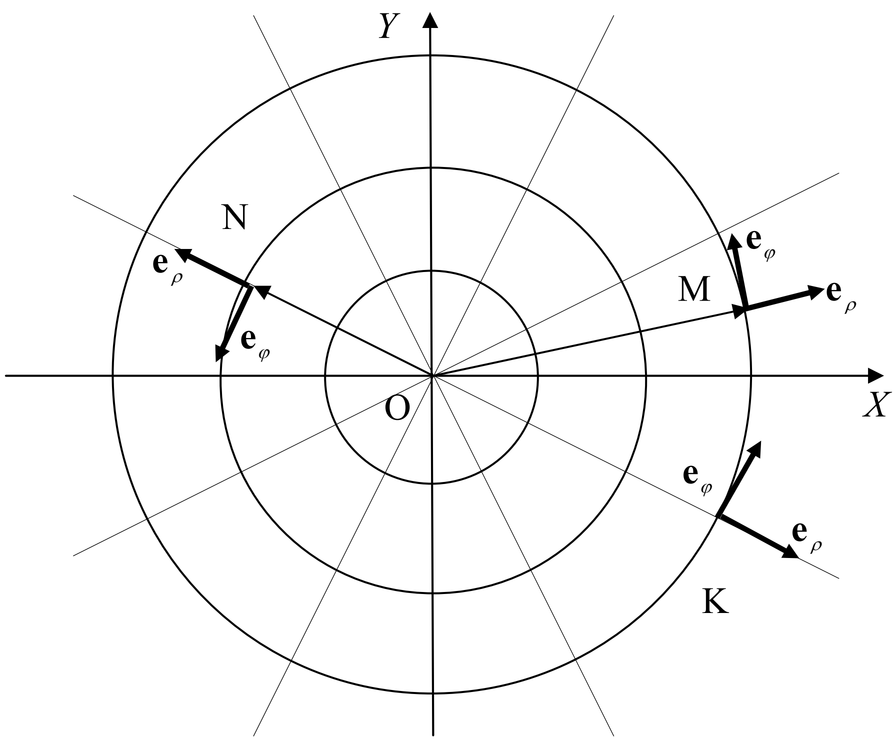
Обратные преобразования

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

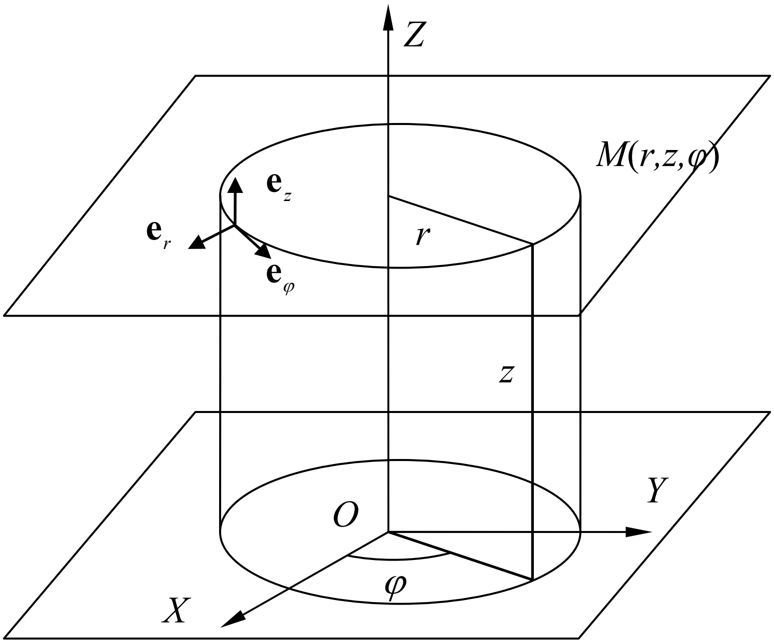
Если $-\pi/2 < arctg\varphi < \pi/2$,

то $\varphi = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) + \begin{cases} 0, \text{если } x > 0 \\ \pi, \text{если } x < 0 \end{cases}$

Координатные линии и орты в полярной системе координат



Цилиндрическая система координат



Прямые преобразования

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

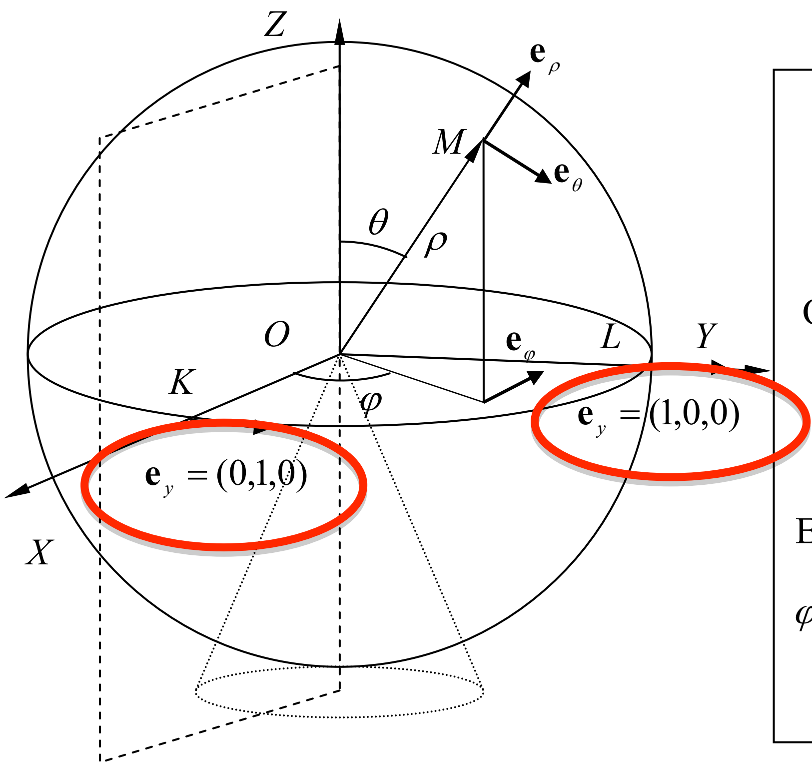
Обратные преобразования

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = y/x \\ z = z \end{cases}$$

Если $-\pi/2 < arctg\varphi < \pi/2$,

$$\varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \begin{cases} 0, \text{ если } x > 0 \\ \pi, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

Сферическая система координат.



Прямые преобразования

$$\begin{cases} z = \rho\cos\theta \\ x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$$

Обратные преобразования

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ tg\varphi = y/x \\ \theta = \arccos(z/\rho) \end{cases}$$

Если $-\pi/2 < arctg\varphi < \pi/2$,

$$\varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \begin{cases} 0, \text{ если } x > 0 \\ \pi, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

Задачи к теме 4

4.1(115). Вычислить расстояние между двумя данными точками:

1) $A=(2,\pi/12)$ и $B=(1,5\pi/12)$;

2) $C=(4,\pi/5)$ и $D=(6,6\pi/5)$.

4.2(116*). Даны полярные координаты точек $A=(8,-2\pi/3)$ и $B=(6,\pi/3)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка AB.

$\boxed{\textbf{4.3(119).}}$ Найти площадь треугольника, одна из вершин которого – в полюсе, а две другие имеют полярные координаты $(4,\pi/9)$, $(1,5\pi/18)$.

$\boxed{\textbf{4.4(121).}}$ Зная прямоугольные координаты точек A=(–1, 1), B=(0, 2), C=(5, 0),D=(–8, –6), найти их координаты в полярной системе координат, соответствующей данной прямоугольной.

$\boxed{\textbf{4.5(123).}}$ Полюс полярной системы координат находится в точке (3, 5), а положительное направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси Oy. Найти в этой системе полярные координаты точек M_1=(9, –1) и M_2=(5, $5-2\sqrt{3}$).

4.6(124). Найти сферические координаты точек по их прямоугольным координатам: A=(–8, –4, 1), B=(–2, –2, –1), C=(0, –4, 3), D=(1, –1, –1), E=(0, 1, 0).

$\boxed{\textbf{4.7(125).}}$ Найти сферические координаты точки M, зная, что луч OM образует с осями Ox и Oy углы, соответственно равные $\pi/4$ и $\pi/3$, и что третья координата точки $z=-1$.

4.8(126). Найти цилиндрические координаты точек по прямоугольным координатам: A = (3, –4, 5), B = (1, –1, –1), C = (–6, 0, 8).

$\boxed{\textbf{4.9(130).}}$ Найти угол α вектора $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, зная цилиндрические координаты r, φ, z точки M.

Тема 5. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов

1. *Определение.*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}))=\mathbf{a}\cdot\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathrm{Pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}\,.$$

2. *Основные свойства.*

1. Коммутативность (переместительное свойство):

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\,;$$

2. Ассоциативность (сочетательное свойство):

$$\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}\,;$$

3. Положительная (неотрицательная) определенность:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2\ge 0,\text{ причем } |\mathbf{a}|^2=0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a}=\mathbf{0}\,;$$

4. Дистрибутивность (распределительное свойство):

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\,.$$

3. *Частные значения*

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{a},\mathbf{b})=90^\circ$, если $|\mathbf{a}|\ne 0$ и $|\mathbf{b}|\ne 0$;
2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}>0 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{a},\mathbf{b})<90^\circ$ - острый угол;
3. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0 \Leftrightarrow \angle(\mathbf{a},\mathbf{b})>90^\circ$ - тупой угол;
4. $|\mathbf{a}|=0$ или $|\mathbf{b}|=0 \;\Rightarrow\; \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$.

4. *Скалярное произведение в декартовой системе координат*

Координаты вектора

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3=\sum_{i=1}^{i=3}a_i\mathbf{e}_i \;\Leftrightarrow\; a_i=\mathbf{e}_i\mathbf{a}\,.$$

Скалярное произведение

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{i=3}a_i\mathbf{e}_i\cdot\sum_{k=1}^{k=3}b_k\mathbf{e}_k=\sum_{i=1}^{i=3}\;\sum_{k=1}^{k=3}a_ib_k(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k)=\sum_{i=1}^{i=3}\;\sum_{k=1}^{k=3}a_ib_k\delta_{ik}=\sum_{i=1}^{i=3}a_ib_i\,.$$

Длина вектора

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{i=3}a_i^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,.$$

Расстояние между точками

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}\,.$$

Угол между векторами

$$\cos(\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}))=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}}=\frac{\sum_{i=1}^{i=3}a_ib_i}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\,.$$

Направляющие косинусы

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\,.$$

Проекция одного вектора на другой

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})}\mathbf{a}\,.$$

Задачи к теме 5

Во всех задачах этой темы система координат – прямоугольная.

5.1(131). Дан равносторонний треугольник *ABC*, длины сторон которого равны 1. Вычислить выражение

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

5.2(132). В треугольнике *ABC* даны длины его сторон $\left|\overrightarrow{BC}\right|=5$, $\left|\overrightarrow{CA}\right|=6$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=7$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

5.3(133). В треугольнике *ABC* проведены медианы *AD*, *BE* и *CF*. Вычислить $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}$.

5.4(136*). Найти сумму векторов, являющихся ортогональными проекциями вектора **a** на стороны равностороннего треугольника *ABC*.

5.5(142*). Даны два неколлинеарных вектора **a** и **b**. Найти вектор **x**, компланарный векторам **a** и **b** и удовлетворяющий системе уравнений $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})=1$, $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{x})=0$.

5.6(145а). Представить вектор **b** в виде суммы двух векторов, один из которых параллелен заданному ненулевому вектору **a**, а другой перпендикулярен.

5.7(147). К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, выходящим из этой вершины. Найти величину равнодействующей этих трех сил и углы, образуемые ею с составляющими силами.

5.8(148). Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора (–14, 2, 5) на прямую с направляющим вектором (2, –2, 1).

5.9(149). Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора (8, 4, 1) на плоскость, перпендикулярную к вектору (2, –2, 1).

5.10(151*). Даны два вектора: $\mathbf{a}=(8, 4, 1)$, $\mathbf{b}=(2, -2, 1)$. Найти вектор $\mathbf{c}$, компланарный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, перпендикулярный к вектору $\mathbf{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\mathbf{b}$ тупой угол.

5.11(152). Определить внутренние углы треугольника с вершинами $A=(1, 2, 3)$, $B=(3, 0, 4)$, $C=(2, -1, 3)$.

5.12(165). Даны две соседние вершины квадрата $A=(-3, 2)$ и $B=(2, 4)$. Найти две другие вершины.

5.13(166). Даны две противоположные вершины квадрата $A=(3, 2)$, $B=(5, -4)$. Найти две другие его вершины C и D.

Тема 6. Векторное и смешанное произведение. Ориентации пространства

Векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, определенный следующим образом:

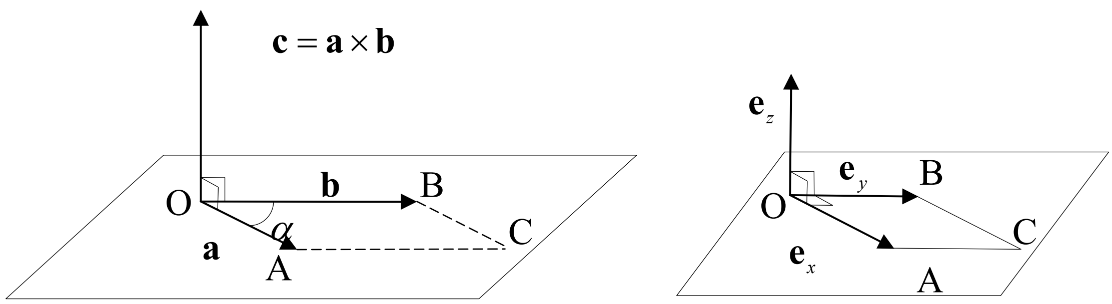
а) Вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен и вектору $\mathbf{a}$ и вектору $\mathbf{b}$;

б) Длина вектора $\mathbf{c}$ равна произведению длин векторов - сомножителей на синус угла между этими векторами;

c) Тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ является правой.

Вкратце определение векторного произведения записывается так:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mathbf{c} \perp \mathbf{a},\, \mathbf{c} \perp \mathbf{b} \\ |\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\angle \mathbf{ab}) \\ \mathbf{a},\, \mathbf{b} \text{ и } \mathbf{c} \text{ - правая тройка векторов.} \end{cases}$$



а) б)

Рис. 6.1. Векторное произведение векторов.

а) Определение векторного произведения $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$;

б) Векторное произведение ортов декартового базиса $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$.

Правила раскрытия определителей

Двумерный определитель

$$\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} = ab - cd\,.$$

Трехмерный определительь

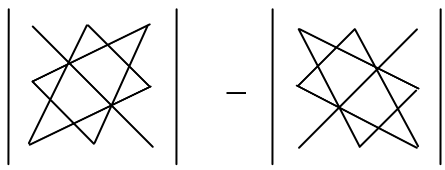
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 \boxed{+ a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_3c_1 -} a_3b_1c_2\,.$$

Правило 1. Раскрытие по строке (по столбцу).

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Правило 2.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = +$$



Правило 3.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_3 c_1 - a_3 b_1 c_2 =$$

$$= + \left| \begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array} \right. - \left| \begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array} \right. .$$

Правило 4.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} \sum_{k=1}^{k=3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \ .$$

Задачи к теме 6

Во всех задачах этой темы система координат – прямоугольная.

$\boxed{\textbf{6.1(176).}}$ Даны два вектора **a**=(1, 1, 1) и **b**=(1, 0, 0). Найти вектор **c** длины 1, перпендикулярный к вектору **a**, образующий с вектором **b** угол $\frac{\pi}{3}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов **a**, **b**, **c** имела положительную ориентацию.

$\boxed{\textbf{6.2(178).}}$ Даны три вектора: **a**=(8, 4, 1) **b**=(2, –2, 1), **c**=(1, 1, 1). Найти вектор **d** длины 1, компланарный векторам **a** и **b**, перпендикулярный к вектору **c** и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов **a**, **b**, **c** и **a**, **d**, **c** имели противоположную ориентацию.

6.3(189). Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках A=(– 1, 0, –1), B=(0, 2, –3), C=(4, 4, 1).

$\boxed{\textbf{6.4(190).}}$ Вычислить объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, зная его вершину A=(1, 2, 3). и концы выходящих из нее ребер B=(9, 6, 4), C=(3, 0, 4), A'=(5, 2, 6).

6.5(192*). Три вектора **a**, **b**, **c** связаны соотношениями $\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

$\boxed{\textbf{6.6(193*).}}$ Доказать, что если три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не коллинеарны, то из равенства $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ вытекает соотношение $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$ и обратно.

$\boxed{\textbf{6.7(195*).}}$ Доказать, что если векторы $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ компланарны, то они коллинеарны.

6.8(196*). Из одной точки проведены три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.

Основные свойства векторного произведения

1. Антикоммутативность (переместительное свойство):
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a};$$
2. Ассоциативность (сочетательное свойство):
$$(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b});$$
3. Дистрибутивность (распределительное свойство):
$$(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)\times\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\times\mathbf{b}+\mathbf{a}_2\times\mathbf{b}.$$
4. Параллельность векторов и векторное произведение
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a}\parallel\mathbf{b}.$$
5. Площадь параллелограмма и модуль векторного произведения
$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = S_{\mathbf{a},\mathbf{b}}.$$

Векторное произведение в декартовом базисе

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_2, a_1b_2 - a_3b_1)$$

Запись с помощью тензора Леви-Чивита.
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} == \sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3}\sum_{k=1}^{k=3}\varepsilon_{ijk}a_ib_j\mathbf{e}_k\ .$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1,\ \textit{если}\ (ijk) = (123),(231),(312); \\ -1,\ \textit{если}\ (ijk) = (132),(213),(321); \\ \quad 0,\ \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

Запись с использованием определителей второго порядка:
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Запись с помощью определителя третьего порядка:
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{6.9(198*).}}$ Даны три некомпланарных вектора **a**=(x_1, y_1, z_1), **b**=(x_2, y_2, z_2), **n**=(A, B, C). Найти площадь параллелограмма, являющегося ортогональной проекцией на плоскость, перпендикулярную к вектору **n**, параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**.

$\boxed{\textbf{6.10(200*).}}$ Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням тетраэдра, равных по абсолютной величине площадям этих граней и направленных в строну вершин, противолежащих граням, равна нулю.

6.11(207*). Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b** равна

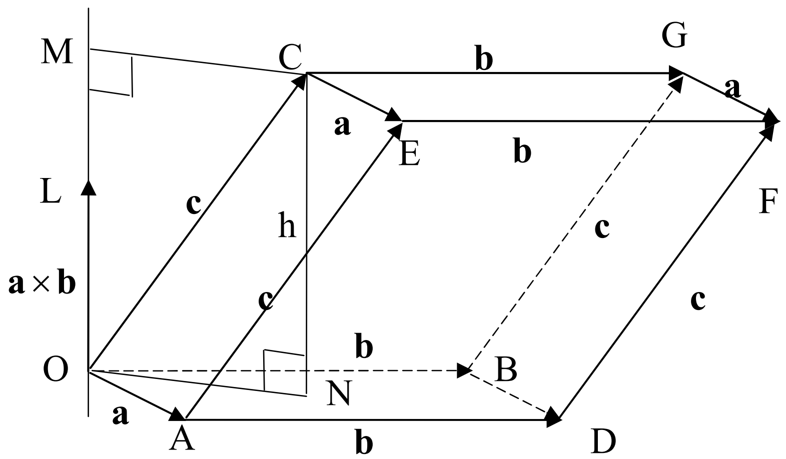
$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) & (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \\ (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) \end{vmatrix}}\,.$$

Справочный материал

Смешанное произведение векторов

Смешанное произведение $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равно ориентированному объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, как на сторонах:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = V_{\mathbf{abc}}^{(orient)}\,.$$



$$\begin{aligned}
&(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \\
&= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot \textit{Пр}_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\mathbf{c} = \\
&= |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot|\textit{Пр}_{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}\mathbf{c}| = \\
&= S_{\mathbf{ab}}\cdot|OM| = \\
&= S_{OADB}\cdot|ON| = \\
&= S_{основание}\cdot h_{высота} = \\
&= V_{OADBCEFG} \equiv \\
&\equiv V_{\mathbf{abc}} \equiv (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\,.
\end{aligned}$$

Рис. 6.2. Смешанное произведение векторов (правая тройка векторов)

Тема 7. Задачи с применением векторов. Итоговое занятие по векторам

Правило раскрытия двойного векторного произведения:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

Двойное векторное произведение равно разности произведения среднего вектора на скалярное произведение остальных векторов и произведения другого вектора в скобках на скалярное произведение остальных векторов.

