

**Министерство образования и науки Украины  
Харьковский национальный университет  
имени В. Н. Каразина**

**Адаменко И. Н.**

**ВОЗМУЩЕНИЯ КОНЕЧНЫХ  
АМПЛИТУД В ЖИДКОСТЯХ**

Учебно-методическое пособие для студентов  
физико-математических и технических специальностей

**Харьков – 2008**

УДК 534 -14 (075.8)  
ББК 22.253я 73  
А 28

*Рекомендовано к печати ученым советом  
Института высоких технологий  
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина  
(протокол № 10 от 21.09.07)*

**Рецензенты:**

Зав. кафедрой теоретической ядерной физики физико-технического факультета, доктор физико-математических наук, профессор **Ю. А. Бережной**;  
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теплофизики и молекулярной физики физико-энергетического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина **К. Э. Немченко**.

**Адаменко И. Н. Возмущения конечных амплитуд в жидкостях.**  
А 28 Учебно-метод. пособие. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2008. – 84 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов физико-математических и технических специальностей. Оно будет полезным аспирантам и научным работникам, а также принесет пользу инженерам, имеющим дело с волновыми явлениями.

Учебно-методическое пособие написано на основе лекций, которые читались автором в курсах «Механика сплошных сред» и «Квантовые сплошные среды» студентам Института высоких технологий Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина.

УДК 534 -14 (075.8)  
ББК 22.253я 73

- © Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2008
- © Адаменко И. Н., 2008
- © Макет обложки Дончик И. Н., 2008

А497822

## Введение

Предлагаемое учебное пособие посвящено одному из важных разделов физики – волнам конечной амплитуды в жидкости, которыми, в частности, являются ударные волны, солитоны, волны цунами. Интенсивное развитие этой области науки обусловлено применимостью ее во многих других разделах физики и математики, а также ее практической значимостью.

Общность волн конечной амплитуды в жидкости со многими явлениями природы выяснилась относительно недавно, в последние 50 лет. Так, например, сейчас изучают возмущения конечной амплитуды в сверхпроводниках, плазме, живых организмах, галактиках и т. д. Многие физики сейчас увлечены идеей о том, что элементарные частицы можно рассматривать как солитоны. Для математики теория волн конечной амплитуды послужила стартовой площадкой при построении важного раздела – теории решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Что касается практической значимости теории волн конечной амплитуды, то достаточно упомянуть только три области ее применимости. Так, теория волн цунами дает возможность прогнозировать их появление у берегов островов и материков. Теория распространения ударных волн широко используется в инженерном и военном деле. Уже начинается применение солитонов для хранения и передачи информации.

Учебное пособие написано на основе лекций, которые читались автором в курсах «Механика сплошных сред» и «Квантовые сплошные среды» студентам Института высоких технологий Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина. Относительно небольшой размер каждого из 11 разделов пособия отвечает объему рассматриваемого на лекциях вопроса.

Наряду с традиционными разделами пособие также содержит результаты исследований автора в области свертких жидкостей, которые были опубликованы в ведущих научных международных журналах. При этом некоторые даже хорошо известные вещи в пособии представлены несколько иначе, чем это сделано в книгах и статьях других авторов.

При написании пособия предполагалась его автономность, которая позволяет понять изложенный материал, не прибегая к помощи соответствующих учебников и специальной литературы. Эту задачу, в частности, выполняют первый и второй разделы пособия, где в предельно сжатой и доступной форме преподносятся основы механики сплошных сред.

Учебное пособие имеет теоретический характер. В связи с этим описание экспериментальных установок и методов сведено к минимуму. Однако результатам экспериментов и сопоставлению их с теоретическими расчетами уделяется должное внимание. При этом в методических целях воспроизводятся основные этапы построения теории, которая объясняет эксперимент.

Первым таким этапом является качественное понимание физических причин наблюдаемого явления. Вторым – получение уравнений, которые отображают физику явления. Третьим – решение этих уравнений и сопоставление расчетных значений с результатами эксперимента. Именно по такой схеме получено уравнение Кортевега – де Фриза и написан раздел 11, который отображает результаты исследований, выполненных автором пособия.

Учебное пособие предназначено для студентов физико-математических и технических специальностей. Оно будет полезным аспирантам и научным работникам, а также принесет пользу инженерам, имеющим дело с волновыми явлениями.

## 1. Система уравнений идеальной жидкости

Будем исходить из макроскопического подхода, который позволяет рассматривать жидкости и газы как сплошную среду. Макроскопическое описание жидкостей и газов возможно, когда их микроскопический параметр  $l_0$ , которым, в частности, может быть расстояние между атомами (молекулами), много меньше характерного линейного размера задачи  $L$ . Неравенство

$$\frac{l_0}{L} \ll 1 \quad (1.1)$$

позволяет рассматривать жидкости и газы как сплошную среду. Макроскопическое описание состояния жидкостей и газов, рассматриваемых как непрерывная сплошная среда, представляет собой содержание одного из разделов физики, который называется гидродинамикой.

Математический аппарат гидродинамики построен так, что он не делает различия между жидкостями и газами. Поэтому в дальнейшем для краткости будем говорить о жидкости, имея в виду как жидкости, так и газы. Методы гидродинамики применимы фактически к любым непрерывным и легко подвижным, т. е. текучим сплошным средам. В частности, они используются при описании плазмы, электронной жидкости металлов, нейтронной жидкости звезд и т. д.

Все фигурирующие в гидродинамике понятия предполагают выполнение неравенства (1.1). Поэтому, например, под бесконечно малым элементом объем  $d^3r$  следует понимать не математически, а «физически» бесконечно малый объем, удовлетворяющий неравенству

$$l_0^3 \ll d^3r \ll L^3. \quad (1.2)$$

В этом же смысле в гидродинамике употребляются и такие понятия, как «жидкая частица», «точка в жидкости» и т. д. Все они подразумевают объемы, малые по сравнению с характерными объемами задачи, но содержащие макроскопически большое число атомов (молекул), которые образуют жидкость.

Таким образом, гидродинамика «не знает» о молекулярном строении вещества. При таком подходе, конечно, невозможно

построить замкнутую теорию жидкости. Гидродинамическая теория строится по другому принципу, называемому феноменологическим. Суть его сводится к тому, что все макроскопические явления в жидкости (вязкость, теплопроводность, диффузия и т. д.), обусловленные ее молекулярным строением, задаются в виде феноменологических постулатов, исходя из которых и создается вся теория.

Несомненные преимущества феноменологического макроскопического описания – его простота, изящность и наглядность, позволяющие, как правило, довести задачу до конца. К недостаткам такого метода следует отнести вытекающую из него ограниченность теории. При этом речь идет не только об ограниченном классе решаемых таким методом задач, но и о том, что сама природа ряда интересных явлений остается вне рамок такого подхода. В предлагаемом учебном пособии будем исходить из макроскопического метода феноменологического описания жидкостей. Однако в ряде случаев для того, чтобы компенсировать второй из указанных недостатков, будут на качественном уровне обсуждаться феноменологические постулаты теории исходя из молекулярного строения рассматриваемой сплошной среды.

В гидродинамике жидкость считается полностью описанной, если в каждой точке в любой момент времени известны скорость ее движения  $\mathbf{v}$  и две термодинамические величины (например, такие как плотность  $\rho$  и давление  $p$ ). Задание свойств самой жидкости осуществляется посредством уравнений состояний, которые позволяют выразить любую термодинамическую величину через две другие, выбранные в качестве независимых переменных. При решении задач гидродинамики уравнения состояния предполагаются известными.

При гидродинамическом подходе считается, что жидкость полностью описана, если задан набор пяти функций координат и времени, в качестве которых берутся три компоненты скорости ее движения и какие-нибудь две термодинамические функции, выбранные в качестве независимых переменных:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t); \quad \rho = \rho(\mathbf{r}, t); \quad p = p(\mathbf{r}, t). \quad (1.3)$$

Для жидкости, как и для любой другой физической системы, существует принцип причинности, согласно которому состояние

жидкости предопределено, если известны начальные и внешние условия. Начальными условиями для жидкости являются функции (1.3), заданные в некий момент времени  $t = 0$ , а внешние условия определяются сосудом, в котором находится жидкость, и внешними силами, действующими на нее. В связи с этим набор функций (1.3) считается полным поскольку значения этих функций в начальный момент времени  $t = 0$  позволяет найти эти функции при  $t > 0$ .

Для описания состояния жидкости в любой момент времени при заданных начальных и внешних условиях необходима система пяти уравнений относительно пяти функций (1.3). Эти уравнения следуют из пяти законов сохранения: массы, трех компонент импульса и энергии. Получение этих уравнений приведено в [1]. Здесь ограничимся результатами и обсудим их физический смысл.

Закон сохранения массы дается равенством

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \rho \mathbf{v}. \quad (1.4)$$

Закон сохранения импульса запишем в виде уравнения движения жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{F}, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{F}$  – внешняя сила, действующая на единицу массы жидкости.

Из закона сохранения энергии следует сохранение энтропии единицы массы жидкости, которое описывается уравнением

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) s = 0. \quad (1.6)$$

Задание свойств жидкости, для которой написана система уравнений (1.4)–(1.6), осуществляется посредством уравнений состояния жидкости. Эти уравнения позволяют определить все термодинамические величины жидкости по значениям каких-либо двух из них.

Запишем уравнение состояния в виде

$$s = s(p, \rho). \quad (1.7)$$

Число уравнений (1.4) – (1.6) с учетом (1.7) равно числу искомых функций (1.3). Обсудим физический смысл уравнений (1.4) – (1.6) и условия их применимости. Начнем с закона сохранения массы, согласно которому изменение массы в единицу времени в единице объема  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  связано с зависимостью плотности потока массы  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  от координаты. Зависимость  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  приводит к тому, что при движении жидкости приносимая масса в единицу рассматриваемого объема не равна уносимой массе. Разница между втекающей и вытекающей массами равна дивергенции вектора  $\rho \mathbf{v}$ , взятой со знаком минус.

Уравнение (1.5) – это второй закон Ньютона для жидкости. Действительно, производные от скорости

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \right) \mathbf{v} \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{v} \quad (1.8)$$

описывают изменения в единицу времени скорости единицы массы жидкости, движущейся в пространстве. В связи с этим сумму производных, которая записана в левой части равенства (1.8), обозначают как  $\frac{d}{dt}$  и называют индивидуальной производной, поскольку она дает приращение в единицу времени величины  $\mathbf{v}$ , относящейся к движущейся в пространстве («меченной») индивидуальной единицы массы жидкости. Левая часть равенства (1.8) выражает указанное приращение через величины, относящиеся к неподвижным в пространстве точкам. Из соотношения (1.5) следует, что ускорение индивидуальной единицы массы жидкости равно сумме действующих на эту единицу массы сил.

Первая из них  $(-\nabla p / \rho)$  связана с разными значениями давления в разных точках пространства, а вторая  $\mathbf{F}$  – обусловлена внешней силой, действующей на единицу массы жидкости. Такой внешней силой может быть, например, сила тяжести  $\mathbf{g}$ .