Задачи к теме 7

7.1. Представить заданный данный вектор $\mathbf{d}$ в виде разложения произвольного вектора по трем заданным некомпланарным векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

7.2. Упростить выражение

$$((\mathbf{b}\times\mathbf{c}),(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),(\mathbf{a}\times\mathbf{b}))=\big((\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\big)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

7.3(204*). Определить вектор $\mathbf{d}$ по заданным скалярным произведениям $\alpha=\mathbf{ad}$, $\beta=\mathbf{bd}$ и $\gamma=\mathbf{cd}$.

7.4. Найти компонент вектора $\mathbf{a}$ ортогональный вектору $\mathbf{b}\neq 0$.

$\boxed{\textbf{7.5(201*).}}$ Доказать тождества:

1) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=-\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$;

2) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

7.6(202*). Доказать тождества:

$\boxed{1)}$ $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{vmatrix}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\end{vmatrix}$;

$\boxed{2)}$ $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})-\mathbf{d}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})-\mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})$;

$\boxed{3)}$ $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{d}=(\mathbf{d},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a}+(\mathbf{d},\mathbf{c},\mathbf{a})\mathbf{b}+(\mathbf{d},\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{c}$;

4) $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})=\begin{vmatrix}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}) & (\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}) & (\mathbf{x}\cdot\mathbf{c})\\ (\mathbf{y}\cdot\mathbf{a}) & (\mathbf{y}\cdot\mathbf{b}) & (\mathbf{y}\cdot\mathbf{c})\\ (\mathbf{z}\cdot\mathbf{a}) & (\mathbf{z}\cdot\mathbf{b}) & (\mathbf{z}\cdot\mathbf{c})\end{vmatrix}$;

$\boxed{5)}$ $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) & (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) & (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) & (\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}) & (\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) \end{vmatrix}$.

$\boxed{\text{7.7(203*).}}$ Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы выполнялось равенство

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

7.8(205*). 1) Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение $\mathbf{a}\times\mathbf{x}=\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}\neq 0$, имело решение.

2) Найти общее решение этого уравнения.

7.9(206*). Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$, отложенных от точки *O*. Найти вектор $\overrightarrow{OH}$, где *H* - ортогональная проекция точки *O* на плоскость *ABC*.

7.10(209*). Найти вектор $\mathbf{x}$ из системы уравнений $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x}=\alpha$, $\mathbf{a}_2\times\mathbf{x}=\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\neq 0$, $\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}=0$.

$\boxed{\text{7.11(210*).}}$ Решить относительно $\mathbf{x}$ систему уравнений $\mathbf{a}_1\times\mathbf{x}=\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_2\times\mathbf{x}=\mathbf{b}_2$, причем $\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2\neq 0$, $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_2\neq 0$, $\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_1\neq 0$, $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2=0$.

$\boxed{\text{7.12(211*).}}$ Найти векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из системы уравнений: $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{a}$, $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})=p$, $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\mathbf{b}$. Дано, что $\mathbf{a}\neq 0$, $\mathbf{b}\neq 0$, $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=0$.

Тема 8. Преобразование аффинных координат

Связь между радиус–векторами точки в различных системах отсчета

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_M$$

Формула связи ортов в трехмерном пространстве

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} \mathbf{e}_k$$

Формула связи координат в трехмерном пространстве:

$$x_k = X_k + \sum_{i=1}^{3} x'_i \alpha_{ik}$$

Задачи к теме 8

8.1(658). Написать формулы перехода от одной системы координат к другой, если началом первой системы является вершина A параллелограмма $ABCD$, а базисом – векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$; началом второй системы является вершина C, а базисом – векторы $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$.

8.2(673). Даны две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. По отношению к первой системе начало второй находится в точке O'=(2, 1, 3), а базисные векторы второй системы суть $\mathbf{e}'_1$=(2, 4, 1), $\mathbf{e}'_2$=(0, 4, 4), $\mathbf{e}'_3$=(1, 1, 0).

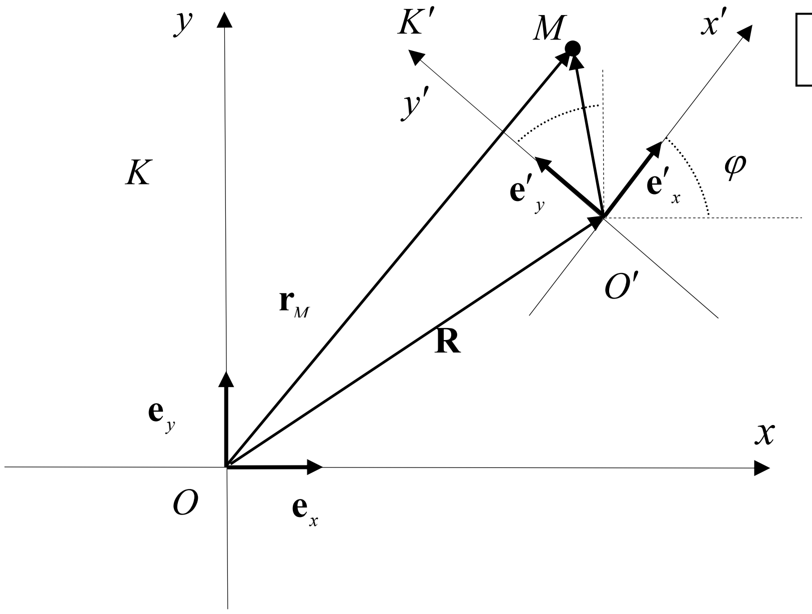
1) Написать выражения координат точек относительно первой системы через их координаты во второй системе.

2) Выразить координаты точек относительно второй системы через их координаты в первой системе.

3) Найти координаты начала O и координаты базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ первой системы относительно второй.

Справочный материал

Преобразование прямоугольных координат на плоскости



$$\mathbf{r}_M = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_M$$

Рис. 8.1. Связь между радиус–векторами точки в различных системах отсчета.

Прямое преобразование координат

$$\begin{cases} x = X_0 + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = Y_0 + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

Обратное преобразование координат

$$\begin{cases} x' = (x - X_0)\cos\varphi + (y - Y_0)\sin\varphi \\ y' = -(x - X_0)\sin\varphi + (y - Y_0)\cos\varphi \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{8.3(674).}}$ Координаты x, y, z точек в системе $Oxyz$ выражаются через координаты x', y', z' в системе $O'x'y'z'$ соотношениями

$$x = -2x' - y' - z' - 1,$$

$$y = -y' - z',$$

$$z = x' + 3y' + z' + 1.$$

1) Выразить координаты x', y', z' через координаты x, y, z.

2) Найти координаты начала O' и координаты базисными векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ второй системы относительно первой.

3) Найти координаты начала O и координаты базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ первой системы относительно второй.

$\boxed{\textbf{8.4(676).}}$ Найти координаты вершин тетраэдра $OABC$ в системе координат с началом в вершине O, базисными векторами которой являются медианы $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ граней BOC, COA, AOB.

8.5(684). Написать формулы преобразования прямоугольных координат, если начало новой системы находится в точке O'=(–3, –2), угол от оси Ox до оси Ox' равен $-\arccos(-4/5)$ и обе системы имеют противоположную ориентацию.

$\boxed{\textbf{8.6(685).}}$ В системе Oxy дана точка (6, –2); найти ее координаты в системе $O'x'y'$, получающейся из системы Oxy переносом начала в точку O'=(3, –4) и поворотом на угол $-\arccos(12/13)$.

Тема 9. Основные уравнения прямой на плоскости

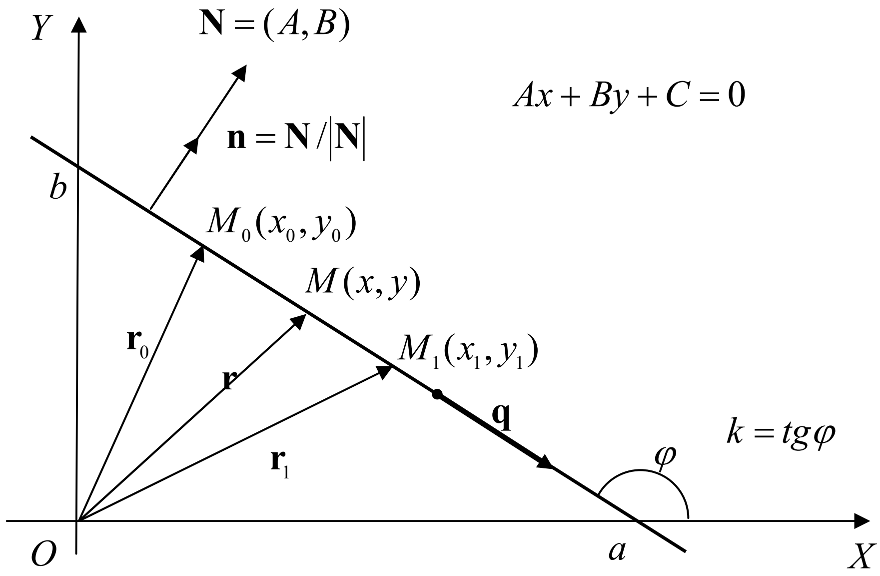


Рис. 9.1. Параметры прямой линии на плоскости.

Таблица 9.1. Уравнения прямой на плоскости

N	Название	Уравнение
1	Общее уравнение	$Ax+By+C=0$
2	Нормальное	$\dfrac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$
3	В отрезках	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$
4	С угловым коэффициентом	$y=kx+b$
5	Каноническое	$\dfrac{x-x_0}{q_x}=\dfrac{y-y_0}{q_y}$
6	Через две точки	$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$
7	Параметрическое в координатах	$\begin{cases} x=x_0+q_x t \\ y=y_0+q_y t \end{cases}$
8	Параметрическое через две точки	$\begin{cases} x=x_0+(x_1-x_0)t \\ y=y_0+(y_1-y_0)t \end{cases}$
9	Векторное параметрическое	$\mathbf{r}_M=\mathbf{r}_0+\mathbf{q}t$
10	Векторное параметрическое через две точки	$\mathbf{r}_M=\mathbf{r}_0+(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)t$
11	Векторное	$\mathbf{N}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$

Задачи к теме 9

9.1(367). Дан треугольник ABC: $A=(-2, 3)$, $B=(4, 1)$, $C=(6, -5)$. Написать уравнение медианы этого треугольника, проведенной из вершины A. Система координат аффинная.

9.2(368). Дан треугольник ABC: $A=(4, 4)$, $B=(-6, -1)$, $C=(-2, -4)$. Написать уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине C. Система координат прямоугольная.

9.3(370). Через точку $(2, -1)$ провести прямую, отрезок которой, заключенный между осями координат, делился бы в данной точке пополам. Система координат аффинная.

9.4(377*). Даны уравнения двух сторон треугольника $2x - y = 0$, $5x - y = 0$ и уравнение $3x - y = 0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны треугольника, зная, что на ней лежит точка $(3, 9)$, и найти координаты его вершин. Система координат аффинная.

9.5(398). Найти взаимное расположение трех прямых в каждом из следующих случаев:

1) $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$, $x - y + 7 = 0$;

2) $2x + 5y - 4 = 0$, $7x + y - 20 = 0$, $3x + 2y - 8 = 0$;

3) $x - y - 2 = 0$, $3x + 5y + 4 = 0$, $6x - 6y + 1 = 0$;

4) $2x + 3y - 1 = 0$, $4x + 6y + 5 = 0$, $10x + 15y - 7 = 0$.

Система координат аффинная.

9.6(405). Две параллельные прямые $2x - 5y + 6 = 0$ и $2x - 5y - 7 = 0$ делят плоскость на три области: полосу, заключенную между этими прямыми, и две области вне этой полосы. Установить, каким областям принадлежат точки $A=(2, 1)$, $B=(3, 2)$, $C=(1, 1)$, $D=(2, 8)$, $E=(7, 1)$, $F=(-4, 6)$. Система координат аффинная.

Справочный материал

Нормаль к прямой

$$\mathbf{N} = (A, B).$$

Возможные выражения для направляющего вектора:

$$\mathbf{q} = \left(\frac{1}{A}, -\frac{1}{B}\right),\ \mathbf{q} = (B, -A) \text{ и т.п.}$$

Отрезки, отсекаемые на осях:

$$a = -\frac{C}{A},\ b = -\frac{C}{B}.$$

Угловой коэффициент:

$$k = -\frac{A}{B}.$$

Абсолютное значение величины

$$\rho = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

определяет расстояние от точки до прямой, а ее знак – их взаимное расположение.

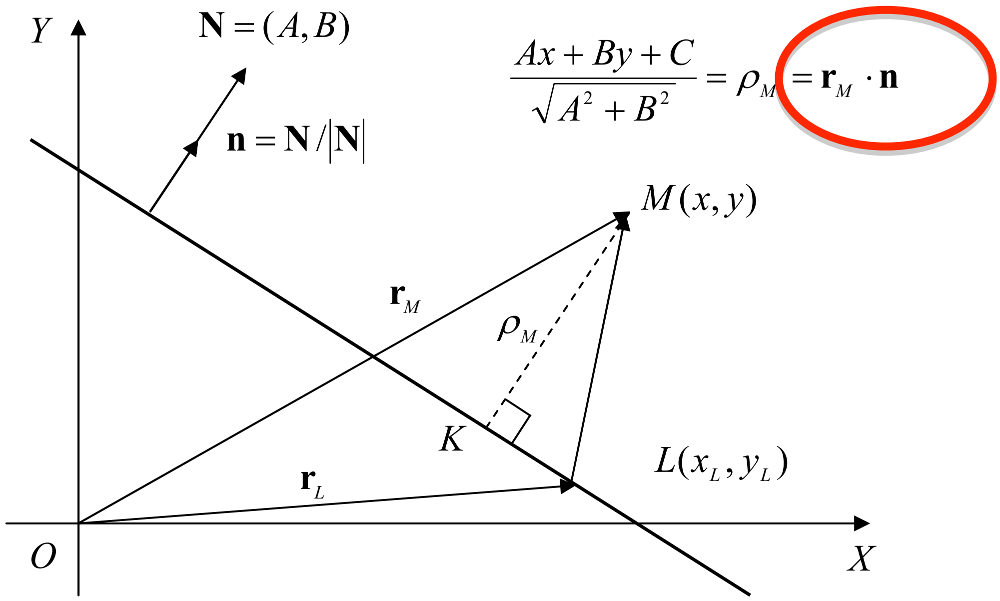


Рис. 9.2. Нормальное уравнение прямой

$\boxed{\textbf{9.7(406).}}$ Даны две точки A=(–3, 1) и B=(5, 4) и прямая $x - 2y + 1 = 0$. Установить, пересекает ли данная прямая отрезок $\overline{AB}$ или его продолжение за точку A или за точку B. Система координат аффинная.

$\boxed{\textbf{9.8(412*).}}$ Стороны треугольника ABC заданы уравнениями $2x - y + 2 = 0$ (AB), $x + y - 4 = 0$ (BC), $2x + y = 0$ (CA). Определить положение точек M=(3, 1), N=(7, –6), P=(3, 2) относительно данного треугольника. Система координат аффинная.

Во всех последующих задачах этой темы система координат предполагается прямоугольной

$\boxed{\textbf{9.9(416).}}$ Даны вершины треугольника A = (4, 6), B = (–4, 0) и C = (–1, –4). Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

$\boxed{\textbf{9.10(423).}}$ Найти проекцию точки (–5, 6) на прямую $7x - 13y - 105 = 0$.

9.11(431*). Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x - y + 6 = 0$, $x - y + 4 = 0$, $x + 2y = 0$.

$\boxed{\textbf{9.12(435).}}$ Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x + 3y = 0$, а боковой стороной – прямая $5x - 12y = 0$. Написать уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что она проходит через точку (2, 6).

$\boxed{\textbf{9.13(450).}}$ Составить уравнения прямых, параллельных прямой $5x + 12y - 1 = 0$ и отстоящих от нее на расстояние 5.

$\boxed{\textbf{9.14(461).}}$ Даны две прямые $3x + 4y - 2 = 0$, $5x - 12y - 4 = 0$ и точка (1, 1). Внутри угла, образованного данными прямыми и содержащего данную точку, найти такую точку, чтобы ее расстояния до данных прямых были равны соответственно 3 и 1.

$\boxed{\textbf{9.15(467*).}}$ Составить уравнения биссектрис внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями

$$3x - 4y = 0, \quad 4x - 3y = 0, \quad 5x + 12y - 10 = 0.$$

Тема 10. Составление уравнений прямых и плоскостей

Таблица 10.1. Уравнения прямой в пространстве

N	Название уравнения	Уравнение
1	Векторное параметрическое	$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t$
2	Векторное параметрическое заданное двумя точками	$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)t$
3	Параметрическое в координатах	$\begin{cases} x = x_0 + q_x t \\ y = y_0 + q_y t \\ z = z_0 + q_z t \end{cases}$
4	Параметрическое, заданное двумя точками	$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}$
5	Каноническое	$\dfrac{x - x_0}{q_x} = \dfrac{y - y_0}{q_y} = \dfrac{z - z_0}{q_z}$
6	Через две точки	$\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$
7	Общее уравнение	$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$
8	Векторное	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{q} = 0$
9	Векторное, заданное двумя точками	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = 0$

Если прямая задана, как пересечение двух плоскостей, то ее направляющий вектор определяется нормальными к этим плоскостям векторами:

$$\mathbf{q} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 .$$

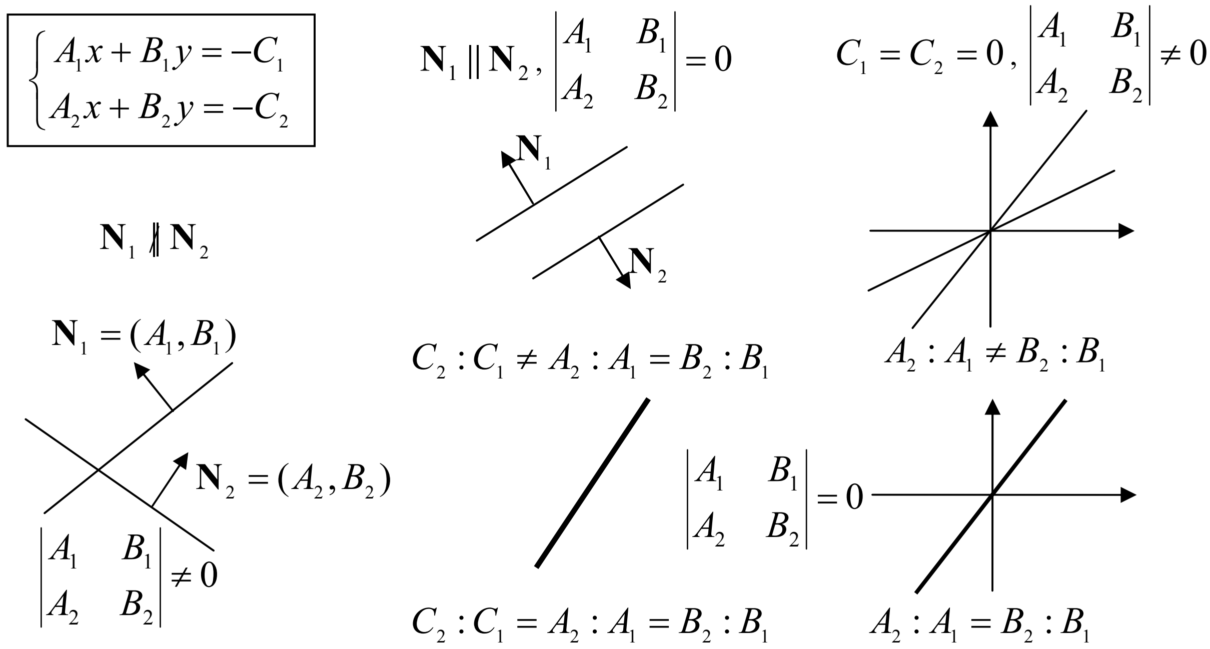


Рис. 10.1. Решение системы двух линейных уравнений и взаимное расположения двух прямых на плоскости.

Задачи к теме 10

10.1(492). Дана точка $A = (1, 2, 3)$.

1) Составить уравнения перпендикуляров, опущенных из точки A на координатные плоскости.

2) Написать уравнения перпендикуляров, опущенных из точки A на оси координат.

3) Написать уравнения плоскостей, проходящих через точку A и перпендикулярных к осям координат.

Система координат прямоугольная.

10.2(493). В пространстве дана прямая $x/2 = y/3 = 5$. Найти направляющий вектор этой прямой. Система координат аффинная.

10.3(498). Найти ортогональные проекции прямой $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ на координатные плоскости Oyz, Ozx, Oxy. Система координат прямоугольная.

Во всех последующих задачах этой темы система координат предполагается аффинной.

10.4(501*). Составить уравнения прямой, проходящей через точку (3, –1, –4), пересекающей ось Oy и коллинеарной плоскости $y + 2z = 0$.

$\boxed{\textbf{10.5(508).}}$ Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (1, 2, 3), параллельной прямой $x = y = z$ и отсекающей на осях Ox и Oy равные отрезки.

10.6(513). Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 2 + 3t$, $y = –1 + 6t$, $z=4t$ и коллинеарной прямой $x = –1 + 2t$, $y=3t$, $z = – t$.

$\boxed{\textbf{10.7(516*).}}$ Написать уравнения прямой, проходящей через точку (1, 2, 3) и пересекающей прямые

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1} \text{ и } \frac{x}{4} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{3}.$$

10.8(520). Составить уравнения проекции прямой

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

из точки (1, 2, 1) на плоскость $y – 2z + 4 = 0$.

$\boxed{\textbf{10.9(526).}}$ Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$: 1) пересекала плоскость Oxy; 2) была параллельна ей; 3) лежала в этой плоскости.

10.10(530). Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

1) $2x + 3y + 4z–12 = 0$, $3x – 6y + 1 = 0$;

2) $3x – 2y – 3z + 5 = 0$, $9x – 6y – 9z – 5 = 0$;

3) $2x – y – z – 3 = 0$, $10x – 5y – 5z – 15 = 0$.

$\boxed{\textbf{10.11(532).}}$ Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

$$1)\ \begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v; \end{cases} \begin{cases} x = 3 + 2u, \\ y = 2 - 2u + 4v, \\ z = 1 + u + 3v; \end{cases} 2)\ \begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v; \end{cases} \begin{cases} x = 1 + 4u, \\ y = 3u + v, \\ z = 4 + 2u + 2v; \end{cases}$$

3) $\begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 + 2u + v, \\ y = u + 2v, \\ z = 1 + 3v. \end{cases}$

$\boxed{\textbf{10.12(534).}}$ Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости.

Прямая	Плоскость
1) $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$,	$3x + 5y - z - 2 = 0$;
2) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$,	$3x - 3y + 2z - 5 = 0$;
3) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$,	$x + 2y - 4z + 1 = 0$;
4) $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$,	$3x - y + 2z - 5 = 0$;

$\boxed{\textbf{10.13(539).}}$ Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают; если прямые параллельны, то написать уравнение плоскости, через них проходящей; если прямые пересекаются, то написать уравнение содержащей их плоскости и найти их общую точку.

1) $\begin{cases} x = 1 + 2t,\ y = 7 + t,\ z = 3 + 4t; \\ x = 6 + 3t,\ y = -1 - 2t,\ z = -2 + t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 1 + 2t,\ y = 2 - 2t,\ z = -t; \\ x = -2t,\ y = -5 + 3t,\ z = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 2 + 4t,\ y = -6t,\ z = -1 - 8t; \\ x = 7 - 6t,\ y = 2 + 9t,\ z = 12t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 1 + 9t,\ y = 2 + 6t,\ z = 3 + 3t; \\ x = 7 + 6t,\ y = 6 + 4t,\ z = 5 + 2t. \end{cases}$

Тема 11. Составление уравнений прямых и плоскостей в пространстве

Таблица 11.1. Уравнения плоскости

N	Название уравнения	Уравнение
1	Общее уравнение	$Ax+By+Cz+D=0$
2	Нормальное	$\dfrac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$
3	В отрезках	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$
4	Векторное параметрическое, заданное а)одной точкой и двумя векторами, б) тремя точками, в) двумя точками и одним вектором.	$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{q}$, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)+\mu(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0)$, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\lambda\mathbf{p}+\mu(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0)$.
5	Параметрическое, заданное а) точкой и двумя направляющими векторами, б) тремя точками, в) двумя точками и одним направляющим вектором.	$\begin{cases} x=x_0+\lambda p_x+\mu q_x \\ y=y_0+\lambda p_y+\mu q_y \\ z=z_0+\lambda p_z+\mu q_z \end{cases}$, $\begin{cases} x=x_0+\lambda(x_1-x_0)+\mu(x_2-x_0) \\ y=y_0+\lambda(y_1-y_0)+\mu(y_2-y_0) \\ z=z_0+\lambda(z_1-z_0)+\mu(z_2-z_0) \end{cases}$, $\begin{cases} x=x_0+\lambda p_x+\mu(x_2-x_0) \\ y=y_0+\lambda p_y+\mu(y_2-y_0) \\ z=z_0+\lambda p_z+\mu(z_2-z_0) \end{cases}$
6	Векторное, заданное нормалью	$\mathbf{N}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$
7	Векторное, заданное а) направляющими векторами, б) двумя точками и одним направляющим вектором, в) тремя точками.	$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{q})=(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{p},\mathbf{q})=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\mathbf{q})=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0)=0$
8	Векторное уравнение плоскости в координатной записи, заданное а) направляющими векторами, б) двумя точками и одним направляющим вектором, в) тремя точками.	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$

Справочный материал

Нормаль к плоскости

$$\mathbf{N} = (A, B, C).$$

Выражение нормального вектора через направляющие векторы:

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}.$$

Отрезки, отсекаемые на осях:

$$a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C}.$$

Абсолютное значение величины

$$\rho = \frac{\mathbf{rN} + D}{|\mathbf{N}|} = \mathbf{rn} + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

определяет расстояние от точки до прямой, а ее знак – их взаимное расположение.

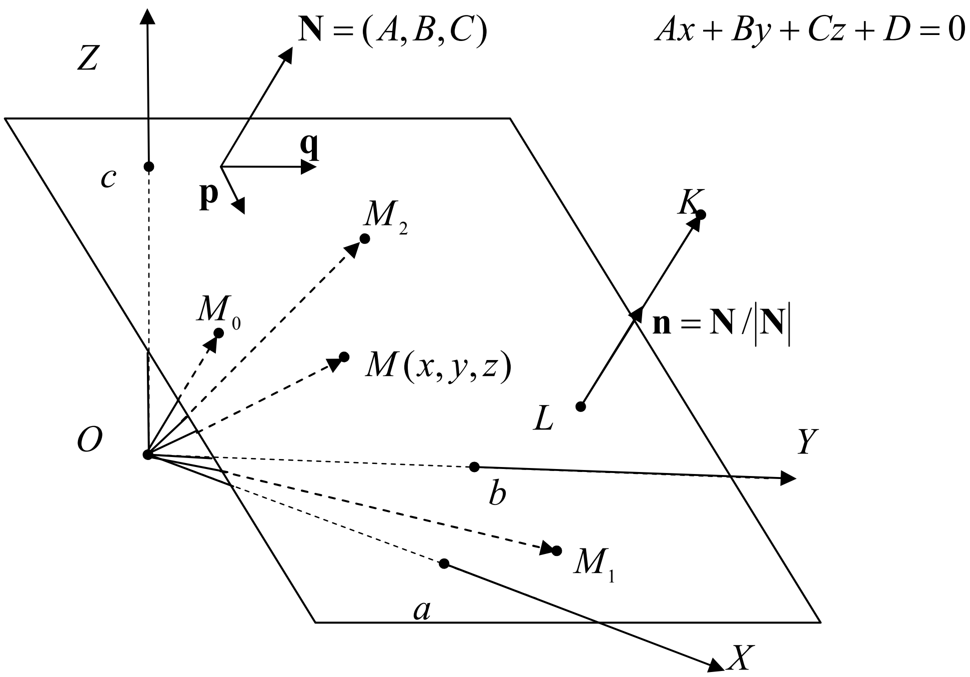


Рис. 11.1. Параметры плоскости. Общее уравнение плоскости

Задачи к теме 11

11.1(543). Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают; если прямые параллельны, то написать уравнение плоскости, проходящей через них; если прямые пересекаются, то написать уравнение содержащей их плоскости и найти их общую точку. Система координат аффинная.

1) $\begin{cases} x+z-1=0, \\ 3x+y-z+13=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y+3=0, \\ y+2z-8=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ x+z-8=0; \end{cases}$ $\begin{cases} z-4=0, \\ 2x+3z-7=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ y+4z=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y+6z-6=0, \\ 3x+4y+7z=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x+y-2z-6=0, \\ 41x-19y+52z-68=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 22x-9y+25z-37=0, \\ 19x-10y+27z-31=0. \end{cases}$

$\boxed{\textbf{11.2(545).}}$ Определить взаимное расположение трех плоскостей в каждом из следующих случаев:

1) $2x-4y+5z-21=0$, $x-3z+18=0$, $6x+y+z-30=0$;

2) $x+2y-3=0$, $3x+6y-9z+10=0$, $2x+4y-6z-1=0$;

3) $3x-y+2z+1=0$, $7x+2y+z=0$, $15x+8y-z-2=0$;

4) $5x-2y+4=0$, $3x+z-5=0$, $8x-2y+z+7=0$;

5) $6x+2y+12z-3=0$, $5y-7z-10=0$, $3x+y+6z+12=0$.

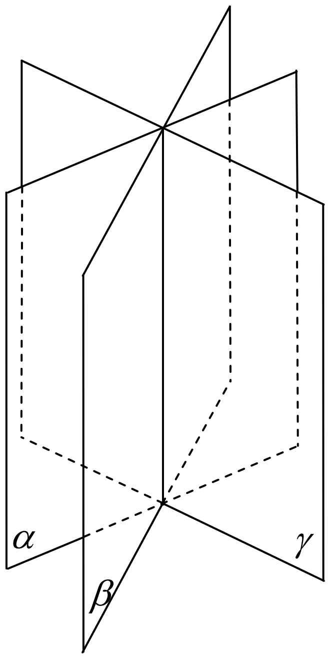
Система координат аффинная.

11.3(567). Написать уравнение плоскости, зная, что точка (2, 6, –4) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость. Система координат прямоугольная.

$\boxed{\textbf{11.4(570).}}$ Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $x + 3y - 5z - 10 = 0$ и проходящей через линию пересечения данной плоскости с плоскостью Oxy. Система координат прямоугольная.

Справочный материал

Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую l, называется **пучком плоскостей**.



Если $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – уравнения двух различных плоскостей принадлежащих пучку, то уравнение любой другой плоскости принадлежащей пучку имеет вид:

$$\mu\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \nu\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0,$$

где μ и ν – одновременно не равные нулю постоянные величины.

11.5(571). В пучке, определяемом плоскостями $2x + y - 3z + 2 = 0$ и $5x + 5y - 4z + 3 = 0$, найти две перпендикулярные друг к другу плоскости, из которых одна проходит через точку (4, -3, 1). Система координат прямоугольная.

11.6(573). Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ и перпендикулярной к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Система координат прямоугольная.

11.7(577). Написать уравнения и найти длину d перпендикуляра, опущенного, из точки (–3, 13, 7) па прямую

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{1}.$$

Система координат прямоугольная.

11.8(578). Найти ортогональную проекцию точки (1, 3, 5) на прямую $2x + y + z - 1 = 0$, $3x + y + 2z - 3 = 0$. Система координат прямоугольная.

11.9(582). Найти точку, симметричную точке (1, 2, 3) относительно плоскости $2x - 3y + 5z - 68 = 0$. Система координат прямоугольная.

11.10(584). Составить уравнения проекции прямой $x = 3 + 5t$, $y = - 1 + t$, $z = 4 + t$ на плоскость $2x - 2y + 3z - 5 = 0$. Система координат прямоугольная.

11.11(585*). 1) Написать уравнения общего перпендикуляра к двум прямым:

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1},\ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}$$

и найти расстояние d между этими прямыми;

2) найти точки пересечения общего перпендикуляра к данным прямым с этими прямыми.

Система координат прямоугольная.

11.12(586). Провести через точку пересечения плоскости $x + y + z - 1 = 0$ с прямой $y = 1$, $z + 1 = 0$ прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную к данной прямой. Система координат прямоугольная.

11.13(591). Через точку (1, 2, 3) провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $5x - 2y + 5z - 10 = 0$ и образующую с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$ угол $\frac{\pi}{4}$. Система координат прямоугольная.

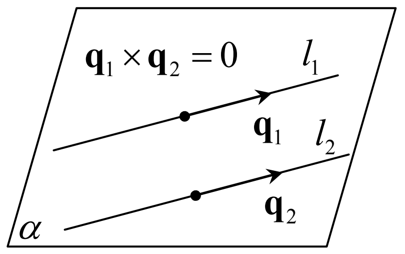
11.14(593). Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x+7}{-2}=\frac{y-6}{3}=\frac{z}{1}$$

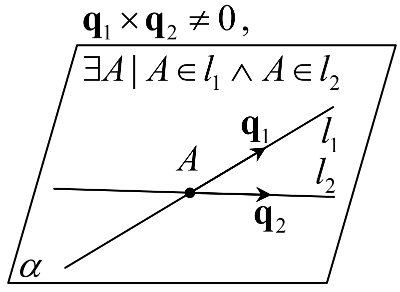
и образующей угол $\frac{\pi}{3}$ с прямой $x - y + z = 0$, $x - y + 2z = 0$. Система координат прямоугольная.

Тема 12. Относительное расположение прямых и плоскостей

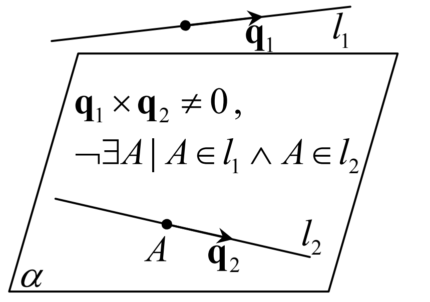
Таблица 12.1. Относительное расположение прямых и плоскостей



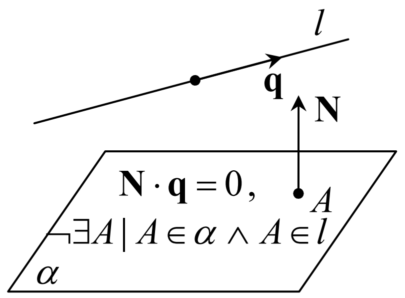
Параллельные прямые



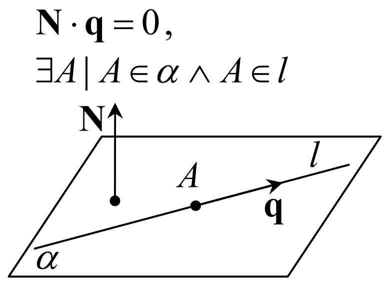
Пересекающиеся прямые



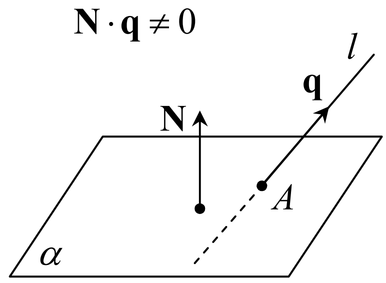
Скрещивающиеся прямые



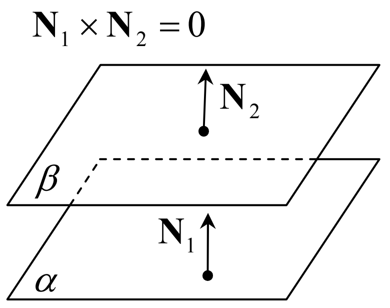
Прямая параллельна плоскости



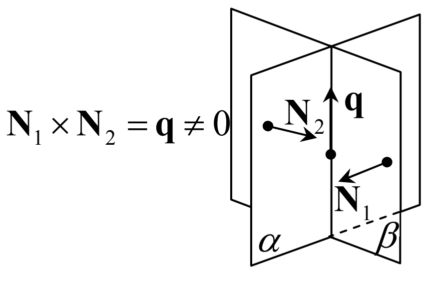
Прямая лежит в плоскости



Прямая пересекает плоскость



Параллельные плоскости



Пересекающиеся плоскости

Задачи к теме 12

Во всех задачах этой темы система координат – прямоугольная.

12.1(597). Найти косинусы углов между прямыми

$$\begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0, \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x + 2y - 5z + 1 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{12.2(599).}}$ Найти угол между прямой $x + y - z = 0$, $2x - 3y + z = 0$ и плоскостью $3x + 5y - 4z + 2 = 0$.

$\boxed{\textbf{12.3(603).}}$ Даны вершины тетраэдра $A = (0, 0, 2)$, $B = (3, 0, 5)$, $C = (1, 1, 0)$ и $D = (4, 1, 2)$. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

$\boxed{\textbf{12.4(608).}}$ Составить уравнения биссекторных плоскостей двугранных углов между двумя плоскостями:

$$7x + y - 6 = 0, \quad 3x + 5y - 4z + 1 = 0.$$

$\boxed{\textbf{12.5(611*).}}$ Внутри треугольника, высекаемого на плоскости Oxy плоскостями $x + 4y + 8z + 8 = 0$, $x - 2y + 2z + 2 = 0$, $3x + 4y + 12 = 0$, найти точку, равноудаленную от этих плоскостей.

12.6(612). Найти центр и радиус шара, вписанного в тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью

$$11x - 10y - 2z - 57 = 0.$$

12.7(617). Найти расстояние от точки (1, 3, 5) до прямой

$$2x + y + z - 1=0,\ 3x + y + 2z - 3 = 0.$$

12.8(618). Найти расстояние от точки (1, 2, 5) до прямой

$$x = t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 3 + t.$$

$\boxed{\textbf{12.9(620).}}$ Найти расстояние между двумя прямыми:

1) $x = 3 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = 2 + 2t$ и $x = -t, \quad y = 2 + 3t, \quad z = 3t$;

2) $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x - 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 9 = 0, \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$

12.10(621). Найти расстояние между двумя параллельными прямыми:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2} \text{ и } \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

12.11(630*). Найти ортогональную проекцию точки $M_0 = (\mathbf{r}_0)$ на прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$.

$\boxed{\textbf{12.12(631*).}}$ Найти точку, симметричную точке $M_0 = (\mathbf{r}_0)$ относительно прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$.

$\boxed{\textbf{12.13(638).}}$ Через прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0$.

$\boxed{\textbf{12.14(640*).}}$ Написать уравнения общего перпендикуляра к двум прямым $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_2 t$ при условии, что $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \neq 0$.

12.15. Определить проекцию точки на прямую на плоскости, расстояние от этой точки $\mathbf{r}_M$ до прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t$. Получить уравнение перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

12.16. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми. Построить уравнение общей нормали.

Тема 13. Простейшие конические сечения

Определение параболы. Парабола – это множество точек, для которых расстояние до заданной точки (фокуса) совпадает с расстоянием до заданной прямой (директрисы).

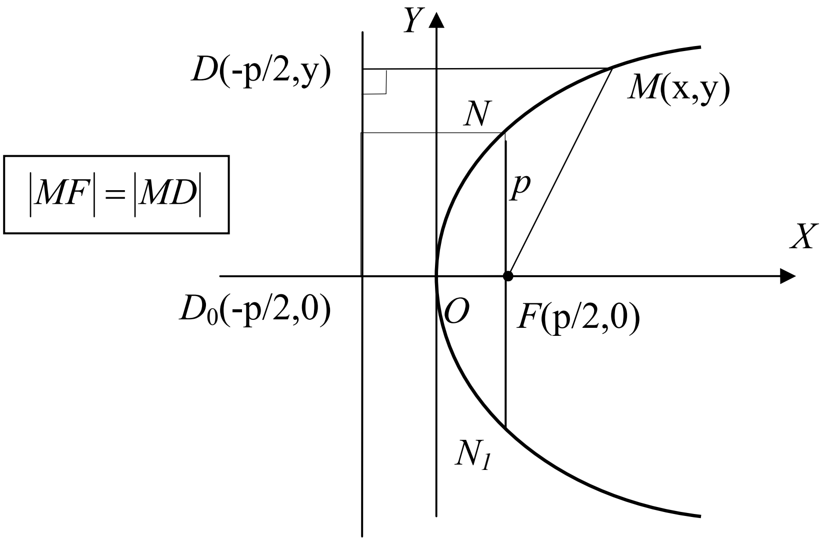


Рис. 13.1. Определение параболы. Каноническая система отсчета параболы

Каноническое уравнение параболы.

$$y^2 = 2xp.$$

Определение эллипса. Эллипс – это множество точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) постоянна.