Отметим, что в правой части уравнения (1.5) отсутствует сила, обусловленная вязкостью жидкости, т. е. внутренним трением жидкости, которая стремится ликвидировать зависимость скорости



от координаты. Отсутствие такой силы приводит, в частности, к тому, что уравнение (1.5) допускает движение слоев жидкости относительно друг друга с разными скоростями так, что один слой жидкости скользит по другому. В гидродинамическом масштабе времени вязкость мгновенно устранит такое проскальзывание слоев и приведет к принципиально иной картине течения.

Вязкость обусловлена молекулярным строением вещества, о котором «не знает» гидродинамика. В гидродинамике наличие такой силы постулируется исходя из результатов наблюдений. Жидкость, в которой вязкость не учитывается называется идеальной. Таким образом, уравнение (1.4) является точным, а уравнение (1.5) является приближенным и применимо только при описании идеальной жидкости.

Вязкость, которая не учитывается в идеальной жидкости, имеет много общего с явлением теплопроводности, обеспечивающим поток тепловой энергии в неравномерно нагретой жидкости. Теплопроводность ликвидирует температурные градиенты в жидкости, а вязкость устраняет зависимость скорости  $v$  от координаты. Таким образом, оба явления приводят к установлению равновесия в жидкости: вязкость – по скоростям, теплопроводность – по температуре.

Физический механизм, определяющий вязкость и теплопроводность, один и тот же. Он связан с переносом молекулами импульса (энергий) из областей, где скорости (температуры) больше, в области, где они меньше. Поэтому при выводе закона сохранения энергии в идеальной жидкости наряду с вязкостью не следует учитывать и теплопроводность. В этом случае каждая движущаяся в пространстве индивидуальная единица массы будет сохранять свою тепловую энергию. Изменение тепловой энергии  $\delta Q$  связано с изменением энтропии  $\delta s$  равенством

$$\delta s = \frac{\delta Q}{T}, \quad (1.9)$$

где  $T$  – температура жидкости.

Если в жидкости отсутствует вязкость и теплопроводность, то  $\delta Q = 0$  и согласно (1.9) энтропия  $s$  движущейся в пространстве

индивидуальной единицы массы не меняется. Этот результат, исходя из определения индивидуальной производной  $\frac{d}{dt}$ , можно записать в виде

$$\frac{ds}{dt} = 0. \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) с учетом определения (1.8) дает уравнение (1.6), которое отображает тот факт, что каждая индивидуальная единица массы жидкости при движении «носит» свою энтропию с собой, поскольку в идеальной жидкости нет превращения кинетической энергии в тепловую и отсутствует теплообмен между разными индивидуальными единицами массы.

Система уравнений идеальной жидкости (1.4) – (1.6) применима тогда, когда наличие вязкости и теплопроводности в жидкости являются несущественными для рассматриваемой задачи и ими можно пренебречь в нулевом приближении по малому параметру (1.1).

Отметим, что существуют жидкости, у которых вязкость отсутствует. Такие жидкости называются сверхтекучими. Они обладают уникальными свойствами. Некоторые из них мы обсудим в разделах 4, 6, 9 и 11.

Полученную систему уравнений необходимо дополнить граничными условиями на ограничивающих жидкость стенках. Обозначим  $\mathbf{f}_c$  нормаль к элементу твердой поверхности  $f_c$ , граничащей с жидкостью. Отсутствие потока массы через твердую неподвижную поверхность приводит к равенству нулю нормальной к поверхности стенки компоненты скорости жидкости, т. е.

$$\mathbf{v}\mathbf{f}_c |_{f_c} = 0. \quad (1.11)$$

Что же касается тангенциальной компоненты скорости, то на нее нет ограничений в идеальной жидкости и она у стенки может принимать любое значение.

Система уравнений (1.4) – (1.6) с уравнением состояния (1.7) и граничными условиями (1.11) полностью описывает идеальную жидкость. В частности, она позволяет для идеальной жидкости, свойства которой заданы соотношением (1.7), найти функции

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $p = p(\mathbf{r}, t)$ , если они заданы во всем пространстве в некий начальный момент времени  $t = 0$ .

## 2. Одномерные уравнения идеальной изэнтропичной жидкости

Система уравнений (1.4) – (1.6) является нелинейной, поскольку содержит слагаемые, в которые входят произведения искомым функций. Такими слагаемыми являются правая часть уравнения (1.4), второе слагаемое левой части и первое слагаемое правой части равенства (1.5), а также второе слагаемое уравнения (1.6).

Для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в настоящее время нет алгоритма получения их решения в общем случае. Каждая, конкретно поставленная задача, требует индивидуального подхода. В связи с этим представляют несомненный интерес ситуации, когда система уравнений (1.4) – (1.6) упрощается настолько, что можно получить достаточно общее ее решение.

Такой задачей, в частности, является одномерное изэнтропичное движение идеальной жидкости. Получим систему уравнений, которая описывает указанную ситуацию. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  энтропия  $s$  всех индивидуальных частиц одинаковая и равна  $s_0$ . Тогда, согласно уравнению (1.6), которое с учетом (1.8) совпадает с (1.10), энтропия  $s_0 = \text{const}$  во всех точках жидкости в любой момент времени. Такое движение жидкости называется изэнтропическим. В этом случае уравнение состояния жидкости (1.7) удобно записать в виде

$$p = p(\rho, s_0). \quad (2.1)$$

Пусть внешняя сила отсутствует, тогда с учетом (2.1) уравнение (1.5) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{c_p^2}{\rho} \nabla \rho. \quad (2.2)$$

где

$$c_\rho = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s=s_0}}. \quad (2.3)$$

Отметим, что производная

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} > 0. \quad (2.4)$$

Неравенство (2.4) следует из условия устойчивости жидкости к малым возмущениям в ней. Действительно, если  $\frac{\delta p}{\delta \rho} < 0$ , то малое увеличение плотности  $\delta \rho > 0$  в какой-то точке однородной жидкости привело бы к изменению давления в этой точке на величину  $\delta p < 0$ . В этом случае возникнет сила  $(-\nabla p)$ , которая согласно (1.5) будет двигать жидкость в точку, где давление уменьшилось. В результате плотность в рассматриваемой точке будет увеличиваться, а давление падать, поскольку  $\frac{\delta p}{\delta \rho} < 0$ . В итоге при малой флуктуации плотности в какой-то точке жидкости с  $\frac{\delta p}{\delta \rho} < 0$  вся жидкость окажется в этой точке. Таким образом, при рассматриваемом устойчивом жидком состоянии выполняется неравенство (2.4) и  $c_\rho = c_\rho(\rho)$  является вещественной функцией.

Рассмотрим одномерный случай, когда все функции, характеризующие жидкость, зависят только от одной координаты  $x$  и отлична от нуля только  $x$  – составляющая скорости  $v_x$ , а  $v_y = v_z = 0$ . Одномерные уравнения жидкости согласно (1.4) и (2.2) записываются в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho v_x}{\partial x}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{c_\rho^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Получение решения системы двух уравнений (2.5), (2.6) для двух искомых функций  $v_x = v_x(x, t)$  и  $\rho = \rho(x, t)$  при заданной функции  $c_\rho = c_\rho(\rho)$  является корректно поставленной математической задачей, которая возникает в ряде различных разделов физики. При этом получающиеся уравнения совпадают с системой (2.5), (2.6), но функции  $\rho$  и  $v_x$  могут иметь уже другой физический смысл и соответственно другие буквенные обозначения, отвечающие рассматриваемой задаче. В частности, как будет показано в следующем разделе, система уравнений (2.5), (2.6) описывает длинные волны в жидкости со свободной поверхностью.

### 3. Уравнения для длинных волн в жидкости со свободной поверхностью

Рассмотрим жидкость со свободной поверхностью (рис. 3.1) в поле внешней силы  $\mathbf{F}$  с компонентами

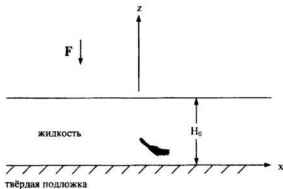


Рис. 3.1. Покоящаяся жидкость на твердой подложке в поле внешней силы  $\mathbf{F}$

$$F_x = F_y = 0, F_z = -F, \text{ где } F = F(z) > 0. \quad (3.1)$$

Для покоящейся жидкости, находящейся в поле внешней силы (3.1), компоненты уравнения (1.5) записываются в виде

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -F(z). \quad (3.2)$$

Из уравнений (3.2) следует, что  $P = P(z)$  и  $\rho = \rho(z)$ . Но, если две термодинамические величины зависят только от координаты  $z$ , то, согласно уравнениям состояния жидкости, все ее термодинамические величины зависят только от координаты  $z$ . Отсюда следует, что свободная поверхность покоящейся жидкости в поле внешней силы (3.1) должна быть плоскостью  $z = H_0$ .

Пусть жидкость находится на твердой подложке, которая совпадает с плоскостью  $x, y$ . Тогда в состоянии равновесия глубина жидкости постоянная и равна  $H_0$  (рис. 3.1).

Если поверхность жидкости в каком-либо месте вывести из ее равновесного плоского состояния, то в ней возникнет движение, обусловленное колебаниями жидкости вблизи ее положения равновесия. Получим уравнения, описывающие это движение.

Рассмотрим движение, которое зависит от координат  $x$  и  $z$ , и не зависит от координаты  $y$ . Не будем учитывать сжимаемость жидкости, т. е. будем считать, что  $\rho = const$ . Тогда уравнение (1.4) запишется в виде:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.3)$$

Оценим производные, содержащиеся в (3.3). Если  $\lambda$  – расстояние по оси  $x$  на котором скорость  $v_x$  меняется от своего максимального значения до минимального, то, очевидно,

$$\left| \frac{\partial v_x}{\partial x} \right| \approx \frac{|v_x|}{\lambda}. \quad (3.4)$$

Учитывая граничное условие (1.11), имеем

$$\left| \frac{\partial v_z}{\partial z} \right| \approx \frac{|v_z|}{H}, \quad (3.5)$$

где  $H$  – глубина жидкости.

Из равенства (3.3) и оценок (3.4), (3.5) следует соотношение между характерными значениями модулей  $z$  и  $x$  составляющих скоростей

$$|v_z| \approx \frac{H}{\lambda} |v_x|. \quad (3.6)$$

Если

$$\frac{H}{\lambda} \ll 1, \quad (3.7)$$

то согласно (3.6) в нулевом приближении по малому параметру (3.7) поперечное движение жидкости отсутствует, т. е.

$$v_z = 0. \quad (3.8)$$

Для волнового движения в жидкости неравенство (3.7) предполагает, что длина волны  $\lambda$  велика по сравнению с глубиной жидкости  $H$ . Такие волны называются длинными. В таких волнах в нулевом приближении по малому параметру (3.7) реализуется только продольное движение жидкости со скоростью  $v_x$ .

Получим уравнения для скорости продольного движения  $v_x = v_x(x, t)$  и глубины  $H = H(x, t)$  жидкости. С учетом (3.8) для несжимаемой жидкости  $z$  – компонента уравнения (1.5) дает

$$P = -\rho\Phi(z) + const, \quad (3.9)$$

где

$$\Phi(z) = \int F(z) dz \quad (3.10)$$

потенциал внешней силы. Константа, содержащаяся в уравнении (3.9), находится из граничного условия на свободной поверхности жидкости, которое запишем в виде

$$P(z = H) = P_0, \quad (3.11)$$

где  $P_0$  – давление на свободной поверхности жидкости.