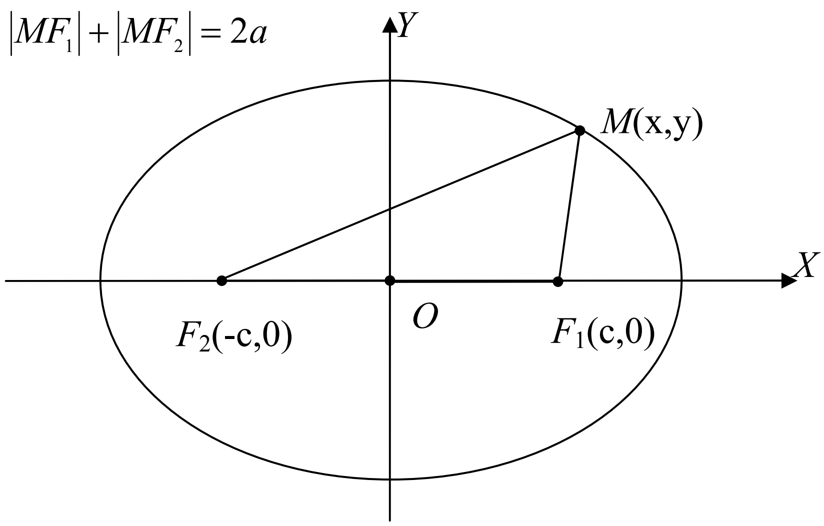
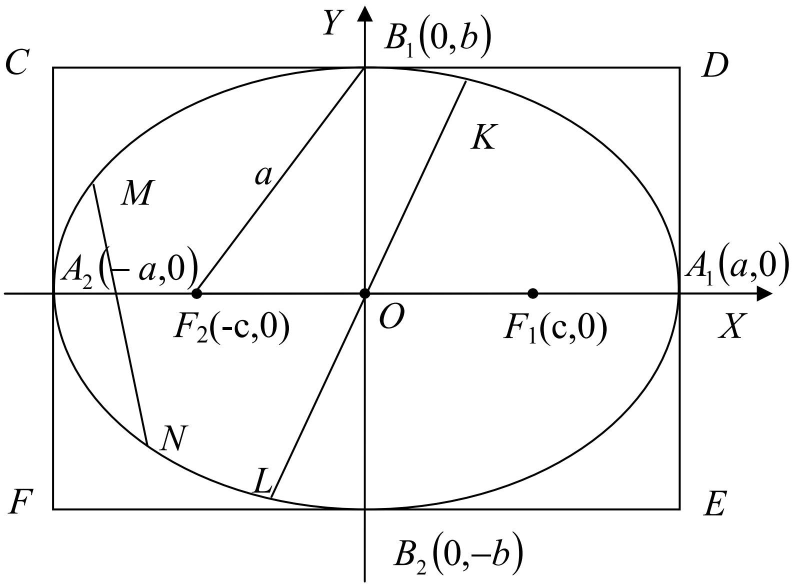


Рис. 13.2. Определение эллипса. Каноническая система отсчета эллипса

Каноническое уравнение эллипса.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



O - центр эллипса,
A_1, A_2, B_1, B_2 - вершины,
OA_1, OA_2 - большие полуоси,
OB_1, OB_2 - малые полуоси,
$CDEF$ -основной прямоугольник,
KL - пример диаметра,
MN - пример хорды.

Рис. 13.3. Основные характеристики эллипса

Определение гиперболы. Гипербола – это множество точек, разность расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) постоянна.

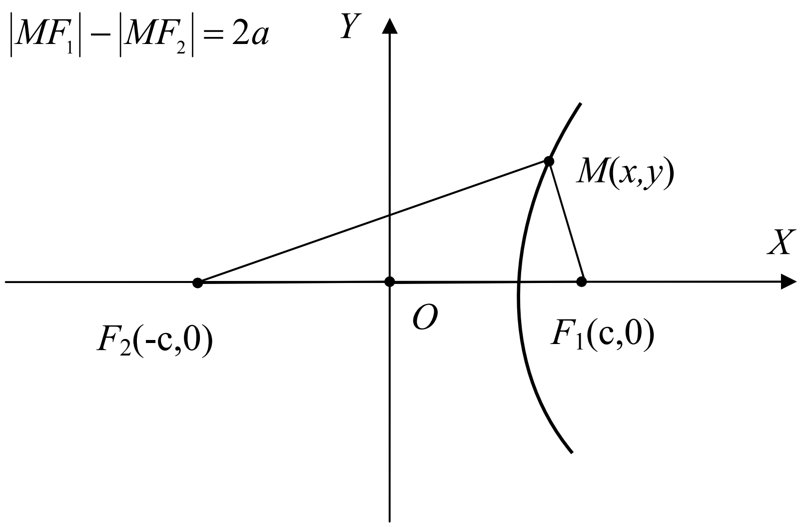
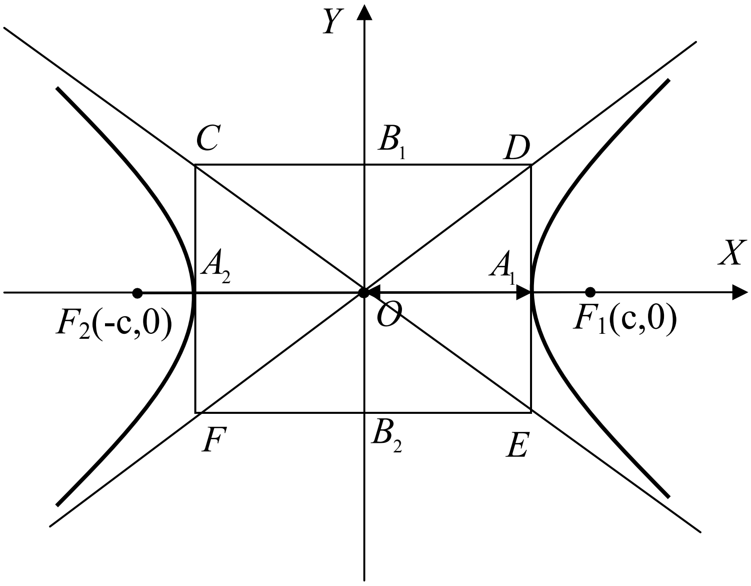


Рис. 13.4. Определение гиперболы. Каноническая система отсчета гиперболы

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$



F_1, F_2 - фокусы гиперболы,
O - центр гиперболы,
A_1, A_2 - вершины,
FD, CE - асимптоты
A_1A_2 - вещественная ось,
B_1B_2 - мнимая ось,
$CDEF$ -основной прямоугольник.

Рис. 13.5. Вид гиперболы. Основные характеристики гиперболы

Задачи к теме 13.

Во всех задачах этой темы система координат – прямоугольная.

13.1(700). Найти координаты центра C и радиус r каждой из следующих окружностей:

1) $x^2 + y^2 + x = 0$;

2) $x^2 + y^2 + 3y = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$;

4) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$.

$\boxed{\textbf{13.2(703).}}$ Охарактеризовать геометрически множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям:

1) $(x-3)^2 + (y-3)^2 < 8,\ x > y$;

2) $x^2+y^2+x+y>0$, $y>2x$;

3) $x^2+y^2-2x<0$, $|y|<\dfrac{1}{4}$.

$\boxed{\textbf{13.3(708*).}}$ Найти квадрат длины отрезка $\overrightarrow{M_0A}$ касательной, проведенной из точки $M_0=(x_0,y_0)$, внешней по отношению к окружности $x^2+y^2+ax+by+c=0$, где A – точка касания.

13.4(709). Составить уравнение окружности, проходящей через точки (1, 1), (0, 2) и касающейся окружности

$$(x-5)^2+(y-5)^2=16.$$

$\boxed{\textbf{13.5(713).}}$ Составить уравнение касательной к окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ в точке (x_0,y_0), лежащей на этой окружности.

13.6(714). Составить уравнения касательных к окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, параллельных прямой

$$Ax+By+C=0.$$

$\boxed{\textbf{13.7(723).}}$ Составить уравнение окружности, проходящей через точку (1, –2) и точки пересечения прямой $x-7y+10=0$ с окружностью $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

$\boxed{\textbf{13.8(725*).}}$ Составить уравнения касательных к окружности $x^2+y^2=r^2$, проведенных к ней из внешней точки (x_0,y_0).

$\boxed{\textbf{13.9(729).}}$ Составить уравнение линии второго порядка, оси которой совпадают с осями координат, зная, что она проходит через точки (2, 2), (3, 1).

13.10(730). Написать уравнение эллипса, описанного около равностороннего треугольника, две вершины которого находятся в точках (a, 0) и (–a, 0) и совпадают с вершинами эллипса, принадлежащими одной оси.

13.11(731). Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку (1, 2), асимптотами которой служат прямые

$$y=\pm\frac{1}{2}x.$$

$\boxed{\textbf{13.12(734).}}$ Найти длину стороны равностороннего треугольника, вписанного в параболу $y^2 = 2px$ так, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной параболы.

$\boxed{\textbf{13.13(735).}}$ Написать уравнение эллипса, пересекающего ось *Ox* в точках (1, 0) и (9, 0) и касающегося оси *Oy* в точке (0, 3), зная что его оси параллельны осям координат.

13.14(736). Написать уравнение эллипса, оси которого параллельны осям координат, касающегося осей *Ox* и *Oy* соответствию в точках (0, 0) и (0, 3).

$\boxed{\textbf{13.15(738).}}$ Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку (1, 0), асимптотами которой являются прямые x=0, y=1.

$\boxed{\textbf{13.16(739*).}}$ Написать уравнение равносторонней гиперболы, для которой ось *Ox* служит асимптотой, а точка (1, 1) – вершиной.

$\boxed{\textbf{13.17(742).}}$ Написать уравнение линии второго порядка, для которой ось *Ox* является осью симметрии, ось *Oy* – касательной в вершине, зная, что линия проходит через две точки (2, 3) и (6, -3).

13.18(746*). Найти наибольший радиус круга, лежащего внутри параболы $y^2 = 2px$ и касающегося параболы в ее вершине.

$\boxed{\textbf{13.19(749).}}$ Написать уравнение параболы, вершина которой находится в точке (2, 6), а ось параллельна *Oy*, зная, что на оси *Ox* эта парабола высекает хорду длины 6.

Тема 14. Эллипс, парабола и гипербола

Уравнение кривой второго порядка в полярной систем отсчета

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

Фокусы, директрисы, эксцентриситет

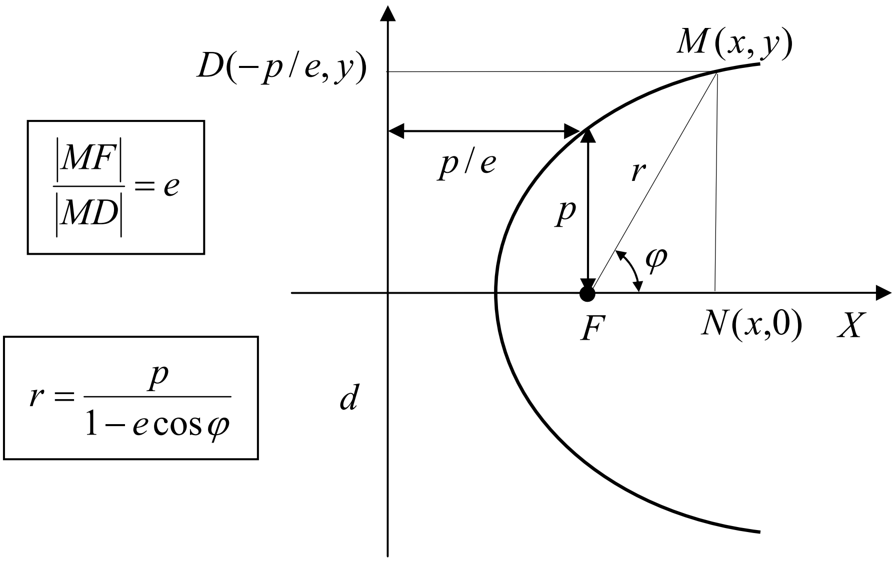


Рис. 14.1. Директриса и эксцентриситет параболы.

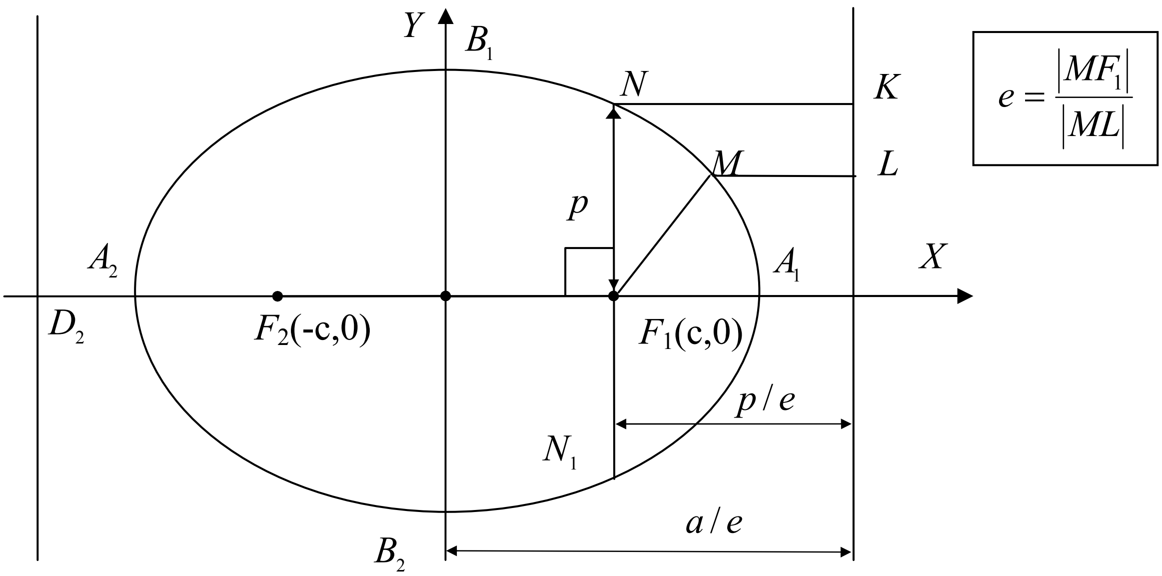


Рис. 14.2. Директрисы и эксцентриситет эллипса.

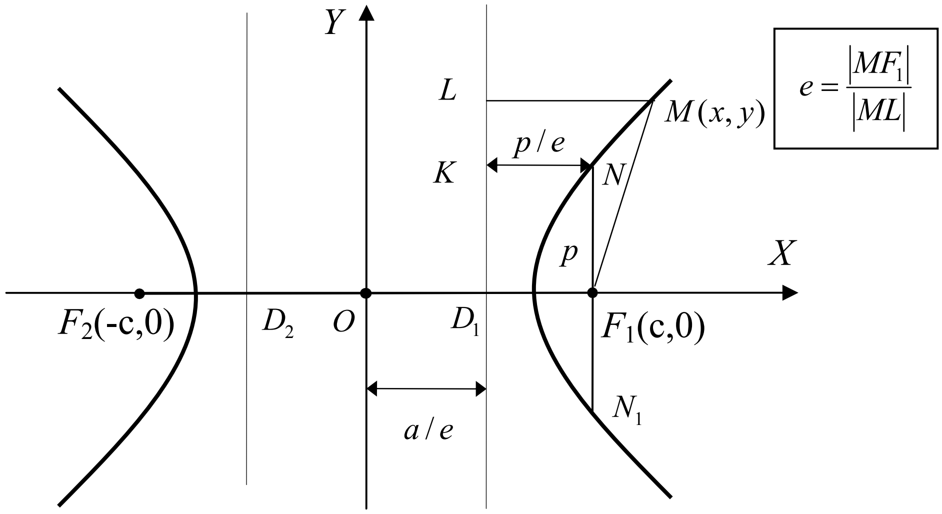


Рис. 14.3. Директриса и эксцентриситет гиперболы

Теорема об определении эллипса, параболы и гиперболы с помощью директрисы и эксцентриситета. Множество точек, в котором отношение расстояния от любой точки до фокуса к расстоянию от этой точки до директрисы постоянно и равно эксцентриситету e является:

а) эллипсом, если $e < 1$;

б) параболой, если $e = 1$;

в) гиперболой, если $e > 1$.

Частному случаю $e = 0$ соответствует окружность, $e = \sqrt{2}$ – равнобочная гипербола.

Уравнение при вершине

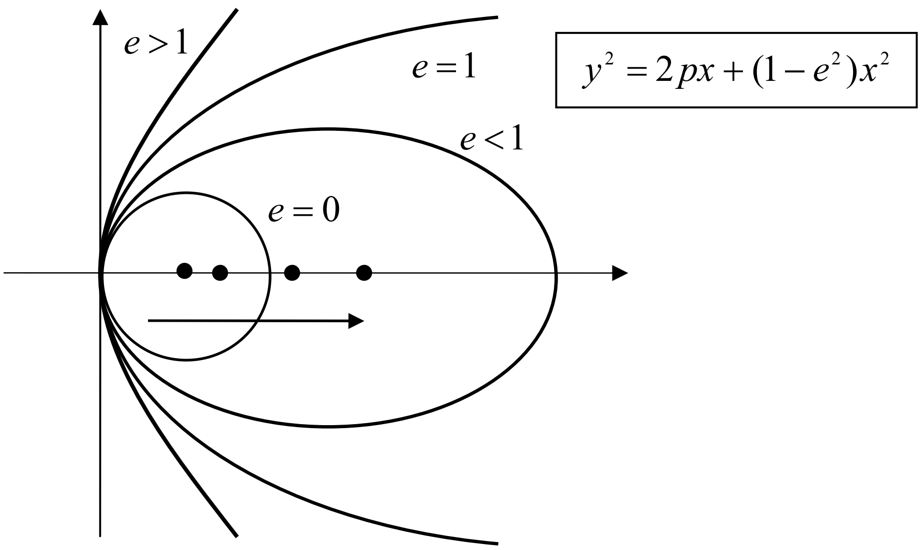


Рис. 14.4. Семейство кривых второго порядка, которые описываются уравнением при вершине для различных значений эксцентриситета. Стрелкой показано смещение одного из фокусов

Оптические свойства кривых второго порядка

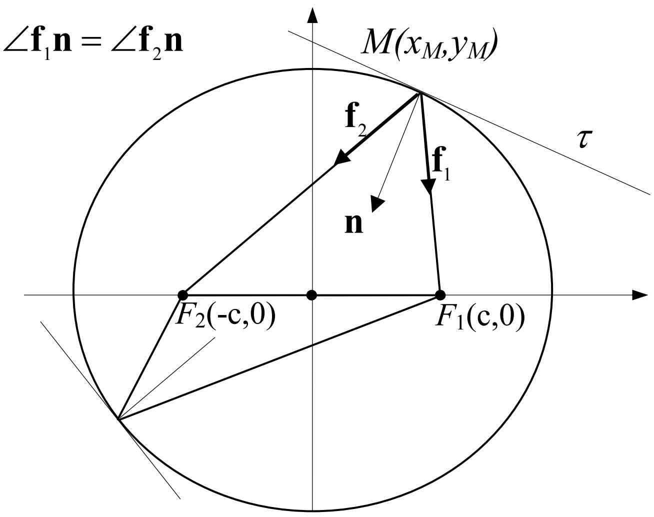
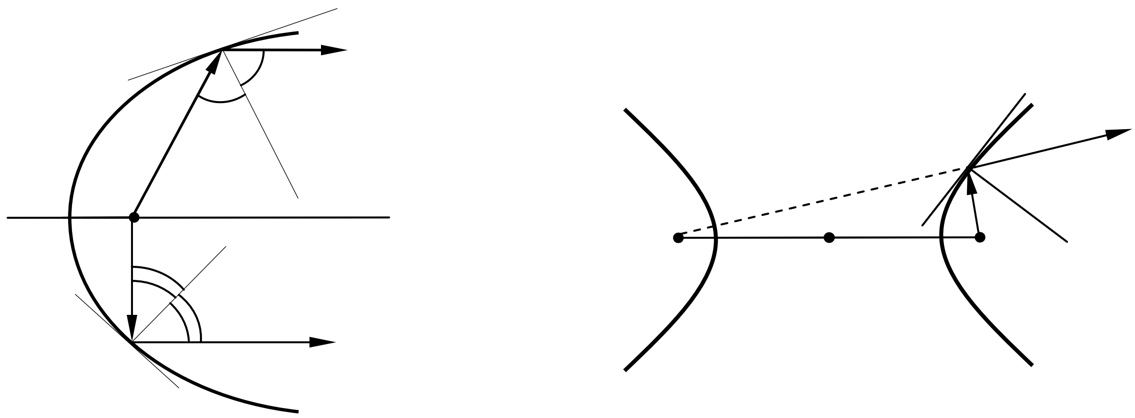


Рис. 14.5. Оптические свойства эллипса



а) б)

Рис. 14.6 а) и б). Оптические свойства параболы и гиперболы

Задачи к теме 14

Во всех задачах этой темы система координат – прямоугольная.

14.1(751*). Написать уравнение эллипса, для которого прямые $x + y - 1 = 0$ и $x - y + 1 = 0$ суть соответственно большая и малая оси и длины полуосей которого $a = 2$, $b = 1$.

$\boxed{\textbf{14.2(752*).}}$ Написать уравнение параболы, осью которой служит прямая $x + y + 1 = 0$ и которая проходит через точки (0, 0), (0, 1).

$\boxed{\textbf{14.3(753*).}}$ Написать уравнение гиперболы, зная ее ось $2x - y + 2 = 0$, асимптоту $y = 0$ и точку (1, 1).

14.4(759). Найти фокусы F_1, F_2 и соответствующие им директрисы следующих линий:

$$1)\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20}=1;\quad 2)\ \frac{x^2}{4}-2y^2+8=0;\quad 3)\ y=\frac{3}{4}x^2.$$

$\boxed{\textbf{14.5(760).}}$ Найти фокус и директрису параболы

$$3x^2+12x+16y-12=0.$$

14.6(761). Найти фокус F и директрису d параболы $y = ax^2$.

$\boxed{\textbf{14.7(762).}}$ Найти фокусы и директрисы равносторонней гиперболы $2xy = a^2$.

14.8(763). Написать уравнения эллипса и гиперболы с фокусами (7, 0) и (–7, 0), проходящих через точку (–2, 12).

$\boxed{\textbf{14.9(764).}}$ Написать уравнение линии второго порядка, зная ее фокус (2, 0), соответствующую ему директрису $x = 8$ и эксцентриситет $e = \frac{1}{2}$. Найти второй фокус и вторую директрису линии.

$\boxed{\textbf{14.10(765).}}$ Написать уравнение линии второго порядка, фокус которой находится в точке (2, 0), соответствующая ему директриса имеет уравнение $x = 5$, зная, что линия проходит через точку (10, 6). Найти второй фокус и вторую директрису этой линии.

$\boxed{\textbf{14.11(766).}}$ Написать уравнение линии второго порядка, фокус которой находится в точке (2, 0), соответствующая ему директриса имеет уравнение $x = 6$, зная, что линия проходит через точку (–4, 8).

$\boxed{\textbf{14.12(771).}}$ Определить эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами есть среднее арифметическое длин осей.

$\boxed{\textbf{14.13(772).}}$ Найти эксцентриситет эллипса, зная что стороны вписанного в него квадрата проходят через фокусы эллипса.

14.14(778). Дана парабола $y = \frac{3}{4}x^2$. Написать уравнение другой параболы, имеющей с данной параболой общую фокальную хорду, т. е. хорду, проходящую через фокус параболы и перпендикулярную к ее оси.

$\boxed{\textbf{14.15(781).}}$ Написать уравнение гиперболы, зная четыре точки (±4, ±2) пересечения ее директрис и асимптот.

14.16(785*). Написать уравнение равносторонней гиперболы, зная ее фокус (1, 1) и асимптоту $x + y = 0$.

$\boxed{\textbf{14.17(787*).}}$ Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты (1, 0), (0, 1) и большая ось равна 2.

$\boxed{\textbf{14.18(791).}}$ Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности и непересекающей ее прямой.

14.19(797). Составить уравнение гиперболы в полярных координатах, если дано ее каноническое уравнение $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Тема 15. Общая теория кривых второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Инварианты кривых второго порядка

$$I_1 = Sp\|a_{ij}\|, \text{ где } i, j = 1,2;$$

$$I_2 = \det\|a_{ij}\|, \text{ где } i, j = 1,2;$$

$$I_3 = \det\|a_{ij}\|, \text{ где } i, j = 1,2,3;$$

Задачи к теме 15

Во всех задачах этой темы система координат – прямоугольная.

15.1(805). С помощью переноса осей координат установить, какая линия определяется каждым из следующих уравнений, и найти ее расположение относительно данной системы координат:

1) $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$;
2) $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 3 = 0$;
3) $3y^2 - 12x - 6y + 11 = 0$;
4) $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$;
5) $4x^2 - y^2 - 16x + 6y + 23 = 0$;
6) $3x^2 + 12y^2 + 16y - 12 = 0$;
7) $9x^2 - 4y^2 + 36x - 16y + 20 = 0$;
8) $x^2 + x - 6 = 0$;
9) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y}{b} = 1$;
10) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{2x}{a} + \dfrac{2y}{b} = 1$;
11) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{2x}{a} + \dfrac{2y}{b} = 0$.

15.2(806*). Линия второго порядка определяется уравнением

$$x^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0.$$

Определить тип линии при изменении параметра λ от $-\infty$ до $+\infty$ и найти ее расположение относительно данной системы координат.

Справочный материал

Теорема про полуинвариант кривой второго порядка. Функция K коэффициентов общего уравнения кривой второго порядка

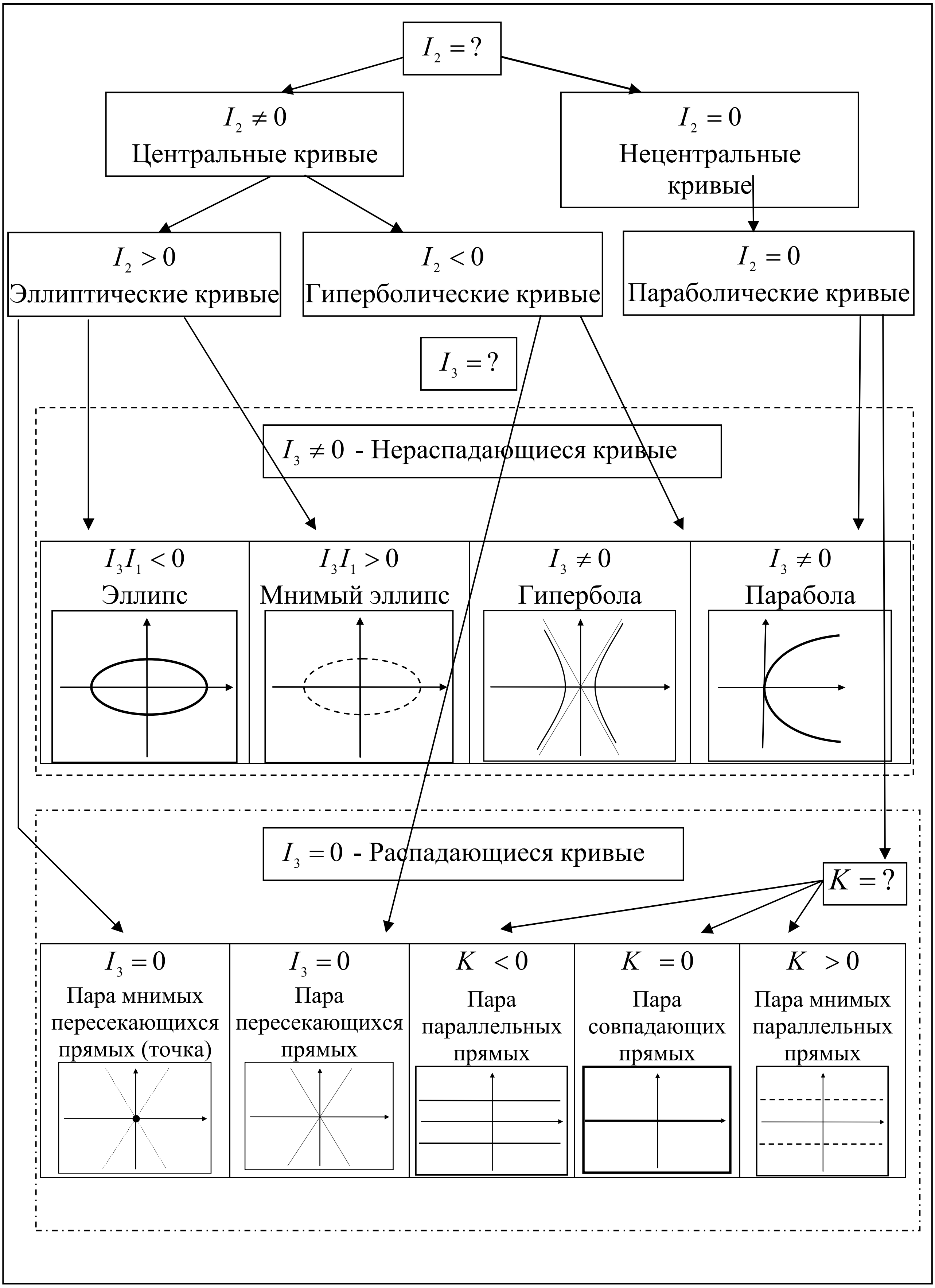
$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

является инвариантом относительно поворотов, а для линий, у которых $I_2 = 0$ и $I_3 = 0$, функция K инвариантна и при параллельных переносах.

Таблица 15.1 Классификация кривых второго порядка

<table>
<tr><th>N</th><th></th><th></th><th>Тип</th><th colspan="2"></th><th>Название кривой</th><th>Уравнение</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="5">Центральные $I_2 \neq 0$</td><td rowspan="3">$I_2 > 0$</td><td rowspan="3">Эллиптический</td><td colspan="2">$I_3 I_1 < 0$</td><td>Эллипс</td><td>$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">$I_3 = 0$</td><td>Точка
(пара мнимых пересекающихся прямых)</td><td>$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">$I_3 I_1 > 0$</td><td>Мнимый эллипс</td><td>$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="2">$I_2 < 0$</td><td rowspan="2">Гиперболический</td><td colspan="2">$I_3 \neq 0$</td><td>Гипербола</td><td>$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">$I_3 = 0$</td><td>Пара пересекающихся прямых</td><td>$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="4">Нецентральные</td><td rowspan="4">$I_2 = 0$</td><td rowspan="4">Параболический</td><td colspan="2">$I_3 \neq 0$</td><td>Парабола</td><td>$y^2 = 2px$</td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="3">$I_3=0$</td><td>K<0</td><td>Пара параллельных прямых</td><td>$y^2 = h^2$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>K=0</td><td>Пара совпадающих прямых</td><td>$y^2 = 0$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>K>0</td><td>Пара параллельных мнимых прямых</td><td>$y^2 = -h^2$</td></tr>
</table>

Алгоритм определения вида кривой второго порядка с помощью инвариантов



Определение параметров кривой второго порядка.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

1. Эллипсы и гипербола

Координаты центра: $\begin{cases} a_{11}X_0 + a_{12}Y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}X_0 + a_{22}Y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(I_1 \pm \sqrt{D}\right)$

Дискриминант $D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = I_1^2 - 4I_2$

Угол поворота ($S = \pm 1$): $\cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{D}} S$, $\sin 2\varphi = \frac{2a_{12}}{\sqrt{D}} S$,

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}} sign(\sin 2\varphi),\ \sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}.$$

Вещественный и мнимый эллипс: $S = -sign\, I_1$.

Полуоси: $a^2, b^2 = \frac{|I_3|}{2I_2^2}\left(|I_1| \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2}\right)$

Гипербола: $S = sign\, I_3$.

Полуоси: $a^2, b^2 = \mp\frac{I_3}{I_2^2}\lambda^{(\mp)}$, где $sign(\lambda^{(\pm)} I_3) = \pm 1$.

2. Пересекающиеся прямые (диагонали основного прямоугольника)

$\left(a_{12} \pm \sqrt{-I_2}\right)(x - X_0) + a_{22}(y - Y_0) = 0$ или $a_{11}(x - X_0) + \left(a_{12} \pm \sqrt{-I_2}\right)(y - Y_0) = 0$.

3. Параллельные прямые

$$\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}} \pm \sqrt{-\frac{K}{I_1^2}} = 0 \text{ или } \frac{a_{12}x + a_{22}y + a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}} \pm \sqrt{-\frac{K}{I_1^2}} = 0.$$

4.Парабола

Параметр: $p = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}}$

Угол поворота:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11} + a_{22}}} sign\left(a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}\right);\ \sin\varphi = -\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{11} + a_{22}}} sign\left(a_{23}a_{11} - a_{13}a_{12}\right).$$

Ось параболы: $a_{11}x + a_{12}y = \frac{a_{13}a_{11} + a_{23}a_{12}}{-I_1}$, или $a_{12}x + a_{22}y = \frac{a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22}}{-I_1}$.

Вершина определяется как точка пересечения параболы с ее осью.

5. Оси координат канонической системы отсчета

Ось абсцисс: $(x - X_0)\sin\varphi - (y - Y_0)\cos\varphi = 0$.

Ось ординат: $(x - X_0)\cos\varphi + (y - Y_0)\sin\varphi = 0$

У параллельных прямых определена только ось абсцисс одним из уравнений:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \text{ или } a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0.$$

15.3(807). Определить тин линии, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$; 2) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;

3) $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$; 4) $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$;

5) $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0$; 6) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$;

7) $8x^2+6xy-26x-12y+11=0$; 8) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

9) $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$; 10) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$;

11) $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$; 12) $x^2-12xy-4y^2+12x+8y+5=0$;

13) $9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0$; 14) $3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0$;

15) $4x^2-12xy+9y^2-20x+30y+16=0$; 16) $5x^2+6xy+5y^2-6x-10y-3=0$;

17) $12xy+5y^2-12x-22y-19=0$; 18) $4x^2-4xy+y^2-3x+4y-7=0$;

19) $4x^2+16xy+15y^2-8x-22y-5=0$; 20) $4x^2+4xy+y^2+16x+8y+15=0$.

15.4(808*). Линия второго порядка определяется уравнением $x^2+2\alpha xy+y^2=1$. Определить тип линии при изменении параметра α от $-\infty$ до $+\infty$ и найти ее расположение относительно данной системы координат.

15.5(875). Найти асимптоты следующих гипербол:

1) $3x^2+7xy+4y^2+5x+2y-6=0$; 2) $2x^2+6xy-12x-18y+5=0$.

15.6(877). Написать уравнение диаметра эллипса $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$, проходящего через середину хорды, отсекаемой эллипсом на прямой $3x+2y-6=0$.

15.7(879). Составить уравнение такой хорды эллипса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, которая точкой (2, 1) делится пополам.

15.8(880). Дана линия второго порядка

$$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0.$$

Найти сопряженные диаметры этой линии, один из которых параллелен оси ординат.

Тема 16. Касательные к линиям второго порядка

Таблица 16.1. Уравнения касательных к кривым второго порядка

Кривая 2-го порядка	Уравнение касательной к точке (x, y)
1. Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1$
2. Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{Xx}{a^2}-\frac{Yy}{b^2}=1$
3. Парабола $y^2=2px$	$Yy=p(X+x)$

Координаты точек касательной обозначены через X, Y.

Задачи к теме 16

Во всех задачах этой темы система координат – прямоугольная.

16.1(828). Составить уравнения касательных к эллипсу

$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1,$$

проведенных из точки (12, –3).

16.2(829). Написать уравнения касательных к гиперболе $x^2-\frac{y^2}{4}=1$, проведенных из точки (1, 4).

$\boxed{\textbf{16.3(830).}}$ Написать уравнения касательных к параболе $y^2=4x$, проведенных из точки $\left(-1,\frac{8}{3}\right)$.

$\boxed{\textbf{16.4(831).}}$ Дано уравнение касательной $x-3y+9=0$ к параболе $y^2=2px$. Составить уравнение параболы.

16.5(832). Найти кратчайшее расстояние параболы $y^2 = 64x$ от прямой $4x + 3y + 46 = 0$.

$\boxed{\textbf{16.6(833).}}$ Написать уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ параллельных прямой $x + y - 1 = 0$.

16.7(838*). Написать уравнения касательных к эллипсу $3x^2 + 8y^2 = 45$, расстояния которых от центра эллипсу раины 3.

16.8(843). Гипербола, оси которой совпадают с осями координат, касается прямой $x - y - 2 = 0$ в точке $M = (4,2)$. Составить уравнение этой гиперболы.

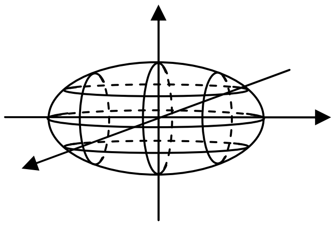
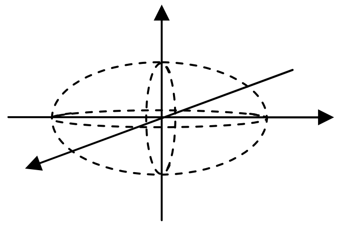
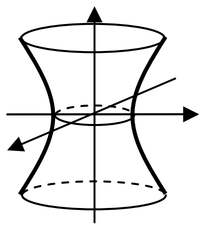
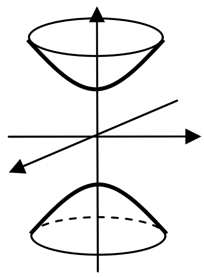
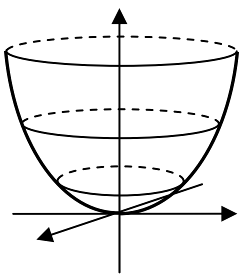
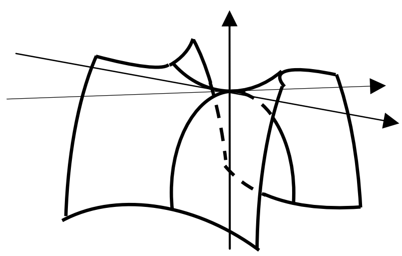
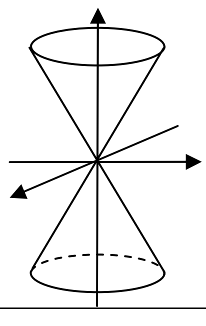
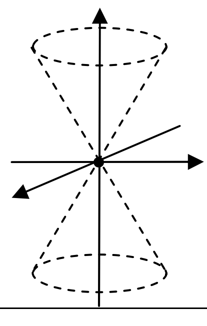
$\boxed{\textbf{16.9(844).}}$ Составить уравнение гиперболы, зная уравнения ее асимптот $y = \pm\frac{x}{2}$ и уравнение одной из ее касательных $5x - 6y - 8 = 0$.

$\boxed{\textbf{16.10(849).}}$ Эллипс, имеющий фокусы в точках (–3, 0), (3, 0), касается прямой $x + y - 5 = 0$. Составить уравнение эллипса.

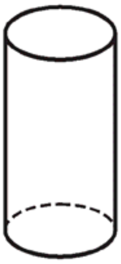
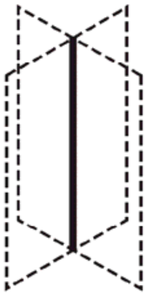
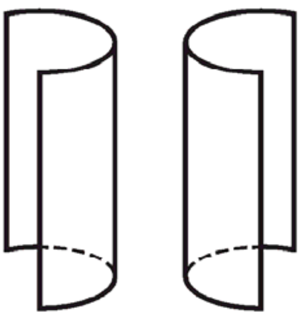
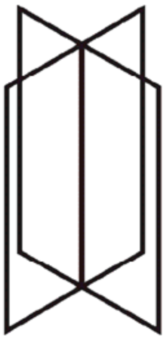
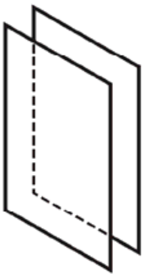
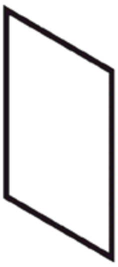
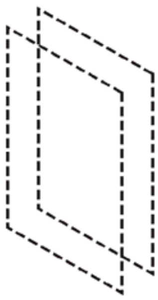
16.11(852*). Определить общие касательные к параболе $y^2 = 4x$ и к эллипсу $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Тема 17. Поверхности второго порядка

Таблица 17.1 Краткие сведения о поверхностях второго порядка.

Вещественный эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 	Мнимый эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ 
Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 	Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 
Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ 	Гиперболический параболоид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 
Вещественный конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 	Мнимый конус (точка) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ 

Девять цилиндров, соответствующих девяти кривым второго порядка.

Эллиптический цилиндр  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Прямая линия (две мнимые пересекающиеся плоскости)  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Мнимый эллиптический цилиндр  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
Гиперболический цилиндр  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Две пересекающиеся плоскости  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Параболический цилиндр  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
Две параллельные плоскости  $y^2=h^2$	Две совпадающие плоскости  $y^2=0$	Две мнимые параллельные плоскости  $y^2=-h^2$

Задачи к теме 17

Во всех задачах этой темы система координат – прямоугольная.