Уравнение (3.9) с учетом граничного условия (3.11) дает

$$P = P_0 + \rho\{\Phi(H) - \Phi(z)\}. \quad (3.12)$$

Учитывая, что согласно (3.1)  $F_x = 0$ , выпишем  $x$  – составляющую уравнения (1.5)

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (3.13)$$

Подставляя в (3.13) выражение (3.12) и учитывая, что  $x$  и  $z$  – независимые переменные, а  $H = H(x, t)$  получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (3.14)$$

Вторым уравнением для определения двух неизвестных функций  $v_x(x, t)$  и  $H(x, t)$  является, аналогично уравнению (1.4), закон сохранения массы применительно к рассматриваемому случаю. Рассмотрим массу жидкости, заключенную в прямоугольном параллелепипеде с ребрами  $dx$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z > H$  (рис. 3.2), которая равна

$$M = \rho H dx \Delta y. \quad (3.15)$$

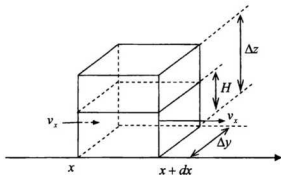


Рис. 3.2. Изменение массы жидкости в объеме параллелепипеда за счет разности потоков массы через левую и правую его грани

В полученном ниже окончательном равенстве  $dx \rightarrow 0$ . Поэтому в соотношении (3.15) не нужно уточнять, в какой конкретно точке  $x$  на интервале  $x \div x + dx$  берется значение  $H$ .



Изменение массы жидкости в объеме рассматриваемого параллелепипеда в единицу времени равно

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \rho dx \Delta y \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (3.16)$$

Но в силу несжимаемости жидкости ( $\rho = const$ ) это изменение может произойти только за счет разности потоков массы через левую и правую грани рассматриваемого параллелепипеда, которые находятся на расстоянии  $dx$  друг от друга (рис. 3.2). Приравнявая эту разность правой части равенства (3.16) получим

$$\rho v_x H \Delta y |_x - \rho v_x H \Delta y |_{x+dx} = \rho dx \Delta y \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (3.17)$$

Разделив левую и правую часть равенства на  $\rho dx \Delta y$ , получим

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{v_x H |_{x+dx} - v_x H |_x}{dx}. \quad (3.18)$$

В пределе  $dx \rightarrow 0$  равенство (3.18) дает

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial H v_x}{\partial x}. \quad (3.19)$$

Это и есть искомое уравнение, выражающее закон сохранения массы. Дополним это уравнение уравнением движения (3.14), которое запишем в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{c_H^2}{H} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (3.20)$$

где согласно (3.10) и (3.14) функция  $c_H = c_H(H)$  равна

$$c_H = \sqrt{HF(H)}. \quad (3.21)$$

Система уравнений (3.19), (3.20) с точностью до обозначений ( $H \rightarrow \rho, c_H \rightarrow c_\rho$ ) совпадает с системой уравнений (2.5), (2.6).

Учитывая наглядность колебаний поверхности жидкости  $H = H(x, t)$ , обусловленных ее продольным движением  $v_x = v_x(x, t)$ , мы далее все задачи будем решать в обозначениях системы уравнений (3.19), (3.20). Полученные при этом решения мы будем обсуждать как в терминах  $H$ , так и терминах  $\rho$ .

#### 4. Колебания поверхности жидкости с малой амплитудой

Система уравнений (3.19), (3.20) существенно упрощается, если отклонение от равновесного значения  $H_0$  и скорость  $v_x$  малы. Будем считать, что

$$H = H_0 + h, \quad (4.1)$$

где  $h$  – малое отклонение от равновесия, такое, что

$$\frac{|h|}{H_0} \ll 1. \quad (4.2)$$

При этом малой следует считать и скорость  $v_x$ , которая, как будет показано ниже, удовлетворяет неравенству

$$\frac{|v_x|}{c_H} \ll 1. \quad (4.3)$$

Опуская в уравнениях (3.19), (3.20) квадратичные слагаемые с малыми  $h$  и  $v_x$ , и учитывая, что  $H_0 = \text{const}$ , получим

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{c_{H_0}^2}{H_0} \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (4.5)$$

где функция  $c_{H_0} = c_H(H = H_0)$  дается соотношением (3.21) с  $H = H_0$ .

Для линейных уравнений типа (4.4), (4.5) существует алгоритм получения решений, основанный на том, что для таких уравнений сумма их решений также является решением. Решение уравнений (4.4), (4.5), соответствующее конкретной задаче, можно разложить в ряд (интеграл) Фурье по полной системе функций  $e^{i(kx - ct)}$ . Существенным обстоятельством при этом является то, что в силу линейности уравнений (4.4), (4.5) подстановка такого ряда (интеграла) в эти уравнения дает для каждой гармоники Фурье систему двух уравнений, не содержащих других гармоник Фурье.

Поэтому для выяснения общих свойств решения достаточно ограничиться исследованием только одного слагаемого ряда Фурье. Тогда отклонение от состояния равновесия можно представить в виде

$$h = h_k \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \quad v_x = v_k \cdot e^{i(kx - \omega t)}. \quad (4.6)$$

Приведенная комплексная запись вещественных функций  $h$  и  $v_x$  является общепринятой в линейной теории. Она не вызывает трудностей, поскольку на любом этапе вычислений, где производятся только линейные операции, всегда можно взять либо вещественную, либо мнимую часть написанного выражения.

Свойство волны описывается ее законом дисперсии  $\omega = \omega(k)$  и соотношением между  $h$  и  $v_x$ . Искомые равенства получаются путем подстановки решений (4.6) в систему (4.4), (4.5). В результате получим

$$\omega h - H_0 k v_x = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{c_{H_0}^2}{H_0} k h - \omega v_x = 0. \quad (4.8)$$

Условием совместности уравнений (4.7), (4.8) является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при  $h$  и  $v_x$ . Раскрывая указанный определитель, получаем

$$\omega^2 = c_{H_0}^2 k^2, \text{ или } \omega = \pm c_{H_0} k. \quad (4.9)$$

Подставляя закон дисперсии (4.9) в (4.7), получим соотношение между  $v_x$  и  $h$

$$v_x = \pm \frac{c_{H_0}}{H_0} h. \quad (4.10)$$

Исходя из равенств (4.6) и (4.9) оценим отношение нелинейного слагаемого  $\left| v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|$  к линейному  $\left| \frac{\partial v_x}{\partial t} \right|$  в уравнении (3.20)

$$\left| v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right| \cdot \left| \frac{\partial v_x}{\partial t} \right|^{-1} = \left| v_x \frac{k}{\omega} \right| = \frac{|v_x|}{c_{H_0}}. \quad (4.11)$$

Из оценки (4.11) следует, что рассмотренное в этом разделе линейное приближение по малому отклонению от состояния равновесия справедливо, когда выполняется неравенство (4.3).

Подставляя решение (4.9) со знаком плюс в соотношения (4.6), получим

$$h = h_k \cdot e^{i(x - c_{H_0} t)}, \quad v_x = v_k \cdot e^{i(x - c_{H_0} t)}. \quad (4.12)$$

Тогда как подстановка решения (4.9) со знаком минус в соотношения (4.6) дает

$$h = h_k \cdot e^{i(x + c_{H_0} t)}, \quad v_x = v_k \cdot e^{i(x + c_{H_0} t)}. \quad (4.13)$$

Решения (4.12) отвечают волне, бегущей со скоростью  $c_{H_0}$  в положительном направлении оси  $x$ , а (4.13) – в отрицательном. Согласно неравенству (4.3) в волне с малой амплитудой (4.2) скорость распространения возмущения  $c_{H_0}$  по частицам жидкости много больше скорости  $|v_x|$  движения самих частиц жидкости.

Простой закон дисперсии (4.9) следует из волнового уравнения, которое может быть получено исходя из системы уравнений (4.4), (4.5). Для этого продифференцируем уравнение (4.4) по  $t$ , а уравнение (4.5) – по  $x$ . Исключая из полученных таким образом уравнений вторую производную от  $v_x$  по  $t$  и  $x$ , имеем волновое уравнение для  $h$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c_{H_0}^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0. \quad (4.14)$$

Аналогичным образом получим волновое уравнение для  $v_x$ .

Общее решение уравнения (4.14) записывается в виде

$$h(x, t) = f_1(x - c_{H_0} t) + f_2(x + c_{H_0} t). \quad (4.15)$$

Явный вид функций  $f_1$  и  $f_2$  определяется исходя из начальных и граничных условий задачи.

Функция  $f_1(x - c_{H_0} t)$  описывает возмущение, бегущее со скоростью  $c_{H_0}$  в положительном направлении оси  $x$ , а функция  $f_2(x + c_{H_0} t)$  – в отрицательном. Решение (4.12) является частным случаем функции  $f_1$ , а решение (4.13) – функции  $f_2$ .

Система уравнений (2.5), (2.6) с точностью до обозначений совпадает с системой (3.19) и (3.20). Поэтому для получения решений в линейном приближении в случае безграничной изотропичной жидкости в соотношении (4.9) следует заменить  $c_{H_0}$  на  $c_{\rho_0} = c_{\rho}(\rho = \rho_0)$ , которое дается соотношением (2.3) с равновесным значением плотности  $\rho_0$ , а в уравнениях (4.10), (4.15) кроме того, следует заменить  $h$  на малое отклонение  $\rho'$ , а  $H_0$  – на  $\rho_0$ . В итоге мы получим звуковую волну в безграничной жидкости, в которой возмущения плотности и давления распространяются со скоростью  $c_{\rho_0}$ , определяемой сжимаемостью жидкости.

В неглубоком водоеме в жидкости могут распространяться длинные, так называемые, гравитационные волны, поскольку они обусловлены действием поля тяжести. Для длинных гравитационных волн, удовлетворяющих неравенству (3.7), сила  $F$  равна ускорению свободного падения  $g$ . Скорость распространения гравитационных волн согласно (3.21) равна

$$c_g = \sqrt{H_0 g}, \quad (4.16)$$

а соотношение между  $v_x$  и  $h$  дается равенством (4.10), в правой части которого следует считать  $c_{H_0}$  равным  $c_g$ .

В тонких свертхтекучих пленках гелия наряду с силой тяжести необходимо также учитывать и силу Ван-дер-Ваальса

$$F_B(z) = \frac{\alpha_B}{z^n}, \quad (4.17)$$

с которой твердая подложка действует на жидкость. Значение постоянной  $\alpha_B$  определяется материалом подложки.

На поверхности твердого тела, соприкасающейся с насыщенными парами гелия, при достаточно низких температурах образуется пленка сверхтекучего гелия с типичной толщиной порядка 100 атомных размеров, или  $H_H \approx 3 \cdot 10^{-8}$  м. Существует много способов, позволяющих менять толщину сверхтекучей пленки в широких пределах так, что толщина пленки сверхтекучего гелия может быть как много больше, так и много меньше типичного значения  $H_H$ .

Значение показателя степени  $n$  в правой части равенства (4.17) зависит от толщины пленки: для пленок с  $H_0 \leq H_H$  показатель степени  $n = 4$ , а для пленок с  $H_0 > H_H$  показатель степени  $n = 5$ . Пленки с  $H_0 \approx 5 \cdot 10^{-8}$  м, попадают в переходную область от  $n = 4$  к  $n = 5$ .

Таким образом, полная сила  $F = F(z)$ , действующая на жидкость в сверхтекучей пленке, равна

$$F = g + \frac{\alpha_B}{z^n}. \quad (4.18)$$

Сверхтекучая жидкость не обладает вязкостью и в этом смысле является идеальной жидкостью. В пленке сверхтекучей жидкости могут распространяться колебания, которые, как правило, удовлетворяют неравенству (3.7). Скорость распространения длинных продольных волн в пленках сверхтекучей жидкости согласно (3.21) и (4.18) равна

$$c_{H_0} = \sqrt{gH_0 + \alpha_B H_0^{1-n}}. \quad (4.19)$$

Для характерных значений  $\alpha_B$  при  $H_0 \leq 10^{-7}$  м силой тяжести в (4.19) можно пренебречь. В этом случае скорость распространения продольной волны определяется только силой Ван-дер-Ваальса и равна

$$c_3 = \sqrt{\alpha_B H_0^{-3}}. \quad (4.20)$$

Выражение (4.20) было впервые получено в [2]. Волны в тонких пленках, распространяющиеся со скоростью (4.20), были названы в [2] третьим звуком. Там же был получен коэффициент

поглощения третьего звука. При этом предполагалось, что основную роль в поглощении играют процессы испарения и конденсации гелия, вызванные колебанием температуры пленки в волне третьего звука.

Экспериментальное доказательство существования третьего звука в пленках сверхтекучего гелия приведено в работе [3]. Полученная там скорость третьего звука согласуется с расчетным значением (4.20). Что же касается поглощения третьего звука, то в [3] оно оказалось на два-три порядка больше, чем предсказывалось теорией в [2]. Аналогичные результаты были получены и в более поздних экспериментах [4].

Следует отметить, что в экспериментах [3] максимальное отклонение толщины пленки от равновесного значения составляло 25%. Как было показано в [5], для волн такой большой амплитуды существенными являются нелинейные эффекты, учет которых позволил в [5] получить расчетные значения поглощения, близкие к наблюдаемым в [3; 4]. Нелинейные волны конечной амплитуды и их поглощение рассматриваются в следующих двух разделах.

Для волн малой амплитуды в линейном приближении можно решить достаточно общую задачу, которая не содержит ограничения (3.7) и учитывает наряду с внешней силой  $F$  также и силу поверхностного натяжения жидкости. В этом случае, согласно [1], связь частоты  $\omega$  колебания свободной поверхности жидкости с волновым числом  $k$  дается равенством

$$\omega^2 = \left( \frac{c_{H_0}^2}{H_0} + \frac{\sigma}{\rho_0} k^2 \right) k \cdot th(kH_0), \quad (4.21)$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

В мелком водоеме, когда

$$kH_0 \ll 1, \quad (4.22)$$

соотношение (4.21) дает

$$\omega^2 = c_{H_0}^2 k^2 + \frac{\sigma}{\rho_0} k^4 H_0. \quad (4.23)$$

Поскольку длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (4.24)$$

то неравенство (4.22) эквивалентно неравенству (3.7). В этом случае при  $\sigma = 0$  выражение (4.23) совпадает с результатом (4.9).

В глубоком водоеме, когда

$$kH_0 \gg 1, \quad (4.25)$$

из выражения (4.21) следует

$$\omega^2 = \frac{c_{H_0}^2}{H_0} k + \frac{\sigma}{\rho_0} k^3. \quad (4.26)$$

В случае (4.25) малое отклонение глубины жидкости  $h$  от равновесного состояния предполагает выполнение неравенства

$$\frac{h}{\lambda} \ll 1. \quad (4.27)$$

Второе слагаемое в (4.26) описывает, так называемые, капиллярные волны, которые реализуются в пределе достаточно коротких волн  $\lambda$ , когда  $k^2 \gg \frac{\rho_0 c_{H_0}^2}{\sigma H_0}$ . В обратном

предельном случае достаточно длинных гравитационных волн в глубоком водоеме (4.25) согласно (4.16) и (4.26) получим

$$\omega^2 = gk. \quad (4.28)$$

Фазовая скорость  $v_F = \omega/k$  и групповая скорость  $v_G = d\omega/dk$  такой волны соответственно равны

$$v_F = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \text{ и } v_G = \frac{1}{2} v_F. \quad (4.29)$$

Волны с зависимостью (4.28) распространяются со скоростью (4.29) в океанах, где глубина достаточно велика, так, что выполняется неравенство (4.25). Скорость движения жидкости в такой волне экспоненциально уменьшается в глубь жидкости так, что в движении участвует только слой жидкости, толщина которого порядка длины волны  $\lambda$  (см. [1]).



## 5. Волны конечной амплитуды

В общем случае возмущения в жидкости описываются нелинейной системой уравнений (3.19), (3.20), которая с точностью до обозначений совпадает с системой (2.5), (2.6). По аналогии с (4.10) будем искать такие частные решения системы уравнений (3.19), (3.20), для которых скорость является функцией только глубины жидкости, т. е.

$$v_x = v_x(H), \quad (5.1)$$

где

$$H = H(x, t). \quad (5.2)$$

Частные решения (5.1), (5.2) носят название решений Римана, а соответствующие движения называются волнами Римана.

Исходя из предположения (5.1) систему уравнений (3.19), (3.20) можно переписать в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \left( v_x + H \frac{dv_x}{dH} \right) \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{dv_x}{dH} \frac{\partial H}{\partial t} + \left( v_x \frac{dv_x}{dH} + \frac{c_H^2}{H} \right) \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.3) согласуется с уравнением (5.4), если выполняется равенство

$$v_x + H \frac{dv_x}{dH} = \left( \frac{dv_x}{dH} \right)^{-1} \left( v_x \frac{dv_x}{dH} + \frac{c_H^2}{H} \right), \quad (5.5)$$

Из уравнения (5.5) следует, что

$$\left( \frac{dv_x}{dH} \right)^2 = \frac{c_H^2}{H^2}, \text{ или } \frac{dv_x}{dH} = \pm \frac{c_H}{H}. \quad (5.6)$$

Согласно (5.6) существует два решения (5.1), которые даются равенствами

$$v_x = \pm \int_{H_0}^H \frac{c_H(H)}{H} dH \equiv \pm v_H. \quad (5.7)$$

Для малых возмущений в подинтегральном выражении (5.7) в линейном приближении функцию  $c_H/H$  можно заменить ее равновесным значением  $c_{H_0}/H_0$ . В итоге в линейном приближении по малым возмущениям выражение (5.7) с учетом (4.1) дает равенство (4.10).

Для определения функции (5.2) воспользуемся уравнением (5.3), которое с учетом (5.6) перепишем в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^{-1} = \mp (v_H + c_H). \quad (5.8)$$

Частные производные, содержащиеся в левой части равенства (5.8), запишем с помощью определителя Якоби (якобиана) в виде

$$\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_x = \frac{\partial(H, x)}{\partial(t, x)}, \quad \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_t = \frac{\partial(H, t)}{\partial(x, t)} = - \frac{\partial(H, t)}{\partial(t, x)}. \quad (5.9)$$

С учетом (5.9) левая часть равенства (5.8) приводится к виду

$$\frac{\partial H}{\partial t} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^{-1} = - \frac{\partial(H, x)}{\partial(t, x)} \frac{\partial(t, x)}{\partial(H, t)} = - \frac{\partial(H, x)}{\partial(H, t)} = \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_H. \quad (5.10)$$

Подстановка (5.10) в (5.8) дает

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_H = \pm (c_H + v_H). \quad (5.11)$$

Левая часть равенства (5.11) предполагает, что исходя из (5.2) находится функция  $x = x(t, H)$ , от которой затем берется производная по переменной  $t$  при фиксированном значении  $H$ .

Уравнение (5.11) легко интегрируется, поскольку его правая часть зависит только от  $H$ . В итоге получим

$$x = \pm (c_H + v_H) \mp \psi_{\pm}(H), \quad (5.12)$$

где  $\psi_+$  и  $\psi_-$  – произвольные функции от глубины жидкости  $H$ , которые соответственно отвечают решениям со знаком плюс и минус. Вид этих функций определяется дополнительными условиями, которые возникают в конкретно поставленной задаче.

Рассмотрим решение (5.12) со знаком плюс, которое перепишем в виде

$$\psi_+(H) = x - u(H)t, \quad (5.13)$$

где

$$u(H) = c_H + v_H, \quad (5.14)$$

функция, которая зависит от глубины жидкости  $H$ . Согласно (5.7) эту функцию можно записать в виде

$$u(H) = c_H(H) + \int_{H_0}^H \frac{c_H(H)}{H} dH, \quad (5.15)$$

где  $c_H(H)$  дается выражением (3.21).

Исходя из уравнения (5.13) найдем  $H$ , как функцию правой части равенства (5.13). В итоге получим

$$H = \varphi_1(x - u(H)t), \quad (5.16)$$

где  $\varphi_1$  – функция, аргументом которой является правая часть уравнения (5.13). Явный вид функции  $\varphi_1$  определяется функцией  $\psi_+$ .

Из решения (5.16) следует, что скорость распространения какого-либо фиксированного значения глубины жидкости  $H_f$  в положительном направлении оси  $x$  равна  $u(H_f)$ . Согласно (5.14), (5.15) скорость  $u(H_f)$  равна сумме двух слагаемых: скорости распространения возмущения  $c_H(H_f)$  по частицам жидкости и скорости движения частиц жидкости  $v_H(H_f)$  на глубине  $H_f$ . Решение (5.16) является обобщением линейного решения  $f_1(x - c_{H_0}t)$ , которое содержится в правой части уравнения (4.15), на случай возмущения произвольной амплитуды.

Решение (5.12) со знаком минус, аналогично (5.16), можно записать в виде

$$H = \varphi_2(x + u(H)t), \quad (5.17)$$

где функция  $u(H)$  дается равенством (5.15).

Решение (5.17) отвечает возмущению, которое распространяется со скоростью  $u(H)$  в отрицательном направлении оси  $x$ . Если амплитуда возмущения мала, то скорость  $u(H)$  в нулевом приближении, согласно (5.15), равна  $c_H(H_0) = c_{H_0}$ . В этом случае решение (5.17) отвечает функции  $f_2(x + c_{H_0}t)$ , которая содержится в правой части уравнения (4.15). Найденные решения (5.16) и (5.17) часто называют простыми волнами, поскольку они являются обобщением решения (4.15) на случай возмущений произвольной амплитуды.