17.1(941). Определить координаты центра и найти радиус каждой из следующих сфер:

1) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$;

2) $x^2+y^2+z^2+8x=0$;

3) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$;

4) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0$.

17.2(945). Найти центр и радиус окружности

$$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0,$$

$$2x+2y+z+1=0.$$

17.3(976). Написать уравнение круглого цилиндра, проходящего через точку (1, –2, 1), осью которого служит прямая

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

17.4(977*). Составить уравнение цилиндра, описанного вокруг сферы $x^2+y^2+z^2=r^2$ зная направляющий вектор (a,b,c) образующих цилиндра.

17.5(984*). Составить уравнение поверхности круглого конуса, вершина которого находится в точке (1, 2, 3), направляющий вектор оси $(2,2,-1)$, а угол образующих конуса с его осью равен $\frac{\pi}{6}$.

17.6(1022). Написать уравнение поверхности второго порядка, проходящей через три окружности

$$x^2+y^2=1,\ z=0;$$

$$x^2+y^2=9,\ z=1;$$

$$x^2+y^2=25,\ z=2,$$

и привести полученное уравнение к каноническому виду.

17.7(1041). Определить вид поверхности и ее расположение относительно начальной системы координат, пользуясь преобразованием левой части ее уравнения:

1) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$;

2) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

3) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

4) $3x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 6x + 4y + 4z + 3 = 0$;

5) $4x^2 + y^2 - 4xy - 36 = 0$.

17.8(1042). Определить вид и расположение поверхности, пользуясь переносом системы координат:

1) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$;

2) $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$;

3) $3x^2 - y^2 + 3z^2 - 18x + 10y + 12z + 14 = 0$;

4) $6y^2 + 6z^2 + 5x + 6y + 30z - 11 = 0$.

17.9(1044*). Определить вид поверхности второго порядка и ее расположение относительно исходной системы координат, пользуясь переносом и поворотом системы координат вокруг одной из ее осей:

1) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy + 4z = 0$;

2) $x^2 + 2x + 3y + 4z + 5 = 0$;

3) $z = x^2 + 2xy + y^2 + 1$.

РЕШЕНИЯ ИЗБРАННЫХ ЗАДАЧ

В данном разделе предлагаются решения следующих задач: 1.9, 5.6, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.6(1), 12.15, 12.16.

Задача 1.9

Из точки *O* выходят два вектора, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM} = \mathbf{c}$, идущий но биссектрисе угла *AOB*.

Решение

Для решения этой задачи достаточно использовать правило параллелограмма, вспомнив при этом, что диагональ в параллелограмме является биссектрисой, если параллелограмм является ромбом, то есть все его стороны оказываются равными. Поэтому достаточно от векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перейти к векторам $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{b}'$, которые направлены также как $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, соответственно, но имеют одинаковые длины $|\mathbf{a}'| = |\mathbf{b}'|$. В качестве векторов $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{b}'$ можно взять *орты* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\mathbf{a}' = \mathbf{e_a}$ и $\mathbf{b}' = \mathbf{e_b}$. Тогда искомое выражение для вектора $\mathbf{c}$ будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}.$$

Можно предложить и другие решения этой задачи, например:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|},\ \mathbf{c} = \mathbf{a}\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} + \mathbf{b} \text{ и т.д. и т.п.}$$

Задача 5.6

Представить вектор $\mathbf{b}$ в виде суммы двух векторов, один из которых параллелен заданному ненулевому вектору $\mathbf{a}$, а другой перпендикулярен.

Решение

1) В задаче требуется представить вектор $\mathbf{b}$ в следующем виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp},$$

где $\mathbf{b}_{\parallel}$ - параллелен вектору $\mathbf{a}$, а $\mathbf{b}_{\perp}$ - перпендикулярен $\mathbf{a}$.

2) Для $\mathbf{b}_{\parallel}$ в силу его параллельности ненулевом вектору $\mathbf{a}$ следует существование такого числа β, что $\mathbf{b}_{\parallel} = \beta\mathbf{a}$. Тогда вектор $\mathbf{b}_{\perp}$ оказывается равным

$$\mathbf{b}_{\perp} = \mathbf{b} - \beta\mathbf{a}.$$

3) Вектор $\mathbf{b}_{\perp}$ перпендикулярен $\mathbf{a}$, следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$\mathbf{ab}_{\perp} = \mathbf{a}(\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}) = \mathbf{ab} - \beta\mathbf{aa} = 0.$$

Из этого уравнения уже можно найти величину β:

$$\beta = \frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{aa}}.$$

4) Теперь можно выписать искомое выражение для вектора $\mathbf{b}_{\parallel}$:

$$\mathbf{b}_{\parallel} = \frac{(\mathbf{ab})}{(\mathbf{aa})}\mathbf{a}$$

Для перпендикулярной составляющей пока (до следующего раздела) получаем следующее выражение

$$\mathbf{b}_{\perp} = \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{ab})}{(\mathbf{aa})}\mathbf{a}.$$

5) Во время решения задачи мы получили общую формулу для проекции одного вектора на другой, ведь $\mathbf{b}_{\parallel}$ ни что иное, как проекция вектора $\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{a}$. Таким образом

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{ab})}{(\mathbf{aa})}\mathbf{a}.$$

Задача 7.1

Представить заданный данный вектор $\mathbf{d}$ в виде разложения произвольного вектора по трем заданным некомпланарным векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Решение

По условию задачи необходимо представить вектор $\mathbf{d}$ в следующем виде:

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}. \qquad (7.1.1)$$

Искомые коэффициенты α, β и γ представляют собой не что иное, как координаты вектора $\mathbf{d}$ в базисе, составленном из векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Существование и единственность такого представления исследована в [2] (см. теоремы 7, 8 в разделах 3, 4).

Для решения задачи воспользуемся тем свойством смешанного произведения, согласно которому смешанное произведение, содержащее два одинаковых вектора равно нулю. Умножим скалярно левую и правую часть соотношения (7.1.1) на векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$:

$$\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + \beta\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + \gamma\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \gamma\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,. \qquad (7.1.2)$$

Отсюда можно найти коэффициент γ

$$\gamma = \frac{\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}. \qquad (7.1.3)$$

Заметим, что согласно условию задачи величина $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, стоящая в знаменателе не равна нулю. Полученный результат можно переписать другим образом:

$$\gamma = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}. \qquad (7.1.4)$$

Аналогично получаем коэффициенты α и β умножая соотношение (7.1.1) на величины $\mathbf{c}\times\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$, соответственно:

$$\alpha = \frac{(\mathbf{d},\mathbf{b},\mathbf{c})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}\ \beta = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{d},\mathbf{c})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}. \qquad (7.1.5)$$

Коэффициент в разложении вектора по базису равен дроби, в знаменателе которой стоит смешанное произведение базисных векторов, а в числителе – это же смешанное произведение, в котором данный вектор стоит вместо базисного вектора, соответствующего искомой координате.

Задача 7.2

Упростить выражение

$$((\mathbf{b}\times\mathbf{c}),(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),(\mathbf{a}\times\mathbf{b})) = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,.$$

Решение

Для решения задачи рассмотрим двойное векторное произведение $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$, где в качестве первого вектора возьмем $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, второго - $\mathbf{c}$, а третьего - $\mathbf{a}$. Тогда

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}((\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a})-\mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))=\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

Умножая это произведение на $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ получаем

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$$

Таким образом, мы показали, что некомпланарность векторов $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ эквивалентна некопланарности векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, то есть величины

$$((\mathbf{b}\times\mathbf{c}),(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),(\mathbf{a}\times\mathbf{b}))=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$$

равны (или не равны) нулю одновременно.

Задача 7.3

Определить вектор $\mathbf{d}$ по заданным скалярным произведениям $\alpha=\mathbf{ad}$, $\beta=\mathbf{bd}$ и $\gamma=\mathbf{cd}$.

Решение

Предложим такое разложение вектора $\mathbf{d}$, чтобы после соответствующих скалярных умножений получалось наиболее простые выражения, желательно содержащие по одному из неизвестных коэффициентов разложения. Одно и таких разложений имеет вид :

$$\mathbf{d}=d_1(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+d_2(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+d_3(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \qquad (7.3.1)$$

Действительно, после скалярного умножения на любой из векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ справа будет оставаться только одно из слагаемых. В тоже время слева будут получаться заданные по условию задачи соответствующие скалярные произведения. Например:

$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}\equiv\alpha=d_1(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}+d_2(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}+d_3(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=d_1(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}. \qquad (7.3.2)$$

Отсюда получаем:

$$d_1=\frac{\alpha}{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}}=\frac{\alpha}{(\mathbf{abc})}. \qquad (7.3.3)$$

Аналогично и для других коэффициентов:

$$d_2 = \frac{\beta}{(\mathbf{abc})} \text{ и } d_3 = \frac{\gamma}{(\mathbf{abc})}. \qquad (7.3.4)$$

В итоге, для вектора $\mathbf{d}$ получаем окончательное выражение

$$\mathbf{d} = \frac{\alpha}{(\mathbf{abc})}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \frac{\beta}{(\mathbf{abc})}(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \frac{\gamma}{(\mathbf{abc})}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \qquad (7.3.5)$$

Мы видим, что для существования решения необходимо по крайней мере чтобы знаменатели в (7.3.5) не равнялись нулю, то есть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не были компланарными.

Задача 7.4 (продолжение задачи 5.6)

Найти компонент вектора $\mathbf{a}$ ортогональный вектору $\mathbf{b} \neq 0$.

Решение

В задаче 5.6 был найден компонент $\mathbf{a}_{\parallel}$ вектора $\mathbf{a}$ параллельный ненулевому вектору $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{b}\frac{(\mathbf{ab})}{(\mathbf{bb})}.$$

Отсюда можно найти компонент $\mathbf{a}_{\perp}$ вектора $\mathbf{a}$ перпендикулярный вектору $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{b}\frac{(\mathbf{ab})}{(\mathbf{bb})}.$$

Теперь приведем правую часть этого выражения к общему знаменателю:

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{b}\frac{(\mathbf{ab})}{(\mathbf{bb})} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{bb}) - \mathbf{b}(\mathbf{ab})}{(\mathbf{bb})}.$$

В числителе стоит не что иное, как двойное векторное произведение $(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}$. Значит, искомое выражение для $\mathbf{a}_{\perp}$ выглядит так

$$\mathbf{a}_{\perp} = \frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b})}{(\mathbf{bb})}.$$

Задача 7.6(1).

Доказать, что

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{vmatrix}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\end{vmatrix}.$$

Решение

Величина $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ представляет собой смешанное произведение трех векторов $(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})$. Следовательно, в нем можно переставить знаки местами:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\}\cdot\mathbf{d}.$$

В фигурных скобках стоит двойное векторное произведение, которое раскрываем согласно правилу:

$$\{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\}\cdot\mathbf{d}=\{\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{a}(\mathbf{cb})\}\cdot\mathbf{d}.$$

Раскрывая фигурные скобки, окончательно получаем искомое соотношение.

$$\{\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{a}(\mathbf{cb})\}\cdot\mathbf{d}=(\mathbf{bd})(\mathbf{ac})-(\mathbf{ad})(\mathbf{cb})=\begin{vmatrix}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\end{vmatrix}.$$

Отметим частный случай соотношения $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{bd})(\mathbf{ac})-(\mathbf{ad})(\mathbf{cb})$, в котором векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$, а также $\mathbf{b}$ и $\mathbf{d}$ совпадают:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{aa})(\mathbf{bb})-(\mathbf{ab})(\mathbf{ab}).$$

Это соотношения связывает длины векторного и скалярного произведения двух векторов:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{ab})^2.$$

Причем последнее соотношение может быть доказано прямо из определений длин векторного и скалярного произведения:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2(\angle\mathbf{ab})=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2(\angle\mathbf{ab}).$$

Это равенство справедливо в силу соотношения $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

Задача 12.15

Определить проекцию точки на прямую на плоскости, расстояние от этой точки $\mathbf{r}_M$ до прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t$. Получить уравнение перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Решение

1. Пусть точка K является проекцией заданной точки M на прямую $\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_M + \overrightarrow{MK}$, причем $\overrightarrow{MK} \perp \mathbf{q}$. Тогда вектор $\overrightarrow{MK}$ является компонентом вектора $\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_M$ перпендикулярным $\mathbf{q}$:

$$\overrightarrow{MK} \equiv (\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_M)_\perp = \frac{\mathbf{q} \times (\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_M)}{\mathbf{q}^2} \times \mathbf{q}, \qquad (12.15.1)$$

где L - любая точка заданной прямой.

Так как точка L принадлежит прямой, то ее радиус-вектор может быть записан в виде $\mathbf{r}_L = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t_L$, где t_L – значение параметра, соответствующее точке L. Тогда для $\overrightarrow{MK}$ получаем:

$$\overrightarrow{MK} = \frac{\mathbf{q} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)}{\mathbf{q}^2} \times \mathbf{q}. \qquad (12.15.2)$$

Длина этого вектора определяет расстояние ρ_M от точки M до прямой:

$$\rho_M = \left|\overrightarrow{MK}\right| = \left|\frac{\mathbf{q} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)}{\mathbf{q}^2} \times \mathbf{q}\right| = \frac{|\mathbf{q} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)|}{|\mathbf{q}|^2}|\mathbf{q}| = \frac{|\mathbf{q} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)|}{|\mathbf{q}|}. \qquad (12.15.3)$$

2. Можно найти расстояние от точки до прямой чисто геометрическим методом. Давайте соединим точку M с любой точкой на прямой, например, с точкой L. Выберем на прямой другую точку, не совпадающую с L, например Q ($Q \neq L$), и отложим от точки Q отрезок $[QP]$, параллельный отрезку $[LM]$, так, чтобы точки M и P оказались в одной полуплоскости.

Площадь полученного параллелограмма будет равна величине векторного произведения $\overrightarrow{LQ} \times \overrightarrow{LM}$, в высота, проведенная из точки M к основанию LQ является искомым расстоянием от точки M до прямой. Высоту параллелограмма можно найти, разделив его площадь на длину основания, к которому проведена эта высота:

$$\rho_M \equiv h = \frac{S}{l} = \frac{\left|\overrightarrow{LQ} \times \overrightarrow{LM}\right|}{\left|\overrightarrow{LQ}\right|}. \qquad (12.15.4)$$

В это равенство подставим выражения для радиусов-векторов точек K и L, принадлежащих прямой:

$$\rho_M = \frac{|(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_L) \times (\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_L)|}{|\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_L|} = \frac{|(\mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t_Q - \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}t_L) \times (\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}t_L)|}{|\mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t_Q - \mathbf{r}_L - \mathbf{q}t_L|} =$$

$$= \frac{|\mathbf{q}(t_Q - t_L) \times (\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}t_L)|}{|\mathbf{q}(t_Q - t_L)|} = \frac{|t_Q - t_L|}{|t_Q - t_L|} \frac{|\mathbf{q} \times (\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0 - \mathbf{q}t_L)|}{|\mathbf{q}|} = \frac{|\mathbf{q} \times (\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0)|}{|\mathbf{q}|}. \qquad (12.15.5)$$

Особенностью такого решения является то, что в качестве точек Q и L можно выбирать какие угодно несовпадающие точки прямой. Например, можно было выбрать такие точки Q и L, чтобы $\overrightarrow{LQ} = \mathbf{q}$ и сразу получить искомый результат, совпадающий с (12.15.3).

3. Однако полное решение этой задачи требует, чтобы мы нашли еще и местоположение точки K – проекции точки M на заданную прямую. Эту задачу решим чуть по-другому.

Пусть точка K на прямой задана своим параметром:

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t_K. \qquad (12.15.6)$$

Чтобы найти значение t_K, потребуем, чтобы вектор $\overrightarrow{MK} = \mathbf{r}_K - \mathbf{r}_M$ был ортогонален прямой, то есть $(\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_M) \cdot \mathbf{q} = 0$. Тогда имеем

$$(\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_M) \cdot \mathbf{q} = (\mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t_K - \mathbf{r}_M) \cdot \mathbf{q} = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M) \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^2 t_K = 0. \qquad (12.15.7)$$

Отсюда получаем, что

$$t_K = -\frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M) \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}. \qquad (12.15.8)$$

Следовательно, радиус-вектор точки K равен

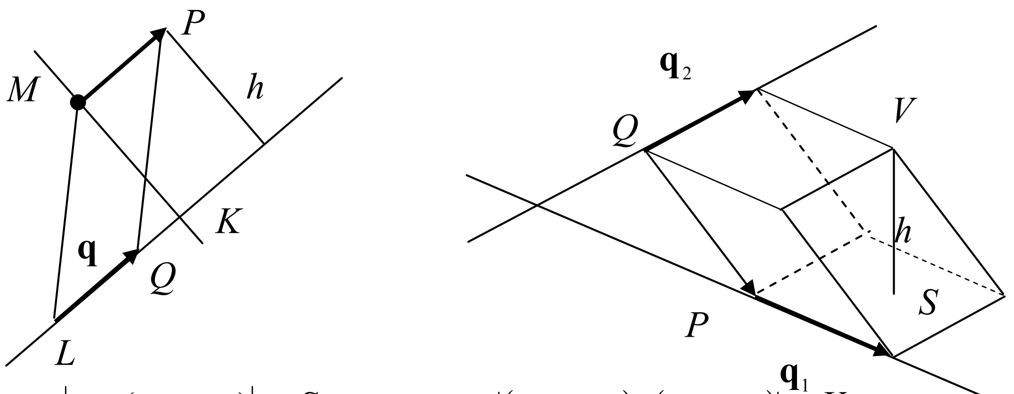
$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_0 - \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M) \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}\mathbf{q}. \qquad (12.15.9)$$

Зная $\mathbf{r}_K$ можно задать уравнение перпендикуляра, например, как уравнение прямой, проходящей через две точки.

Кроме того, можно проверить согласованность разных решений. Так для разности $\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_M$ мы теперь получаем выражение

$$\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M - \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}\mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}\times(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_M)}{\mathbf{q}^2}\times\mathbf{q}\,, \qquad (12.15.10)$$

из которого следует (12.15.3).



$$h = \frac{|\mathbf{q}\times(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_0)|}{|\mathbf{q}|} \equiv \frac{S_{LQPM}}{|LQ|} \qquad h = \frac{|(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20})\cdot(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2)|}{|\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2|} \equiv \frac{V_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\overrightarrow{QP}}}{S_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2}}$$

Рис. 12.1. Расстояние от точки до прямой и между скрещивающимися прямыми.

Задача 12.16

Найти расстояние между скрещивающимися прямыми. Построить уравнение общей нормали.

Решение

Эту задачу тоже можно решать в три этапа. Сначала найдем расстояние между скрещивающимися прямыми. Потом дадим геометрическое объяснение полученного ответа, а затем получим уравнение прямой – общей нормали к данным прямым.

1. Пусть обе прямые заданы векторными параметрическими уравнениями:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{q}_1 u \text{ и } \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{20} + \mathbf{q}_2 v\,, \qquad (12.16.1)$$

где заданы радиус-векторы точек $\mathbf{r}_{10}$ и $\mathbf{r}_{20}$, через которые проходят прямые, их направляющие векторы $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$. Величины u и v являются параметрами для первой и второй прямой соответственно.

В этом случае сразу можно указать вектор $\mathbf{N}$, перпендикулярный обеим прямым:

$$\mathbf{N} = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2 . \qquad (12.16.2)$$

Этот вектор является направляющим вектором для общего перпендикуляра.

Теперь соединим направленным отрезком любую точку на второй прямой Q с любой точкой на первой прямой P:

$$\overrightarrow{QP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{q}_1 u_P - \mathbf{r}_{20} - \mathbf{q}_2 v_Q . \qquad (12.16.3)$$

Предположим, что вектор $\overrightarrow{KM}$, соединяющий точку K на второй прямой с точкой M на первой, перпендикулярен обеим прямым. Тогда этот вектор параллелен вектору $\mathbf{N} = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2$, а длина его равна искомому расстоянию между прямыми $R = \left|\overrightarrow{KM}\right|$. В то же время точка K является ортогональной проекцией точки Q на прямую KM, а точка M – ортогональной проекцией точки P на прямую KM. Следовательно, отрезок $\overrightarrow{KM}$ есть не что иное, как ортогональная проекция отрезка $\overrightarrow{QP}$ на отрезок $\overrightarrow{KM}$ или на вектор $\mathbf{N} = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2$:

$$\overrightarrow{KM} = \mathrm{Pr}_{\mathbf{N}}\, \overrightarrow{QP} = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{N}}{\mathbf{N}^2}\mathbf{N} = \frac{\left(\mathbf{r}_{10} + \mathbf{q}_1 u_P - \mathbf{r}_{20} - \mathbf{q}_2 v_Q\right)\cdot\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)}{\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)^2}\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right). \qquad (12.16.4)$$

Отсюда для $\overrightarrow{KM}$ получаем

$$\overrightarrow{KM} = \frac{\left(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}\right)\cdot\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)}{\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)^2}\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right). \qquad (12.16.5)$$

Длина этого вектора равна расстоянию между скрещивающимися прямыми:

$$R = \left|\overrightarrow{KM}\right| = \left|\frac{\left(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}\right)\cdot\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)}{\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)^2}\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)\right| = \left|\frac{\left(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}\right)\cdot\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)}{\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)^2}\right|\left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right| =$$

$$= \frac{\left|\left(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}\right)\cdot\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)\right|}{\left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right|^2}\left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right| = \frac{\left|\left(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}\right)\cdot\left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right)\right|}{\left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right|}. \qquad (12.16.6)$$

2. Геометрический смысл полученного результата.