Для нелинейной системы уравнений (2.5), (2.6), которая с точностью до переобозначения  $\rho \rightarrow H$  совпадает с системой уравнений (3.19), (3.20) можно сразу написать решение Римана, если выполнить указанное переобозначение в формулах (5.7), (5.15), (5.16) и (5.17). В итоге получим:

$$v_x = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c_\rho(\rho)}{\rho} d\rho \equiv \pm v_\rho. \quad (5.18)$$

Для возмущения бегущего в положительном направлении оси  $x$  имеем

$$\rho = \varphi_1(x - u_\rho(\rho)t), \quad (5.19)$$

а в отрицательном

$$\rho = \varphi_2(x + u_\rho(\rho)t), \quad (5.20)$$

где

$$u_\rho(\rho) = c_\rho + v_\rho \quad (5.21)$$

или

$$u_\rho(\rho) = c_\rho(\rho) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c_\rho(\rho)}{\rho} d\rho, \quad (5.22)$$

а функция  $c_\rho(\rho)$  дается выражением (2.3). Соотношения (5.18) – (5.22) описывают распространение возмущения плотности с произвольной амплитудой в одномерном случае.

## 6. Образование разрывов в одномерных бегущих волнах

Решения (5.16) и (5.17) являются симметричными, поэтому достаточно рассмотреть только волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$ , которая описывается решением (5.16). В такой волне скорость движения  $u(H)$  разных точек профиля волны будет разной. Профилем волны называют распределение различных величин (в рассматриваемом случае глубины жидкости  $H$ ) вдоль направления распространения волны. Разные скорости  $u(H)$  для разных значений  $H$  приводят к изменению формы профиля волны со временем. Для того чтобы исследовать это изменение, найдем явный вид функции  $u(H)$  для разных случаев.

Начнем с длинных гравитационных волн, когда  $F(H) = g$ .

В этом случае равенство (3.21) дает

$$c_{Hk} = \sqrt{gH}. \quad (6.1)$$

Выполняя в (5.7) интегрирование с функцией (6.1), получим

$$v_{Hk} = 2\sqrt{g}(\sqrt{H} - \sqrt{H_0}). \quad (6.2)$$

Согласно (6.2) на горбах ( $H > H_0$ ) скорость движения частиц жидкости положительная, а во впадинах ( $H < H_0$ ) – отрицательная.

Подстановка (6.1), (6.2) в (5.14) дает

$$u_k(H) = c_{Hk} + v_{Hk} = 3\sqrt{gH} - 2\sqrt{gH_0}. \quad (6.3)$$

Согласно (6.3) скорость  $u_k(H)$  – монотонно растущая функция  $H$ . Ее производная

$$\frac{du_k(H)}{dH} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{H}} > 0 \quad (6.4)$$

положительная. В связи с этим скорость распространения  $u_k(H)$  заданного значения  $H$  тем больше, чем больше глубина жидкости  $H$ .

Согласно (6.3) при  $H < \frac{4}{9} H_0$  скорость  $u_r(H) < 0$ . Такие глубокие впадины движутся в отрицательном направлении оси  $x$ . В то время, как точки профиля с  $H > \frac{4}{9} H_0$  движутся со скоростью  $u_r(H) > 0$  в положительном направлении оси  $x$ . Такой результат связан с тем, что согласно (6.2) во впадинах ( $H < H_0$ ) скорость движения частиц  $v_{Hr} < 0$ . Это приводит к компенсации положительного слагаемого  $c_{Hr}$  в выражении (6.3). При  $H = \frac{4}{9} H_0$  скорость  $v_{Hr} = -c_{Hr}$  и согласно (6.3) для такого значения глубины жидкости  $u_r = 0$ .

На рис. 6.1а показаны профиль глубины жидкости  $H(x)$  в начальный момент времени  $t = 0$  и значения скорости  $u_r(H)$  движения различных точек профиля. Разные скорости движения точек профиля (вектора на рис. 6.1а) приводят к изменению его формы со временем: горбы выдвигаются вперед, а впадины отстают.

На рис. 6.1б показан профиль глубины жидкости  $H(x)$  в момент времени  $t_1 > 0$ . Чтобы совместить профили в различные моменты времени на рис. 6.1 по оси абсцисс отложена комбинация  $x - c_r t$ .

В конце концов в некоторый момент времени  $t_3$  профиль волны настолько выгнется, что зависимость  $H(x, t_3)$  оказывается неоднозначной: некоторым  $x$  соответствует по три различных значения  $H$ . Эту ситуацию демонстрирует рис. 6.1г, где тонкая линия отвечает области неоднозначной функции  $H(x, t_3)$ . Такую деформацию профиля волны часто называют опрокидывание волны. Термин «опрокидывание» описывает наблюдаемое на берегу моря в штормовую погоду явление опрокидывания гребня

высокой волны и образования «барашка», который скатывается вниз. После этого возникает разрыв в зависимости  $H(x, t_3)$ ,

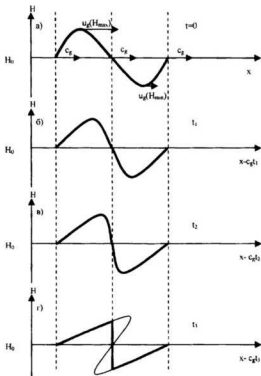


Рис. 6.1. Профиль глубины жидкости  $H$  в гравитационной волне в различные моменты времени  $0 < t_1 < t_2 < t_3$

который сопровождается скачком глубины жидкости. После образования разрыва профиль волны приобретает вид, изображенный на рис. 6.1г жирной линией. Часто такой разрыв называют ударной волной.

Используя решение (5.16), можно точно определить координату  $x^*$  и время  $t^*$  образования разрыва. Из чисто геометрических соображений (см. рис. 6.1в) ясно, что в момент образования разрыва  $t^*$  кривая зависимости  $H(x, t^*)$  должна стать вертикальной в некоторой точке  $x^*$ . Это как раз та точка, вблизи которой функция  $H(x)$  затем станет многозначной. Аналитически это означает, что производная  $(\partial H / \partial x)_{t^*, x^*}$  обращается в этой точке в бесконечность, а производная  $(\partial x / \partial H)_{t^*, x^*}$  – соответственно в нуль. Ясно также, что в момент времени  $t^*$  вблизи точки  $x^*$  кривая  $H(x)$  должна лежать по обе стороны от вертикальной касательной, в противном случае зависимость  $H(x)$  была бы многозначной уже в момент времени  $t^*$ . Отсюда следует, что точка  $x = x^*$  должна быть точкой перегиба функции  $H(x)$ . Следовательно, в нуль должна обращаться и вторая производная  $(\partial^2 x / \partial H^2)_{t^*, x^*}$ . В итоге точка  $x^*$  и момент  $t^*$  образования разрыва находятся путем совместного решения системы двух уравнений

$$\left( \frac{\partial x}{\partial H} \right)_{t^*, x^*} = 0 \text{ и } \left( \frac{\partial^2 x}{\partial H^2} \right)_{t^*, x^*} = 0. \quad (6.5)$$

Следует отметить, что в общем случае для волны произвольной амплитуды решение Римана (5.16) неприменимо после появления разрыва. Наглядная причина этого заключается в том, что при наличии поверхностей разрыва происходит отражение волны от этих поверхностей. В результате этого волна перестает быть бегущей в одном направлении. Однако для волн не очень большой амплитуды во втором приближении решение (5.16) справедливо и при наличии разрывов (см. [1]). В дальнейшем в этом разделе при исследовании эволюции разрывов будем предполагать, что решение Римана справедливо и при наличии разрыва.

Место положения разрыва на рис. 6.1г находится из правила равенства площадей, полученного в [1]. Согласно этому правилу, площади, которые ограничены линией разрыва и кривыми профиля



по обе стороны от разрыва (тонкие кривые на рис. 6.1г), должны быть равными. Правило равенства площадей имеет простой физический смысл при возникновении разрыва в гравитационной волне (рис. 6.1г). В этом случае при образовании разрыва «барашек», который возник при опрокидывании гребня высокой волны (площадь, ограниченная тонкой линией справа от разрыва на рис. 6.1г) должен полностью заполнить свободное место во впадине волны (площадь, ограниченная тонкой линией слева от разрыва на рис. 6.1г).

Гравитационные волны большой амплитуды возникают и в случае, когда равновесная глубина жидкости  $H_0 = H_0(x)$  уменьшается в направлении распространения волны. При этом по мере уменьшения глубины жидкости, содержащиеся в волне энергия и импульс, поднимают меньшее количество воды, которое находится в более тонком слое жидкости, на большую высоту. Это и приводит к увеличению амплитуды волны, которое затем сопровождается ростом крутизны фронта и возникновением разрыва (см. рис. 6.1).

Такая ситуация реализуется, когда возмущение движется из глубины океана к берегу. При этом у берега образуются волны с большой амплитудой. Такими волнами, в частности, являются волны цунами. Цунами – японское слово, перевод которого «волна в гавани». Волны цунами образуются при различных геологических катастрофах в глубинах океана. Это может быть оживший подводный вулкан, землетрясение, образование складок дна и т. д. Во всех этих случаях большая масса воды приводится в движение, которое формирует вдали от берега волну цунами.

Высота волн цунами далеко от берега, как правило, мала. Она составляет всего несколько десятков сантиметров. Так что на фоне обычных океанских волн вдали от берега волны цунами трудно заметить. В связи с этим вдали от берега цунами можно считать волной малой амплитуды, для которой выполняются неравенства (4.25) и (4.27). Однако поперечные размеры волн цунами исчисляются километрами, а длина фронта – десятками и сотнями километров. Такое возмущение жидкости обладает огромной энергией.

Вдали от берега, где глубина океана существенно больше длины волны, так что выполняется неравенство (4.25), скорость распространения волны дается выражением (4.29). Цунами, как правило, имеет большую длину волны и соответственно большую скорость распространения, которая достигает иногда 700 – 800 км/час. От места геологической катастрофы цунами движется к островам и материкам со скоростью самолета.

Совершенно незаметная в океане на глубоких местах волна цунами становится неузнаваемой, когда приближается к берегу, где глубина жидкости уменьшается и начинает выполняться неравенство (3.7). Большая энергия, содержащаяся в волне цунами, поднимает огромные массы воды на мелководье на значительную высоту вплоть до 40 м. При этом происходит описанный выше рост крутизны фронта (см. рис. 6.1) и образование разрывов (ударных волн). В итоге, гигантская ударная волна обрушивается на берег, оставляя за собой руины на месте городов и лесов. В связи с этим важным является умение обнаружить волну цунами еще в океане задолго до того, как она достигнет берега. Это возможно только при глубоком знании физики волновых движений в жидкости.

Учитывая, что решение (5.18) – (5.22) с точностью до переобозначения  $\rho \rightarrow H$  тождественны решениям (5.7), (5.14) – (5.17), рассмотрим распространение одномерного возмущения плотности в безграничной жидкости. Запишем производную по  $\rho$  от функции (5.21) в виде

$$\frac{du_\rho(\rho)}{d\rho} = \frac{dc_\rho}{d\rho} + \frac{c_\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho c_\rho}{d\rho}. \quad (6.6)$$

Из общих термодинамических соображений можно показать (см. [1]), что  $\rho c_\rho$  является монотонно растущей функцией при увеличении  $\rho$  и соответственно производная от функции  $\rho c_\rho$  по аргументу  $\rho$  является положительной. В итоге из выражения (6.6) следует, что

$$\frac{du_\rho(\rho)}{d\rho} > 0. \quad (6.7)$$

Неравенство (6.7) аналогично неравенству (6.4), поэтому все изложенное выше применимо и для случая деформации профиля волны плотности. Такую деформацию иллюстрирует рис. 6.1, на котором следует заменить  $H$  на  $\rho$ , а  $c_k$  – на  $c_{\rho_0}$ . Исключением являются только утверждения, которые базировались на явной зависимости (6.3) функции  $u_k$  от  $H$ . Согласно (5.22) и (2.3) зависимость  $u_\rho(\rho)$  полностью определяется уравнением состояния жидкости (2.1).

На рис. 6.2 показана деформация возмущения плотности  $\rho$  и соответственно давления  $p$ . Такое возмущение образуется, в частности, при взрыве. При этом в обе стороны от взрыва будут симметрично распространяться возмущения плотности (давления). На рис. 6.2 показана деформация профиля возмущения, который распространяется в положительном направлении оси  $x$ . Исходя из симметрии задачи и выражений (5.19) и (5.20) при взрыве точно такое же возмущение будет распространяться и в отрицательном направлении оси  $x$ . Разрыв, который демонстрирует скачок плотности (давления) на рис. 6.2г, проводится исходя из правила равенства площадей, которое упоминалось выше. Возникающая при взрыве ударная волна (разрыв), подобно волне цунами, разрушает все на своем пути.

Перейдем к рассмотрению распространения возмущений в пленках сверхтекучего гелия, когда определяющей является сила Ван-дер-Ваальса, которую запишем в виде

$$F_H = \frac{\alpha_H}{H^4}. \quad (6.8)$$

Выражения (6.8) и (3.21) дают

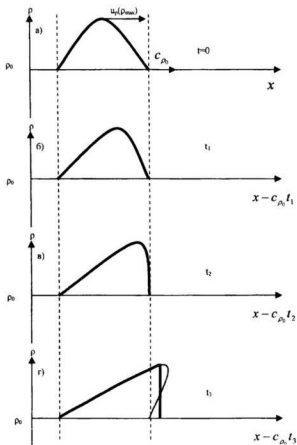


Рис. 6.2. Профиль плотности жидкости  $\rho$  в различные моменты времени  $0 < t_1 < t_2 < t_3$

$$c_{HB} = \sqrt{\frac{\alpha_B}{H^3}}. \quad (6.9)$$

Подставляя (6.9) в (5.7) и выполняя интегрирование, получим

$$v_{HB} = \frac{2}{3} \sqrt{\alpha_B} \left( \frac{1}{\sqrt{H_0^3}} - \frac{1}{\sqrt{H^3}} \right). \quad (6.10)$$

Согласно (6.10) с увеличением  $H$  скорость движения частиц жидкости  $v_{HB}(H)$  увеличивается. На горбах скорость ( $H > H_0$ ) положительная, а во впадинах ( $H < H_0$ ) – отрицательная. Описанная зависимость аналогична зависимости (6.2) для скорости движения  $v_{HK}(H)$  частиц жидкости в гравитационной волне.

Подстановка (6.9), (6.10) в выражение (5.14) дает

$$u_B(H) = c_{HB} + v_{HB} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\alpha_B}{H_0^3}} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\alpha_B}{H^3}}. \quad (6.11)$$

В отличие от (6.3), скорость  $u_B(H)$  является монотонно убывающей функцией  $H$  и ее производная

$$\frac{du_B}{dH} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha_B}{H^5}} < 0 \quad (6.12)$$

– отрицательная. В связи с этим, скорость распространения  $u_B(H)$  заданного значения  $H$  тем больше, чем меньше глубина жидкости  $H$ . В отличие от (6.3) функция (6.11) не обращается в нуль и соответственно не меняет знак ни при каком значении  $H$ .

На рис. 6.3а показаны профиль глубины жидкости в начальный момент времени  $t = 0$  и значения скорости  $u_B(H)$  движения различных точек профиля. Разные скорости движения точек профиля, которые обозначены векторами на рис. 6.3а, приводят к изменению формы профиля со временем. При этом в отличие от рис. 6.1 горбы движутся медленнее впадин. На рис. 6.3 б, в, г показана деформация профиля глубины жидкости  $H(x, t)$  в различные моменты

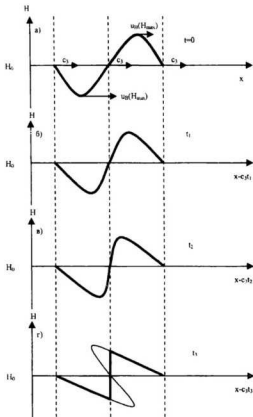


Рис. 6.3. Профиль толщины пленки  $H$  в волне третьего звука в моменты времени  $0 < t_1 < t_2 < t_3$

времени  $0 < t_1 < t_2 < t_3$ . Для того, чтобы сопоставить профили в различные моменты времени на рис. 6.3 по оси абсцисс отложена переменная  $x - c_3 t$ . На рис. 6.3г, в отличие от рис. 6.1г, разрыв (ударная волна) образуется на заднем фронте волны.

Возникновение разрывов приводит к сильному затуханию волны. Наличие такого затухания видно непосредственно на рис. 6.1г и 6.3г. При возникновении разрыва отсекается наиболее высокая часть профиля волны. С течением времени, по мере продолжающегося выгибания профиля, его высота все более уменьшается (см. рис. 6.4). Происходит сглаживание профиля с уменьшением его амплитуды, что и приводит к затуханию волны при ее распространении вдоль оси  $x$  (см. рис. 6.4).

Описанный выше механизм затухания позволил в [5]

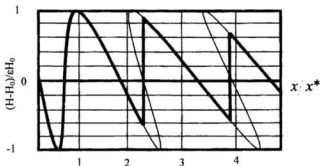


Рис. 6.4. График функции (6.14) с разрывами, который описывает профиль волны третьего звука

объяснить наблюдаемое в экспериментах [3; 4] сильное затухание волн третьего звука. В [5] рассматривалась ситуация, близкая к экспериментальной [3; 4]. Исходя из того, что в точке  $x = 0$  находился генератор синусоидальных волн третьего звука с частотой  $\omega$  изменение толщины пленки  $H$  в начале координат задавалось в [5] выражением

$$H = H_0(1 + \varepsilon \sin \omega t) \text{ при } x = 0. \quad (6.13)$$

Решение Римана (5.16) с граничным условием (6.13) записывалось в виде

$$H = H_0 \left( 1 + \varepsilon \sin \left\{ \omega \left( t - \frac{x}{u_B(H)} \right) \right\} \right). \quad (6.14)$$

С учетом зависимости (6.14) и уравнений (6.5) находились значения  $x^*$  и  $t^*$ . Далее строился график функции (6.14) и проводились разрывы, исходя из правила равенства площадей (см. рис. 6.4 из [5]). В рассматриваемом случае разрывы проходят через точку в перехлесте профиля, соответствующую равновесной толщине пленки  $H = H_0$  (см. рис. 6.4). График, приведенный на рис. 6.4, позволил найти уменьшение амплитуды волны третьего звука с расстоянием и сопоставить его с экспериментальными данными. При этом расчетные значения в [5] оказались близкими к экспериментальным в [3; 4].

Рассмотрим еще одну причину, которая приводит к изменению амплитуды волны третьего звука. В условиях эксперимента, когда волны третьего звука распространяются вдоль пленки, которая образовалась на вертикальной или наклонной стенке, равновесная толщина пленки является функцией расстояния от свободной поверхности гелия в гелиевой ванне.

Как было показано выше, при распространении гравитационных волн на поверхности обычной жидкости с переменной глубиной их амплитуда возрастает с уменьшением глубины жидкости. Отличие данной ситуации от случая гравитационных волн состоит в зависимости возвращающей силы (6.8) от глубины жидкости. Из решения, полученного в [5], следует, что скорость третьего звука возрастает с уменьшением толщины пленки, а амплитуда при этом, в отличие от гравитационных волн, уменьшается. Такой результат связан с тем, что возвращающая сила (6.8) значительно увеличивается при уменьшении толщины пленки.



## 7. Солитоны: эксперимент и теория

В августе 1834 г. вблизи Эдинбурга в Шотландии талантливый ученый и инженер Джон Скотт Рассел (1808 – 1882) наблюдал удивительное явление, которое впоследствии в 1844 г. описал в «Докладе о волнах»: «Я следил за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась; но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась. Вместо этого она собралась около носа судна в состоянии бешеного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, т. е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, нисколько не меняя своей формы и не снижая скорости. Я последовал за ним верхом, и когда я нагнал его, он по-прежнему катился вперед со скоростью приблизительно 8 или 9 миль в час (английская или морская миля – 1852 м), сохранив свой первоначальный профиль возвышения длиной около 30 футов и высотой от фута до фута с половиной (фут – 30,5 см).

Для подробного изучения этого явления с целью точно установить его природу и управляющие им законы я придумал другие, более удобные способы его вызывать... и применил разнообразные методы наблюдений».

Рассел посвятил многие годы жизни исследованию этого поразившего его воображение явления, которое он называл волнами трансляции (переноса) или большой уединенной волной (great solitary wave).

Работами Рассела в Англии заинтересовались Эри и один из основателей гидродинамики Стокс. Они придирчиво изучили «Доклад о волнах» Рассела и подвергли его критике исходя из того, что согласно известным им экспериментам и теории длинные волны в каналах не могут сохранять постоянную форму.

Еще при жизни Рассела молодые ученые Жозеф Валентин де Буссинеск в 1871 г. (1842 – 1929) и его сверстник лорд Рэлей в 1876 г., учившийся, между прочим, у Стокса, сумели найти приближенное математическое описание формы и скорости уединенной волны на мелкой воде. Позже появились еще две-три

математические работы об уединенной волне, а также были повторены и подтверждены опыты Рассела. Казалось, все стало ясно. Тем не менее споры о существовании уединенной волны в узком кругу специалистов не прекращались – слишком велик был авторитет Эри и Стокса.

Наибольшую ясность в эту проблему внесли голландские ученые Дидерик Иоханнес Кортевег (1848 – 1941) и его ученик Густав де Фриз, которые в 1895 г. нашли уравнение наиболее точно описывающее уединенные волны. Мы получим в этом разделе уравнение Кортевега - де Фриза (КдФ – уравнение), которому суждено было сыграть большую роль во втором рождении уединенных волн в наше время. Для физиков оно важно тем, что с его помощью можно описывать не только волны на мелкой воде, но и многие другие явления. Для математиков оно послужило стартовой площадкой при построении глубокой и важной математической теории решения нелинейных уравнений.

В 1958 г. советский физик Р. З. Сагдеев подметил аналогию между некоторыми волнами в плазме и волнами на мелкой воде и показал, что в плазме также могут распространяться уединенные волны. Плазмой в это время уже занимались многие физики и это наблюдение не осталось незамеченным. Вскоре удалось показать, что эти волны в плазме также можно описывать с помощью КдФ – уравнения. Это решило судьбу КдФ – уравнения, которое было извлечено из забвения и стало известно широкому кругу физиков и математиков.