Получим выражение (12.16.6) методом, аналогичным приведенному во втором действии задачи 12.15. От произвольной точки Q второй прямой отложим векторы $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ и направленный отрезок $\overrightarrow{QP}$, где точка P –

произвольная точка первой прямой. Теперь построим на этих трех векторах параллелепипед. Высота этого параллелепипеда и будет определять расстояние между данными скрещивающимися прямыми.

Объем этого параллелепипеда равен модулю смешанного произведения этих трех векторов:

$$V = \left|\overrightarrow{QP} \cdot (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)\right|, \tag{12.16.7}$$

а площадь основания определяется величиной векторного произведения векторов $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$:

$$S = \left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right|. \tag{12.16.8}$$

Следовательно, высота оказывается равной

$$h = \frac{V}{S} = \frac{\left|(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \cdot (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)\right|}{\left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right|} = \frac{\left|(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}) \cdot (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)\right|}{\left|\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2\right|}. \tag{12.16.9}$$

Это соотношение совпадает с результатом (12.16.6) и объясняет его геометрический смысл.

3. Для полного решения задачи нам надо определить местоположение точек K и M, которые были введены в первом действии. Эти точки являются концами общего перпендикуляра к заданным скрещивающимся прямым. Следовательно, направленный отрезок

$$\overrightarrow{KM} = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{q}_1 u - \mathbf{r}_{20} - \mathbf{q}_2 v, \tag{12.16.10}$$

перпендикулярен нормали $\mathbf{N} = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2$, общей для заданных прямых. Здесь u – значение параметра, которое соответствует точке M, а v – точке K. Условие перпендикулярности выразим в виде равенства нулю соответствующих скалярных произведений:

$$\begin{cases} \overrightarrow{KM} \cdot \mathbf{q}_1 = 0, \\ \overrightarrow{KM} \cdot \mathbf{q}_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{q}_1 u - \mathbf{q}_2 v) \cdot \mathbf{q}_1 = 0, \\ (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{q}_1 u - \mathbf{q}_2 v) \cdot \mathbf{q}_2 = 0, \end{cases} \tag{12.16.11}$$

где для удобства введен вектор $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}$. После простейших преобразований получаем такую систему уравнений относительно неизвестных u и v:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_1^2 u - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)v = -(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_1), \\ (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)u - \mathbf{q}_2^2 v = -(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_2). \end{cases} \tag{12.16.12}$$

Решение этой системы можно записать в виде

$$u = \frac{\begin{vmatrix} -(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_1) & -(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) \\ -(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_2) & -\mathbf{q}_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{q}_1^2 & -(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) \\ (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) & -\mathbf{q}_2^2 \end{vmatrix}} = \tag{12.16.13}$$

$$= \frac{(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_2^2 - (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)}{-\Delta} = \frac{(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_2^2}{\Delta}.$$

Здесь величина $\Delta = \mathbf{q}_1^2 \mathbf{q}_2^2 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2$ может быть записана в виде

$$\Delta = (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)^2, \tag{12.16.14}$$

полученном в задаче 7.9(1). Выражение же для числителя можно пока не упрощать. Для другого параметра v аналогично получаем:

$$v = \frac{(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_1)(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_1^2}{\Delta}. \tag{12.16.15}$$

Мы получили значения параметров, соответствующие точкам K и M, а следовательно знаем теперь радиус-векторы этих точек, и, значит, можем построить уравнение общего перпендикуляра как прямой, проходящей через эти точки:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{20} + \mathbf{q}_2 v + \overrightarrow{KM} \cdot t. \tag{12.16.16}$$

С другой стороны, мы получили еще одно выражение для вектора $\overrightarrow{KM} = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{q}_1 u - \mathbf{r}_{20} - \mathbf{q}_2 v$, который должен совпадать с ранее полученным (12.16.5).

$$\overrightarrow{KM} = \frac{(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}) \cdot (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)}{(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)^2}(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2). \tag{12.16.17}$$

То есть мы должны убедиться в справедливости равенства

$$\boldsymbol{\rho} + \mathbf{q}_1 \frac{(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_1)\mathbf{q}_2^2}{\Delta} - \tag{12.16.18}$$

$$- \mathbf{q}_2 \frac{(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_1)(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_1^2}{\Delta} = \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)}{(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)^2}\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2,$$

которое после умножения на $\Delta = \mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2 = (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)^2$ принимает вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\rho}\left\{\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2\right\} + \mathbf{q}_1\left\{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_2^2\right\} - \\ - \mathbf{q}_2\left\{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_1^2\right\} = \left\{\boldsymbol{\rho}\cdot(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2)\right\}(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2).\end{gathered} \tag{12.16.19}$$

Убедиться в том, что левую часть этого равенства можно представить в виде правой части можно таким способом. Представим левую часть этого равенства в виде неизвестного вектора $\mathbf{X}$:

$$\begin{gathered}\mathbf{X} = \boldsymbol{\rho}\left\{\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2\right\} + \mathbf{q}_1\left\{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)\mathbf{q}_2^2\right\} - \\ - \mathbf{q}_2\left\{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2) - (\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_1^2\right\}.\end{gathered} \tag{12.16.20}$$

Сначала скалярно умножаем $\mathbf{X}$ поочередно на вектор $\mathbf{q}_1$ и на $\mathbf{q}_2$, и убеждаемся в том, что эти произведения равняются нулю. Значит, вектор $\mathbf{X}$ перпендикулярен векторам $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$, а, следовательно, он параллелен вектору $(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)$ и его можно представить в виде

$$\mathbf{X} = \lambda(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2). \tag{12.16.21}$$

Чтобы найти коэффициент λ, умножаем $\mathbf{X}$ на векторное произведение $(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)$ и для λ получаем следующее соотношение:

$$\left\{(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)\boldsymbol{\rho}\right\}\left\{\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2\right\} = \lambda(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)^2. \tag{12.16.22}$$

Откуда находим, что

$$\lambda = (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)\boldsymbol{\rho}. \tag{12.16.23}$$

Следовательно, вектор $\mathbf{X}$ равен

$$\mathbf{X} = \left\{(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)\boldsymbol{\rho}\right\}(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2), \tag{12.16.24}$$

что и требовалось доказать.

В качестве дополнительного упражнения можно попытаться доказать равенство (12.16.19) путем последовательных прямых преобразований левой части в правую. Дадим только небольшую подсказку. Если перенести первое слагаемое в левой части направо, то в правой части окажется двойное векторное произведение некоторых векторов.

ОТВЕТЫ

1.1. $\overrightarrow{AB}=\dfrac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}$, $\overrightarrow{BC}=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, $\overrightarrow{CD}=\dfrac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2}$, $\overrightarrow{DA}=-\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$.

1.2. $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$, $\overrightarrow{BE}=\dfrac{-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$, $\overrightarrow{CF}=\dfrac{-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{2}$. **1.3.** 0.

1.4. $\overrightarrow{BC}=\dfrac{4\overrightarrow{AL}-2\overrightarrow{AK}}{3}$, $CD=\dfrac{2\overrightarrow{AL}-4\overrightarrow{AK}}{3}$. **1.5.** Точка пересечения медиан треугольника. **1.6.** Точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника. **1.7.** M - точка, в которой пересекаются семь прямых: три прямые, проходящие через середины противоположных ребер тетраэдра, и четыре прямые, проходящие через вершины тетраэдра и точки пересечения медиан противоположных граней. **1.8.** Указание. Повернуть плоскость многоугольника вокруг его центра на центральный угол многоугольника. **1.9.** $OM=\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$. **1.10.** $\overrightarrow{A'B'}=(1{,}0{,}0)$, $\overrightarrow{A'D'}=(0{,}1{,}0)$, $\overrightarrow{A'A}=(0{,}0{,}-1)$, $\overrightarrow{A'C}=(1{,}1{,}-1)$, $\overrightarrow{A'B}=(1{,}0{,}-1)$, $\overrightarrow{A'D}=(0{,}1{,}-1)$, $\overrightarrow{A'C'}=(1{,}1{,}0)$. **1.11.** $\overrightarrow{A_{nm}A_{kl}}=\left(k-n-\dfrac{l}{2}+\dfrac{m}{2}\right)\mathbf{a}+(k-n-l+m)\mathbf{b}$.

1.12. $\mathbf{r}_4=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3$. **1.13.** $\mathbf{r}_4=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_2'=\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3'=\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4'=\mathbf{r}_1'-\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3$. **1.14.** $\mathbf{r}=\dfrac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{3}$. **2.1.** 1) Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ линейно независимы; 2) Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ линейно зависимы и $\mathbf{c}=\dfrac{1}{2}\mathbf{a}+\dfrac{2}{3}\mathbf{b}$; 3) Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ линейно зависимы, но вектор $\mathbf{c}$ не может быть представлен как линейная комбинация векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, так как векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны между собой, а вектор $\mathbf{c}$ им не коллинеарен. **2.2.** $(-96{,}-30{,}0)$. **2.3.** $(-4{,}10{,}3)$. **2.4.** $C=(5{,}3)$, $D=(2{,}5)$. **2.5.** $D=(1{,}-2)$. **2.6.** $(-6{,}-4{,}3)$. **2.7.** $M=(-11{,}2{,}-1)$. **2.8.** 5. **2.9.** $(2{,}2)$, $(-12{,}-12)$, $(6{,}-6)$, $(4{,}-4)$. **2.10.** $M=(2{,}1)$, $r=5$. **2.11.** $(15{,}\pm12)$, $r=15$. **2.12.** $M=(4{,}-4{,}2)$. **2.13.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **3.1.** 1) $\dfrac{2}{3}$; 2) -8; 3) -2; 4) $-\dfrac{4}{9}$. **3.2.** $-x$.

3.3. $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}=-1-\lambda$, $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CA}}=\frac{1}{\lambda}$, $\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AC}}=-\frac{1+\lambda}{\lambda}$, $\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BA}}=-\frac{1}{1+\lambda}$, $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AB}}=-\frac{\lambda}{1+\lambda}$. Указание. Выбрать систему координат так, чтобы $A=(0)$, $B=(1)$. **3.4.** $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}=\frac{(1+\mu)(\nu-\lambda)}{(1+\lambda)(\mu-\nu)}$. Указание. Принять точку A за начало координат, а точку B за единичную точку. **3.5.** $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\frac{\lambda+\lambda\mu+\mu\nu+\lambda\mu\nu}{1+\mu+\nu+\lambda\nu}$. **3.6.** $(-3,3)$, $(7,5)$, $(-3,-3)$. **3.7.** $\lambda=-2$. **3.8.** $\frac{10\sqrt{2}}{3}$. **3.9.** $-\frac{1}{2}$. **3.10.** Пересекает ось Oz и не пересекает осей Ox и Oy. **3.11.** Пересекаются в точке $\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2},11\right)$. **3.12.** $D=\left(\frac{31}{3},\frac{14}{3},\frac{2}{3}\right)$, $M=\left(\frac{9}{2},3,\frac{17}{8}\right)$, $S=(7,8,9)$. **4.1.** 1) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3}$; 2) $\left|\overrightarrow{CD}\right|=10$; 3) $\left|\overrightarrow{EF}\right|=5$. **4.2.** $\left(1,-\frac{2\pi}{3}\right)$. **4.3.** $S=1$. **4.4.** $A=\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$, $B=\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$, $C=(5,0)$, $D=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$. **4.5.** $M_1=\left(6\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$, $M_2=\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$. **4.6.** A: $r=9$, $\varphi=-\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\theta=\arcsin\frac{1}{9}$; B: $r=3$, $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$, $\theta=\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$; C: $r=5$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, $\theta=\arcsin\frac{3}{5}$; D: $r=\sqrt{3}$, $\varphi=-\frac{\pi}{4}$, $\theta=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; E: $r=1$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\theta=0$. **4.7.** $r=2$, $\varphi=\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\theta=-\frac{\pi}{6}$. **4.8.** $\left(\frac{\sqrt{6}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **4.9.** $\cos\alpha=\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{r^2+z^2}}$. **5.1.** $-\frac{3}{2}$. **5.2.** – 19. **5.3.** 0. **5.4.** $\frac{3}{2}a$. Указание. Ввести прямоугольную систему координат, приняв за начало координат вершину A треугольника и за базисный вектор оси абсцисс вектор $\overrightarrow{AB}$. **5.5.** $\mathbf{x}=\frac{(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}}{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}$. **5.6.** $\mathbf{b}=\mathbf{a}-\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\mathbf{n}$. **5.7.** 5; $\arccos\frac{7}{10}$, $\arccos\frac{8}{10}$, $\arccos\frac{9}{10}$. **5.8.** $(-6,6,3)$. **5.9.** $(6,6,0)$. **5.10.** $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{11}{\sqrt{2}},-\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$. **5.11.** $A=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $B=\arccos\frac{5}{3\sqrt{3}}$, $C=\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. **5.12.** $D_1=(-5,7)$,

$C_1=(0,9)$ или $D_2=(-1,-3)$, $C_2=(4,-1)$. **5.13.** $C=(4,3)$, $D=(-2,5)$. Указание. Если M - середина диагонали $\overrightarrow{AB}$, то вершины C и D мы получим, повернув вектор $\overrightarrow{MB}$ один раз на угол $+\pi/2$, другой раз на угол $-\pi/2$. **6.1.** $\mathbf{c}=\left(\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$. **6.2.** $\mathbf{d}=\left(-\frac{3}{\sqrt{38}},\frac{5}{\sqrt{38}},-\frac{2}{\sqrt{38}}\right)$. **6.3.** 9. **6.4.** 48. **6.5.** Два решения: 1) $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{c}=0$; 2) $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=1$, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ попарно ортогональны. **6.9.** $S=\frac{|(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|}=\operatorname{mod}\frac{\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ A & B & C\end{vmatrix}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. **7.1.** $\mathbf{d}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$, где $\alpha=\frac{(\mathbf{d},\mathbf{b},\mathbf{c})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$, $\beta=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{d},\mathbf{c})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$, $\gamma=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$. **7.2.** $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$. **7.3.** $\mathbf{d}=\frac{1}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}(\alpha(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+$ $+\beta(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\gamma(\mathbf{a}\times\mathbf{b}))$. Указание. Разложить вектор $\mathbf{d}$ по базису $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. **7.4.** $\mathbf{a}_\perp=\frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}$. **7.7.** Равенство имеет место тогда и только тогда, когда выполнено по крайней мере одно из двух условий: 1) вектор $\mathbf{b}$ перпендикулярен векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$; 2) векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны. **7.8.** 1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$; 2) $\mathbf{x}=-\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}+\lambda\mathbf{a}$, где λ принимает все действительные значения. **7.9.** $\overrightarrow{OH}=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}{(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. Указание. Ввести ортонормированный базис. **7.10.** $\mathbf{x}=\frac{\alpha\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2}$. **7.11.** Если $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_2+\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_1\neq 0$, то решений нет. Если же $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_2+\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_1=0$, то $\mathbf{x}=\frac{\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_2}$. **7.12.** Если $a^4>4(b^2+pa^2)$, то задача имеет 2 решения: $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{a}+\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$, $\mathbf{y}=(1-\lambda)\mathbf{a}-\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$, где $\lambda=\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4(b^2+pa^2)}}{2a^2}$. Если $a^4=4(b^2+pa^2)$, то одно решение: $\mathbf{x}=\frac{\mathbf{a}}{2}+\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$, $\mathbf{y}=\frac{\mathbf{a}}{2}-\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$. Если $a^4<4(b^2+pa^2)$, то решений нет. **8.1.**

$x=-x'+1$, $y=-y'+1$. **8.2.** 1) $x=2x'+z'+2$, $y=4x'+4y'+z'+1$, $z=x'+4y'+3$; 2) $x'=-x+y-z+4$, $y'=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-\frac{7}{4}$, $z'=3x-2y+2z-10$; 3) $O=\left(4,-\frac{7}{4},-10\right)$, $\mathbf{e}_1=\left(-1,\frac{1}{4},3\right)$, $\mathbf{e}_2=\left(1,-\frac{1}{4},-2\right)$, $\mathbf{e}_3=\left(-1,\frac{1}{2},2\right)$. **8.3.** 1) $x'=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$, $y'=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{4}$, $z'=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}$; 2) $O'=(-1,0,1)$, $\mathbf{e}'_1=(-2,0,1)$, $\mathbf{e}'_2=(-1,-1,3)$, $\mathbf{e}'_3=(-1,-1,1)$; 3) $O=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, $\mathbf{e}_1=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$, $\mathbf{e}_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{5}{4}\right)$, $\mathbf{e}_3=\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. **8.4.** $O=(0,0,0)$, $A=(-1,1,1)$, $B=(1,-1,1)$, $C=(1,1,-1)$. **8.5.** $x=-\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'-3$, $y=-\frac{4}{5}x'+\frac{4}{5}y'-2$. **8.6.** $(2,3)$. **9.1.** $5x+7y-11=0$. **9.2.** $7x+y+18=0$. **9.3.** $x-2y-4=0$. **9.4.** $x+y-12=0$. Вершины $(0,0)$, $(4,8)$, $(2,10)$. **9.5.** 1) Прямые образуют треугольник; 2) прямые имеют одну общую точку; 3) первая и третья прямые параллельны, вторая их пересекает; 4) прямые попарно параллельны. **9.6.** Точки A, B и C лежат в полосе, точки D и F принадлежат одной смежной области, точка E – другой внешней области. **9.7.** Прямая пересекает продолжение отрезка $\overrightarrow{AB}$ за точку B. **9.8.** Точка M лежит на продолжении стороны $\overrightarrow{BC}$ за вершину B. Точка N лежит в области, ограниченной стороной $\overrightarrow{AB}$ и продолжениями сторон $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ за точки A и B. Точка P лежит в области, ограниченной продолжениями сторон $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$ за вершину B. **9.9.** $3x-4y+12=0$. **9.10.** $(2,-7)$. **9.11.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\operatorname{arctg}3$, $\operatorname{arctg}7$. **9.12.** $x=2$. **9.13.** $5x+12y+64=0$, $5x+12y-66=0$. **9.14.** $(3,2)$. **9.15.** $x-y=0$, $7x-56y+25=0$, $77x+21y-50=0$. **10.1.** 1) $x=1$, $y=2$; $y=2$, $z=3$; $z=3$, $x=1$; 2) $3y-2z=0$, $x=1$; $3x-z=0$, $y=2$; $2x-y=0$, $z=3$; 3) $x=1$; $y=2$;

$z=3$. **10.2.** $\{0,0,1\}$. **10.3.** $x=0$, $\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$; $y=0$, $\frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c}$; $z=0$, $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$. **10.4.** $4x+3z=0$, $y+2z+9=0$. **10.5.** $x+y-2z+3=0$. **10.6.** $18x-11y+3z-47=0$. **10.7.** $5x+y-8z+17=0$, $12x+9y-16z+18=0$. **10.8.** $y-2z+4=0$, $3x+4y-z-10=0$. **10.9.** 1) $c\neq 0$; 2) $c=0$, $z_0\neq 0$; 3) $c=0$, $z_0=0$. **10.10.** 1) Пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают. **10.11.** 1) Пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают. **10.12.** 1) Прямая и плоскость пересекаются в точке $(0,0,-2)$; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости; 4) прямая и плоскость пересекаются в точке $(2,3,1)$. **10.13.** 1) Пересекаются в точке $(-3,5,-5)$ и лежат в плоскости $9x+10y-7z-58=0$; 2) скрещиваются; 3) параллельны и лежат в плоскости $5x-22y+19z+9=0$; 4) совпадают. **11.1.** 1) Пересекаются в точке $(-3,0,4)$ и лежат в плоскости $2x-y+6z-18=0$; 2) скрещиваются; 3) параллельны и лежат в плоскости $18x+25y-46z-18=0$; 4) совпадают. **11.2.** 1) Три плоскости пересекаются в точке $(3,5,7)$; 2) три плоскости попарно параллельны; 3) три плоскости проходят через одну прямую; 4) плоскости попарно пересекаются и линия пересечения каждых двух плоскостей параллельна третей плоскости; 5) первая и третья плоскости параллельны; вторая их пересекает. **11.3.** $2x+6y-4z-56=0$. **11.4.** $x+3y-2z-10=0$. Указание воспользоваться уравнением пучка плоскостей. **11.5.** $3x+4y-z+1=0$ и $x-2y-5z+3=0$. **11.6.** $\begin{vmatrix} x-x_0 & a & A \\ y-y_0 & b & B \\ z-z_0 & c & C \end{vmatrix}=0$. **11.7.** $\frac{x+3}{2}=\frac{y-13}{3}=\frac{z-7}{6}$, $d=7$. **11.8.** $(-2,1,4)$. **11.9.** $(7,-7,18)$. **11.10.** $5x-13y-12z+20=0$, $2x-2y+3z-5=0$. **11.11.** 1) $d=3\sqrt{2}$; $5x-11y+4z+5=0$, $x+y-1=0$; 2) $\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{17}{6}\right)$, $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{7}{6}\right)$. **11.12.** $x+y+z-1=0$, $x-1=0$. **11.13.** Два решения: $x+20y+7z-62=0$, $x-z+2=0$. **11.14.** Два решения: $2x+y+z+8=0$, $14x+13y-11z+20=0$.