Особенно знаменитым стало КдФ – уравнение после того, как в 1965 г. американские ученые М. Крускал и Н. Забуски, изучая явления столкновений уединенных волн с помощью ЭВМ, ясно увидели, что уединенные волны во многом подобны частицам. В связи с этим они убрали слово «волна», а из «уединенной» (solitary) составили термин «солитон» (soliton), созвучный электрону, протону и другим названиям элементарных частиц. В дальнейшем мы также будем использовать устоявшийся в настоящее время термин «солитон».

В 1967 г. американским ученым Гарднеру, Грину, Крускалу и Миуре удалось найти самое общее решение КдФ – уравнения. От их работы обычно отсчитывают начало бурного развития науки о солитонах. В настоящее время о солитонах написано очень много

книг. Науку о солитонах пытаются использовать для описания строения элементарных частиц, распространения импульсов по нервным волокнам живых существ и объяснения явлений, наблюдаемых в космосе.

В конце 1984 г. японский физик, сотрудник лаборатории Белла в США Акира Хасегава опубликовал подробные численные расчеты распространения солитонов в оптических волокнах и показал, что оптические солитоны могут пробегать тысячи километров без серьезного искажения их формы. Весной 1988 г. этот вывод был полностью подтвержден на опыте сотрудниками лаборатории Белла, которым удалось четко детектировать солитоны, пробежавшие более 4000 км. В связи с этим возникла идея создания солитонного телеграфа.

В океане рождаются и путешествуют самые разные солитоны. Цунами, о котором писалось в предыдущем разделе, очень часто имеет солитонное происхождение. Высота солитона в океане обычно невелика, не более 10 м, и такую плавную волну трудно даже заметить, поскольку длина такого солитона, образовавшегося при землетрясении океанского дна, может достигать 500 км. При этом, даже для солитона длиной 10 км, океан, зачастую, можно считать мелким. В этом случае скорость солитона может быть вычислена по формуле (4.16). При  $H_0 = 1$  км получаем  $c_g = 400$  км/час.

При подходе к берегу солитон становится короче и выше, достигая высоты до 40 м в мелкой гавани. Причины и последствия этого излагались в предыдущем разделе.

Прежде всего, нужно понять физические причины, которые позволяют существовать солитону. В связи с этим, рассмотрим возмущение, распространяющееся в положительном направлении оси  $x$ . Эволюция такого возмущения, согласно (5.8), описывается уравнением

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u(H) \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (7.1)$$

где функция  $u(H)$  дается выражением (5.14).

Как было показано в разделах 5 и 6, нелинейность, обусловленная зависимостью  $u$  от  $H$  приводит к увеличению

крутизны фронта, которое затем сопровождается опрокидыванием возмущения (см. рис. 6.1). Существование солитона, очевидно, связано с тем, что есть явление, которое компенсирует действие нелинейности. Таким явлением является дисперсия, приводящая к расплыванию волнового пакета.

Явление дисперсии проще всего понять в линейной теории. В этом случае уравнение (7.1), с учетом неравенства (4.2), в линейном приближении записывается в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c_{H_0} \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (7.2)$$

Возмущение жидкости, которое занимает ограниченную область пространства, можно представить в виде суммы плоских монохроматических волн (4.6) с разными значениями  $k$ . Такой волновой пакет будет распространяться в пространстве, не меняя своей формы, если фазовая скорость

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad (7.3)$$

не зависит от  $k$ .

Зависимость фазовой скорости (7.3) от  $k$ , т. е. длины волны  $\lambda = 2\pi/k$ , называется дисперсией волны (от латинского слова *dispersio* – рассеяние). В случае дисперсии разные монохроматические волны, образующие волновой пакет, будут распространяться с разными скоростями. В результате волновой пакет будет с течением времени расплываться при движении в пространстве. Отсутствие дисперсии в возмущении, которое описывает уравнение (7.2), обусловлено нулевым приближением по малому параметру (3.7). В этом случае, согласно (4.9), фазовая скорость (7.3) равна групповой скорости  $v_g = d\omega/dk$ . В общем же случае при произвольных соотношениях между длиной волны  $\lambda$  и глубиной жидкости  $H$ , согласно (4.21), дисперсия существует.

В силу того, что уравнения (2.5), (2.6) с точностью до обозначений тождественны уравнениям (3.19), (3.20), малые колебания плотности  $\rho'$  в безграничной жидкости будут описываться уравнением (7.2), в котором следует заменить  $h$  на  $\rho'$ , а  $c_{H_0}$  на  $c_{\rho_0} = c_{\rho}(\rho = \rho_0)$ . Отметим, что и в этом случае

отсутствие дисперсии связано с приближением, которое допускает использование выражения (2.1) и следующей из него формулы (2.3).

Соотношение (2.1), строго говоря, справедливо только в случае полного равновесия жидкости во всем пространстве. При движении жидкости реализуется только локальное равновесие на характерных расстояниях порядка  $\lambda$ . При локальном равновесии уравнение (2.1) справедливо только в нулевом приближении по малому параметру

$$L_{corr}/\lambda \ll 1, \quad (7.4)$$

где  $L_{corr}$  – длина корреляции в жидкости, на которой изменение плотности в одной точке жидкости сказывается на давлении в другой точке жидкости. Отметим, что неравенство (7.4) аналогично неравенству (3.7). В общем случае вместо уравнения (2.1) следует использовать нелокальную интегральную связь между давлением  $p$  и плотностью  $\rho$ , которая приводит к дисперсии волны. Этот вопрос достаточно подробно рассмотрен в [6].

При попытке объяснения физических причин существования солитона разумным является предположение, что возможна ситуация, когда действие нелинейности, которое приводит к увеличению крутизны фронта (укручение фронта), будет сбалансировано дисперсией (размыванием фронта). В этом случае возмущение будет распространяться по среде, не деформируясь. Для проверки такой гипотезы следует получить уравнение, которое учитывает как нелинейность, так и дисперсию. Если полученное таким образом уравнение будет иметь солитонное решение, то гипотезу можно считать правильной. Указанное уравнение нетрудно получить, если считать дисперсию и нелинейность малыми.

Начнем с учета малой дисперсии, не конкретизируя систему. Для этого подправим линейное уравнение (7.2) так, чтобы оно учитывало дисперсию. Очевидно, что дисперсия возникнет, если в уравнении (7.2) появится слагаемое, содержащее производную по  $x$  более высокого порядка. Следующей после производной первого порядка, содержащейся в (7.2), будет производная по  $x$  второго порядка. Однако подстановка в такое уравнение решения

(4.6) даст комплексное выражение для частоты  $\omega$  при вещественном значении  $k$ . Мнимая часть частоты  $\omega$  приведет к экспоненциальному затуханию волны со временем, которое отсутствует в рассматриваемом приближении бездиссипативной жидкости. Дисперсия возникнет, если в уравнение (7.2) дописать слагаемое, содержащее третью производную по  $x$ . В итоге получим

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c_{H_0} \frac{\partial h}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0, \quad (7.5)$$

где параметр  $\beta$  – определяется свойствами конкретной системы.

Подстановка решения (4.6) в линейное уравнение (7.5) дает следующее выражение для фазовой скорости (7.3)

$$v_F = c_{H_0} - \beta k^2. \quad (7.6)$$

Выражение (7.6) фактически содержит нулевой и первый члены разложения функции  $v_F(k)$  по малому  $k$ .

Уравнение с малой нелинейностью получим исходя из выражения (7.1), в котором функцию  $u(H) = u(H_0 + h)$  разложим в ряд по малому  $h$  вплоть до линейного члена. В итоге выражение (7.1) в квадратичном приближении по малому  $h$  дает

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c_{H_0} \frac{\partial h}{\partial x} + \gamma h \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (7.7)$$

где

$$\gamma = \left( \frac{\partial u}{\partial H} \right) \Big|_{H=H_0}. \quad (7.8)$$

Исходя из уравнений (7.5) и (7.7), получим уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c_{H_0} \frac{\partial h}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \gamma h \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (7.9)$$

которое учитывает как нелинейность, так и дисперсию. Четвертое нелинейное слагаемое в уравнении (7.9) будет приводить к росту крутизны фронта возмущения, который будет балансироваться размыванием фронта, обусловленным дисперсионным третьим слагаемым в уравнении (7.9). Значения коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$  определяются конкретными свойствами среды, но общий вид

уравнения (7.9) универсален для сред, обладающих малой дисперсией и малой нелинейностью.

В разделе 9 мы получим явные выражения для коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$  для случая жидкости в поле тяжести. При этом  $\beta$  и  $\gamma$  оказываются положительными величинами. Для определенности в этом и следующем разделе 8 мы будем предполагать, что  $\beta > 0$  и  $\gamma > 0$ . Это наиболее часто встречающийся случай. Между тем, как будет показано в разделе 9, возможна также ситуация, когда  $\beta < 0$  и  $\gamma < 0$ . Можно показать, что солитонные решения уравнения (7.9) с противоположными знаками перед третьим дисперсионным и четвертым нелинейным членами неустойчивы относительно ишиба солитона вдоль оси  $y$ .

Во избежание недоразумений заметим, что уравнение (7.9) охватывает наиболее общий случай, когда нет специальных причин для особых зависимостей дисперсионного и нелинейного членов. Можно, однако, представить себе случай, когда в силу каких-то обстоятельств функция  $u(H_0 + h)$  содержит только четные члены разложения по малому  $h$ . Тогда вместо четвертого нелинейного слагаемого в (7.9) появится нелинейный член вида  $\gamma h^2 \partial h / \partial x$ . Мы здесь ограничимся рассмотрением только наиболее распространенной ситуации, которая описывается уравнением (7.9) с  $\beta > 0$  и  $\gamma > 0$ .

Для того, чтобы уменьшить число параметров в уравнении (7.9), введем новую искомую функцию

$$q = \gamma h, \quad (7.10)$$

которая, согласно (7.9), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c_{H_0} \frac{\partial q}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + q \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (7.11)$$

Уравнение (7.11) можно упростить, если ввести вместо  $x$  новую переменную

$$x' = x - c_{H_0} t, \quad (7.12)$$

которая является декартовой координатой  $x'$  в системе отсчета  $K'$ , движущейся со скоростью  $c_{H_0}$  относительно лабораторной системы отсчета  $K_0$  с декартовой координатой  $x$ .

Учитывая, что

$$\left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_{x'} = \left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_x + c_{H_0} \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_x, \quad (7.13)$$

уравнение (7.11) в переменных  $x'$ ,  $t$  запишем в виде

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 q}{\partial x'^3} + q \frac{\partial q}{\partial x'} = 0. \quad (7.14)$$

Уравнение (7.14) является известным уравнением Кортевега–де Фриза (КдФ).

В следующем 8-м разделе мы получим односолитонное решение уравнения (7.14). Здесь только отметим, что уравнение КдФ (7.14) является далеко не единственным уравнением, которое имеет солитонные решения. Солитонные решения имеют также нелинейное уравнение Шредингера и уравнение синус – Гордона. Эти уравнения, наряду с уравнением КдФ, являются модельными нелинейными уравнениями, которые обладают свойствами универсальности, т. е. встречаются в задачах самой разной физической природы.