Указание. Рассмотреть пучок плоскостей, осью которого является данная прямая. **12.1.** $\pm\frac{9}{2\sqrt{33}}$. **12.2.** $\arcsin\frac{1}{10\sqrt{19}}$. **12.3.** $\frac{1}{\sqrt{11}}$. **12.4.** $4x-4y+4z-7=0$, $10x+6y-4z-5=0$. **12.5.** $\left(-\frac{19}{6},-\frac{5}{6},0\right)$. **12.6.** Центр $\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$, радиус равен $\frac{3}{2}$. **12.7.** $\sqrt{14}$. **12.8.** $\sqrt{\frac{35}{6}}$. **12.9.** 1) $\frac{18}{\sqrt{110}}$; 2) $\frac{16}{\sqrt{102}}$. **12.10.** 3. **12.11.** $\mathbf{r}_1+\frac{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$. **12.12.** $2\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0+2\frac{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$. **12.13.** $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\mathbf{a},\mathbf{n})=0$. **12.14.** $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)=0$. **12.15.** $\mathbf{r}_K=\mathbf{r}_0-\frac{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_M)\cdot\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}\mathbf{q}$, $\rho_M=\frac{|\mathbf{q}\times(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_M)|}{|\mathbf{q}|}$, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_M+(\mathbf{r}_M-\mathbf{r}_K)t$. **12.16.** $R=\frac{|(\mathbf{r}_{10}-\mathbf{r}_{20})\cdot(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2)|}{|\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2|}$,

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_{20}+\frac{(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_1)(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_2)-(\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{q}_2)\mathbf{q}_1^2}{(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2)^2}\mathbf{q}_2+t\frac{(\mathbf{r}_{10}-\mathbf{r}_{20})\cdot(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2)}{(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2)^2}(\mathbf{q}_1\times\mathbf{q}_2).$$

13.1. 1) $C=\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $r=\frac{1}{2}$; 2) $C=\left(0,-\frac{3}{2}\right)$, $r=\frac{3}{2}$; 3) $C=(-1,2)$, $r=\sqrt{5}$; 4) $C=\left(1,-\frac{3}{2}\right)$, $r=\frac{4}{3}$. **13.2.** 1) Множество всех внутренних точек полукруга, ограниченного окружностью $(x-3)^2+(y-3)^2=8$ и ее диаметром, лежащим на прямой $y=x$, в которой лежит точка $(5,0)$; 2) множество всех точек большего из двух сегментов, на которые данная прямая разбивает данный круг. **13.3.** $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c$. **13.4.** Два решения: $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, $(x-4)^2+(y-5)^2=25$. **13.5.** $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$. **13.6.** $A(x-a)+B(y-b)\pm r\sqrt{A^2+B^2}=0$. **13.7.** $x^2+y^2-x-3y-10=0$. Указание. Рассмотреть уравнение пучка окружностей

$$x^2+y^2-2x+4y-20+p(x-7y+10)=0.$$

13.8. $(rx_0\pm\rho y_0)x+(ry_0\mp\rho x_0)y=r(x_0^2+y_0^2)$, где $\rho=\sqrt{x_0^2+y_0^2-r^2}$. **13.9.** $3x^2+5y^2=32$. **13.10.** $x^2+\frac{1}{3}y^2=a^2$. **13.11.** $x^2-4y^2+15=0$. **13.12.** $4p\sqrt{3}$.

13.13. Окружность $(x-5)^2+(y-3)^2=25$. **13.14.** $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$. **13.15.** $xy-x+1=0$. **13.16.** Два решения: $xy=1$, $xy-2x+1=0$. **13.17.** $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. Указание. Уравнение искомой линии может быть представлено в виде. $y^2=2px+qx^2$. **13.18.** p. **13.19.** $2x^2-8x+3y-10=0$. **14.1.** $5x^2+6xy+5y^2-6x-10y-3=0$. Указание. Принять оси эллипса за оси новой прямоугольной системы координат. **14.2.** $x^2+2xy+y^2+5x-y=0$. **14.3.** $4xy+3y^2+4y-11=0$. **14.4.** 1) $F_1=(0,-4)$, d_1: $y=-5$; $F_2=(0,4)$, d_2: $y=5$; 2) $F_1=(0,-6)$, d_1: $y=-\frac{2}{3}$; $F_2=(0,6)$, d_2: $y=\frac{2}{3}$; 3) $F=\left(0,\frac{1}{3}\right)$, d: $y=-\frac{1}{3}$. **14.5.** $F=\left(-2,\frac{1}{6}\right)$, $y=\frac{17}{6}$. **14.6.** $F=\left(0,\frac{1}{4a}\right)$, d: $y=-\frac{1}{4a}$. **14.7.** $F_1=(a,a)$, d_1: $x+y-a=0$; $F_2=(-a,-a)$, d_2: $x+y+a=0$. **14.8.** $\frac{x^2}{196}+\frac{y^2}{147}=1$, $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{48}=1$. **14.9.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. Второй фокус $(-2,0)$, вторая директриса $x=-8$. **14.10.** $3x^2-y^2-36x+96=0$. Второй фокус $(10,0)$, вторая директриса $x=7$. **14.11.** $y^2+8x-32=0$. **14.12.** $e=\frac{4}{5}$. **14.13.** $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **14.14.** $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{3}$. **14.15.** Два решения: $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{12}=1$; $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{80}=1$. **14.16.** Два решения: $(x+1)^2-(y-1)^2=2$; $(y+1)^2-(x-1)^2=2$. **14.17.** $3x^2+2xy+3y^2-4x-4y=0$. **14.18.** Две параболы с общим фокусом в центре данной окружности и директрисами, параллельными данной прямой. В случае внешнего касания постоянной и переменной окружности параметр параболы равен $a+r$. В случае внутреннего касания параметр равен $a-r$, где r – радиус окружности, a – расстояние от ее центра до данной прямой. Указание. Найти директрису кривой. **14.19.** $\rho=\frac{25}{12-13\cos\varphi}$. **15.1.** 1) Эллипс; большая полуось равна 4, малая полуось равна 3, центр $(3,-2)$, направляющий вектор большой оси $(1,0)$; 2) гипербола; действительная полуось равна 1, мнимая полуось равна 2, центр $(2,-3)$, направляющий вектор действительной оси $(1,0)$; 3) парабола; параметр равен 2, вершина $\left(\frac{2}{3},1\right)$, направляющий вектор оси в сторону вогнутости $(1,0)$; 4) эллипс, большая полуось равна 5, малая полуось равна 3, центр $(2,-3)$, направляющий вектор большой оси $(1,0)$; 5) гипербола; действительная полуось равна 4, мнимая полуось равна 2, центр $(2,3)$, направляющий вектор действительной оси $(1,0)$; 6) парабола; параметр равен $\frac{8}{3}$, вершина $\left(-2,\frac{3}{2}\right)$, направляющий вектор оси в сторону вогнутости $(0,-1)$; 7) пересекающиеся прямые $3x+2y+10=0$, $3x-2y+2=0$; 8) параллельные прямые $x=2$, $x=-3$; 9) парабола с параметром $p=\frac{a^2}{2b}$, вершина $(0,b)$, направляющий вектор оси в сторону вогнутости $(0,-1)$; 10) гипербола; действительная полуось равна a, мнимая полуось равна b, центр (a,b), направляющий вектор действительной оси $(1,0)$; 11) эллипс; полуоси $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$; центр $(-a,-b)$, оси параллельны осям координат. **15.2.** При $-\infty<\lambda<-1$ – гипербола $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, действительная ось которой параллельна оси Ox; при $\lambda=-1$ – две пересекающиеся прямые $x-y=0$, $x+y+2=0$; при $-1<\lambda<0$ – гипербола $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, действительная ось которой параллельна оси Oy; при $\lambda=0$ – парабола $x^2=2y$; при $\lambda>0$ – эллипс $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$ (при $\lambda=1$ – окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=2$). **15.3.** 1) Эллипс $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$, $O'=(2,3)$, $\mathbf{e}_1'=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\mathbf{e}_2'=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ (рис. $O1$); 2) гипербола $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$,

$O' = (1{,}1)$, $\mathbf{e}_1' = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $\mathbf{e}_2' = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ (рис. $O2$); 3) парабола $y'^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} x'$, $O' = (3{,}2)$, $\mathbf{e}_1' = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\mathbf{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ (рис. $O3$);

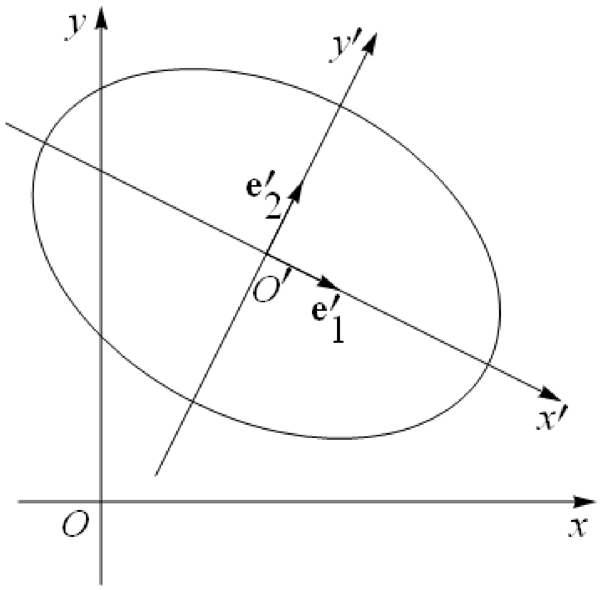


Рис. $O1$

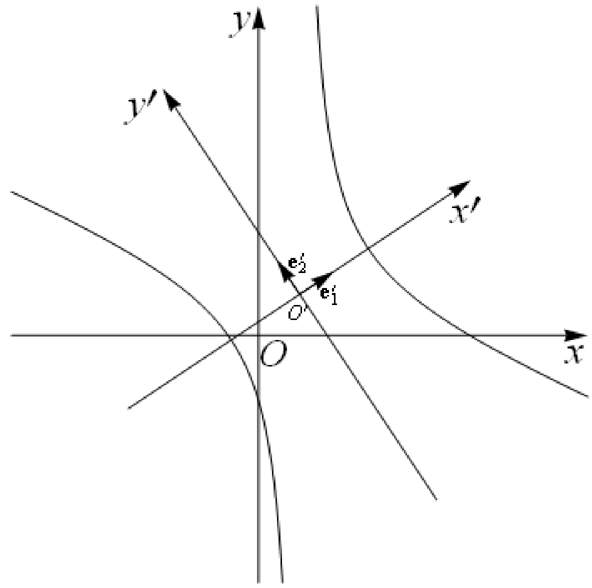


Рис. $O2$

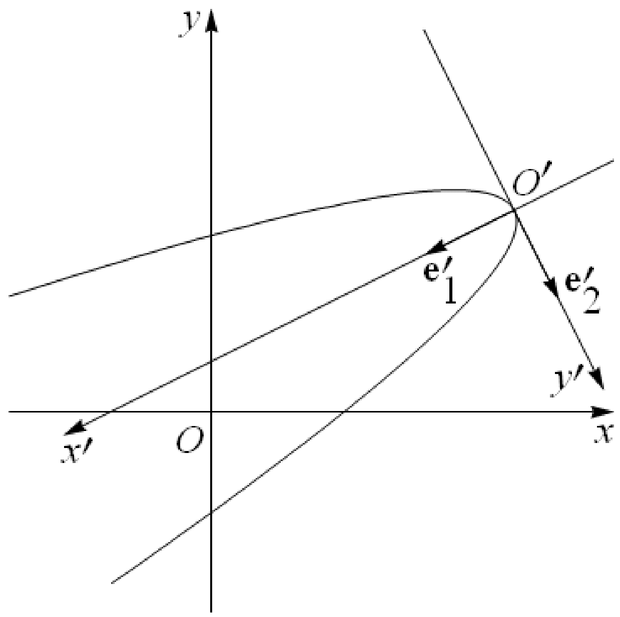


Рис. $O3$

4) пересекающиеся прямые $x - y - 1 = 0$, $x - 4y + 2 = 0$; 5) параллельные прямые $2x - 3y + 1 = 0$, $2x - 3y - 2 = 0$; 6) эллипс $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1$, $O' = \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $\mathbf{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\mathbf{e}_2' = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; 7) гипербола $\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{9} = 1$, $O' = (2,-1)$,

$\mathbf{e}_1'=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\mathbf{e}_2'=\left(-\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$; 8) парабола $y'^2=4\sqrt{2}x'$, $O'=(2,1)$, $\mathbf{e}_1'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{e}_2'=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 9) пересекающиеся прямые $2x+3y-5=0$, $x-4y+2=0$; 10) параллельные прямые $2x-y+1=0$, $2x-y-4=0$; 11) эллипс $\frac{x'^2}{35/6}+\frac{y'^2}{35/36}=1$, $O'=\left(\frac{7}{6},\frac{1}{3}\right)$, $\mathbf{e}_1'=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\mathbf{e}_2'=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; 12) гипербола $\frac{x'^2}{9/8}-\frac{y'^2}{9/5}=1$, $O'=(0,1)$, $\mathbf{e}_1'=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$, $\mathbf{e}_2'=\left(-\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$; 13) парабола $y'^2=10x'$, $O'=(-1,2)$, $\mathbf{e}_1'=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$, $\mathbf{e}_2'=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$; 14) пересекающиеся прямые $x+y-2=0$, $3x-2y+1=0$; 15) параллельные прямые $2x-3y-2=0$, $2x-3y-8=0$; 16) эллипс $\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{1}=1$, $O'=(0,1)$, $\mathbf{e}_1'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{e}_2'=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; 17) гипербола $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$, $O'=(1,1)$, $\mathbf{e}_1'=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$, $\mathbf{e}_2'=\left(-\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$; 18) парабола $y'^2=\frac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O'=(2,3)$, $\mathbf{e}_1'=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\mathbf{e}_2'=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; 19) пересекающиеся прямые $2x+5y+1=0$, $2x-3y-5=0$; 20) параллельные прямые $2x+y+3=0$, $2x+y+5=0$. **15.4.** При $-\infty<\lambda<-1$ – гипербола $(1-\alpha)x'^2+(1+\alpha)y'^2=1$, действительная ось которой имеет угловой коэффициент равный –1; при $\lambda=-1$ – две параллельные прямые $x-y\pm1=0$; при $-1<\lambda<1$ – эллипс $(1-\alpha)x'^2+(1+\alpha)y'^2=1$, большая ось которого имеет угловой коэффициент, равный –1 (при $\lambda=0$ – окружность $x^2+y^2=1$); при $\lambda=1$ – две параллельные прямые $x+y\pm1=0$; при $\lambda>1$ – гипербола $(1-\alpha)x'^2+(1+\alpha)y'^2=1$, действительная ось которой имеет угловой коэффициент равный 1. **15.5.** 1) $3x+4y+14=0$, $x+y-3=0$; 2) $x=3$,

$y=-\frac{1}{3}x+1$. **15.6.** $y=\frac{1}{2}x$. **15.7.** $32x+25y-89=0$. **15.8.** $x=2$, $x+4y-14=0$. **16.1.** $3x+4y-24=0$, $3x-28y-120=0$. **16.2.** $x=1$, $5x-2y+3=0$. **16.3.** $x-3y+9=0$, $9x+3y+1=0$. **16.4.** $y^2=4x$. **16.5.** 2. **16.6.** $x+y\pm 5=0$. **16.7.** $\pm 3x\pm 4y+15=0$. **16.8.** $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$. **16.9.** $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. **16.10.** $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$. **16.11.** $x\pm 2y+4=0$. **17.1.** 1) $(6,-2,3)$, $r=7$; 2) $(-4,0,0)$, $r=4$; 3) $(1,-2,3)$, $r=6$; 4) $(0,0,3)$, $r=4$. **17.2.** Центр $\left(\frac{10}{3},-\frac{14}{3},\frac{5}{3}\right)$, радиус равен 3. **17.3.** $8x^2+5y^2+5z^2-4xy+8yz+4zx+16x+14y+22z-39=0$.

17.4. $\begin{vmatrix} y & z \\ b & c \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ c & a \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}^2=r^2\left(a^2+b^2+c^2\right).$

17.5. $11x^2+11y^2+23z^2-32xy+16xz+16yz-6x-60y-186z+342=0$.

17.6. $x^2+y^2-4z^2-4z-1=0$; каноническое уравнение $x'^2+y'^2-4z'^2=0$. **17.7.** 1) Пара пересекающихся плоскостей $x+y+z-1=0$, $x+y-z+1=0$; 2) сфера $(x-1)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+z^2=\frac{16}{9}$; 3) круглый цилиндр $(x-1)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$; 4) круглый конус $(x-1)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\left(z-\frac{2}{3}\right)^2=0$; 5) пара параллельных плоскостей $2x-y\pm 6=0$. **17.8.** 1) Эллипсоид $\frac{x'^2}{49}+\frac{y'^2}{49/4}+\frac{z'^2}{49/9}=1$; центр $(3,1,-2)$, большая, средняя и малая оси соответственно параллельны осям Ox, Oy, Oz; 2) однополосный гиперболоид вращения $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{16}-\frac{z'^2}{16}=-1$; центр $(-4,0,-6)$, ось вращения параллельна оси Ox; 3) круглый конус $x'^2-\frac{y'^2}{3}+z'^2=0$; вершина $(3,5,-2)$, ось вращения параллельна оси Oy; 4) параболоид вращения; $p=\frac{5}{12}$, вершина $\left(10,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$, направляющий вектор оси вращения $(-1,0,0)$. **17.9.** 1) Круговой цилиндр $x'^2+z'^2=\frac{4}{25}$ с радиусом $\frac{2}{5}$; ось цилиндра проходит через точку $\left(0,0,-\frac{2}{5}\right)$ и имеет направляющий вектор $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)$; 2) параболический цилиндр $x'^2-5y'=0$; параметр параболы $x'^2-5y'=0$, $z'=0$, являющейся направляющей цилиндра, равен $\frac{5}{2}$, вершина параболы $\left(-1,-\frac{12}{25},-\frac{16}{25}\right)$; направляющий вектор оси параболы в сторону вогнутости $\left(0,-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$, направляющий вектор образующих цилиндра $\left(0,\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$; 3) параболический цилиндр $z'=2x'^2$; параметр параболы $z'=2x'^2$, $y'=0$ равен $\frac{1}{4}$, вершина параболы $(0,0,1)$; направляющий вектор оси параболы в сторону вогнутости $(0,0,1)$, направляющий вектор образующих цилиндра $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1976. – 384 с.

2. Немченко К.Э.. Аналитическая геометрия. – М.: Эксмо, 2007. – 352 с.

3. Нємченко К.Е. Аналітична геометрія (схеми, таблиці та задачі). Методичні вказівки до курсу «Аналітична геометрія» для студентів першого курсу спеціальностей фізико-математичного напряму, Харків, 2007.

4. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968.

5. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М: Наука, 1971.

6. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. – М: изд-во МГУ, 1969.

7. Постников М.М. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1973.

8. Ильин В.А., Позднняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Учеб.: Для вузов. – 5-е изд. – М.: Наука, 1999. – 224 с.