Указанные выше уравнения обладают замечательными математическими свойствами, которые послужили основанием появления новой чисто математической области исследований. В этих уравнениях имеется скрытая алгебраическая симметрия, позволяющая точно вычислить бесконечные серии их частных решений с помощью, так называемого, метода обратной задачи рассеяния. Данный метод основан на теории прямой и обратной задачи рассеяния для некоторых обыкновенных дифференциальных операторов типа Штурма – Лиувилля. Изложение этого математического метода вместе со всеми необходимыми сведениями из теории рассеяния, римановых поверхностей, гамильтоновых систем и т. д. является отдельным серьезным теоретическим курсом, который выходит за рамки этого пособия. Здесь мы ограничимся только рассмотрением простейших



решений уравнения (7.14), которые получим в следующем 8-м разделе.

## 8. Простейшие решения уравнения Кортевега - де Фриза

Для получения простейших решений уравнения КдФ (7.14) рассмотрим случай, когда  $q$  зависит от  $x'$  и  $t$  в комбинации

$$\tau = x' - s_c t, \quad (8.1)$$

отвечающей бегущей волне. Здесь  $s_c$  – константа решения. При этом уравнение (7.14) становится обыкновенным дифференциальным уравнением с переменной  $\tau$  для функции

$$q = q(\tau). \quad (8.2)$$

Подставляя в (8.1) выражение (7.12), получим

$$\tau = x - (c_{H_0} + s_c) t. \quad (8.3)$$

Из равенства (8.3) следует, что  $\tau$  является декартовой координатой в системе отсчета  $K_\tau$ , которая движется относительно лабораторной  $K_L$  со скоростью  $c_{H_0} + s_c$ . В связи с этим функция (8.2) описывает стационарное возмущение жидкости в системе отсчета  $K_\tau$ , которое движется со скоростью  $c_{H_0} + s_c$  относительно лабораторной системы отсчета  $K_L$ .

С учетом зависимости (8.2) и равенства (8.1) уравнение (7.14) записывается в виде

$$-s_c \frac{dq}{d\tau} + \beta \frac{d^3 q}{d\tau^3} + \frac{1}{2} \frac{dq^2}{d\tau} = 0. \quad (8.4)$$

Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение (8.4) один раз интегрируется. Полагая константу интегрирования равной нулю, получим

$$\beta \frac{d^2 q}{d\tau^2} = -\frac{dU_q}{dq}, \quad (8.5)$$

где

$$U_q = \frac{q^3}{6} - \frac{s_c}{2} q^2. \quad (8.6)$$

Согласно уравнению (8.5) нелинейные возмущения в жидкости с дисперсией являются механической системой с одной степенью свободы  $q(\tau)$ . Функция Лагранжа такой механической системы с «массой»  $\beta > 0$

$$L = \frac{\beta \dot{q}^2}{2} - U_q(q), \quad (8.7)$$

где  $\dot{q} = dq/d\tau$  – обобщенная скорость. Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (8.8)$$

с функцией Лагранжа (8.7) совпадает с уравнением (8.5).

Поскольку  $L$  не зависит явно от аргумента  $\tau$ , то такая механическая система имеет интеграл движения

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = \frac{\beta \dot{q}^2}{2} + U_q(q), \quad (8.9)$$

который называется энергией. Интеграл движения (8.9) содержит только первую производную, а не вторую, как это было в исходном уравнении (8.5). Это обстоятельство существенно упрощает задачу и позволяет легко получить ответ в квадратурах.

Из равенства (8.9) имеем

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{\beta} (E - U_q)}. \quad (8.10)$$

Интегрируя уравнение (8.10) путем разделения переменных, получим

$$\tau = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{E - U_q(q)}} + \tau_A. \quad (8.11)$$

Двумя произвольными постоянными решения (8.11) являются энергия  $E$  и постоянная интегрирования  $\tau_A$ . В (8.10) и (8.11) знак плюс или минус перед корнем выбирается исходя из зависимости  $q(\tau)$ .

Прежде, чем вычислять интеграл (8.11) с функцией (8.6), пойдем при каких значениях  $E$  решение (8.11) отвечает солитону. Для этого исследуем функцию (8.6). Находим нули, минимумы и максимумы функции  $U_q(q)$  стандартным способом и строим зависимость  $U_q = U_q(q)$ . График функции  $U_q(q)$  представлен на рис. 8.1.

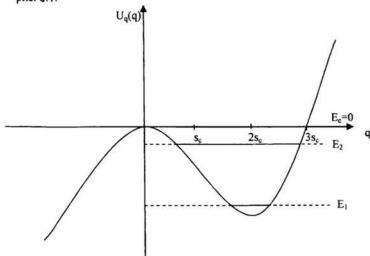
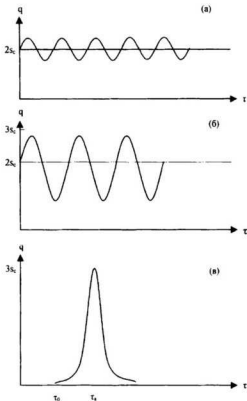


Рис. 8.1. График функции (8.6)

При значении энергии  $E = E_1$ , близком к минимальному значению функции  $U_q(q = 2s_c)$ , система совершает малые колебания вблизи точки устойчивого равновесия  $q = 2s_c$ . Это значит, что при малых амплитудах колебаний решением уравнения (8.5) является гармоническая волна (рис. 8.2а).

При значениях энергии  $E_2$  удовлетворяющих неравенству  $E_1 < E_2 < 0$  (см. рис. 8.1), когда амплитуда колебаний становится относительно большой, соответствующая стационарная волна



**Рис. 8.2.** Форма стационарных возмущений в системе координат  $K_r$  для энергий  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_c = 0$  (см. Рис. 8.1):

- (а) гармонические волны, отвечающие энергии  $E_1$ ;
- (б) кноидальные периодические волны, отвечающие энергии  $E_2$ ;
- (в) уединенная волна (солитон), отвечающая энергии  $E_c = 0$ .

уравнения (8.5) будет, по-прежнему, периодической, но за счет нелинейности будет отличаться от гармонической. Это, так

называемые, кноидальные волны, которые выражаются через эллиптические функции (рис. 8.2б).

Рассмотрим зависимость  $q(\tau)$  при  $E = E_c = 0$ . Пусть при начальном значении  $\tau_0$  система находилась справа вблизи максимума функции  $U_q(q)$  (см. рис. 8.1) так, что  $0 < q(\tau_0) \ll s_c$  при  $\dot{q}(\tau_0) > 0$ . Тогда функция  $q(\tau > \tau_0)$  будет монотонно растущей вплоть до значения  $q(\tau_s) = 3s_c$  (см. рис. 8.2в), при котором  $\dot{q}(\tau_s) = 0$ . При  $\tau > \tau_s$  функция  $q(\tau)$  будет монотонно убывающей вплоть до значения  $q \rightarrow 0$  (см. рис. 8.2в).

Исходя из выражения (8.11) нетрудно найти, как система будет приближаться к значению  $q = 0$ . Для этого подставим в (8.11) разложение функции  $U_q(q)$  вблизи нуля и учтем, что  $E = E_c = 0$ . В результате получим

$$\tau = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \int \frac{dq}{-\sqrt{s_c q^2 / 2}} + \tau_A. \quad (8.12)$$

В соотношении (8.12) перед корнем взят знак минус, поскольку при приближении к  $q = 0$  обобщенная скорость  $\dot{q} < 0$ . Выполняя интегрирование в соотношении (8.12), получим

$$q = \text{const} \cdot e^{-\sqrt{\frac{s_c}{\beta}} \tau}. \quad (8.13)$$

Согласно (8.13) система асимптотически бесконечно долго приближается к точке  $q = 0$ . Стационарное решение в этом случае имеет вид уединенной волны, т. е. солитона (см. рис. 8.2в). Солитонное решение  $q(\tau)$  симметрично относительно значения  $\tau_s$ , поскольку уравнение (8.5) не меняется при замене  $\tau$  на  $-\tau$ .

Энергии  $E > 0$  соответствуют инфинитные движения системы, которые в нашем случае не имеют физического смысла.

Аналитическое односолитонное решение уравнения КдФ следует из соотношения (8.11) с  $E_c = 0$ . Это решение для отклонения глубины жидкости от равновесного значения, с учетом (7.10) и (8.3), записывается в виде

$$h = h_a c h^{-2} \left( \frac{x - (c_{H_0} + s_c)t - \tau_A}{\Delta} \right), \quad (8.14)$$

где

$$h_a = \frac{3s_c}{\gamma} \text{ и } \Delta = 2\sqrt{\frac{\beta}{s_c}} \quad (8.15)$$

соответственно высота и ширина солитона.

Согласно (8.14) солитонное возмущение движется относительно лабораторной системы координат  $K_d$  со скоростью  $c_{H_0} + s_c$ . При заданных значениях  $\beta$  и  $\gamma$ , которые мы считаем положительными, солитон полностью определяется одним из своих параметров, в качестве которого можно взять  $s_c$ . Чем больше скорость  $s_c$ , тем, согласно (8.15), солитон выше и уже.

Оценим третье дисперсионное и четвертое нелинейное слагаемые в уравнении (7.9) для возмущения с высотой  $h_a$  и шириной  $\Delta$ .

$$Q_d = \left| \beta \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right| \approx \beta \frac{h_a}{\Delta^3}. \quad (8.16)$$

$$Q_n = \left| \gamma h \frac{\partial h}{\partial x} \right| \approx \gamma h_a \frac{h_a}{\Delta}. \quad (8.17)$$

Для отношения вкладов нелинейности к дисперсии, согласно (8.16) и (8.17), имеем

$$\frac{Q_n}{Q_d} = \frac{\gamma}{\beta} h_a \Delta^2. \quad (8.18)$$

В случае солитона, когда нелинейность сбалансирована дисперсией, согласно (8.15), отношение (8.18) равно 12.

В связи с этим в качестве параметра, определяющего отношение вкладов нелинейности к дисперсии в возмущении жидкости, удобно взять

$$\xi = \frac{\gamma h_a \Delta^2}{12\beta}. \quad (8.19)$$

Для солитона, когда вклад нелинейности сбалансирован дисперсией,  $\xi = 1$ . При  $\xi < 1$  преобладает дисперсия. В силу этого возмущение расплывается, а параметр  $\xi$  возрастает, приближаясь к единице. В результате из слабо нелинейного возмущения может сформироваться солитон.

При  $\xi > 1$  преобладает нелинейность. В результате возмущение будет искажаться (см. рис. 8.3а, б), что приведет к

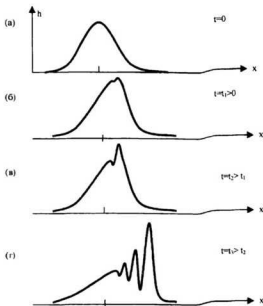


Рис. 8.3. Эволюция возмущения, в котором преобладает нелинейность

увеличению крутизны переднего фронта и обогащению спектра возмущения высшими гармониками. Когда фронт возмущения станет настолько крутым, что дисперсионное третье слагаемое в уравнении (7.9) будет сравнимо по величине с нелинейным четвертым слагаемым, начнут действовать дисперсионные

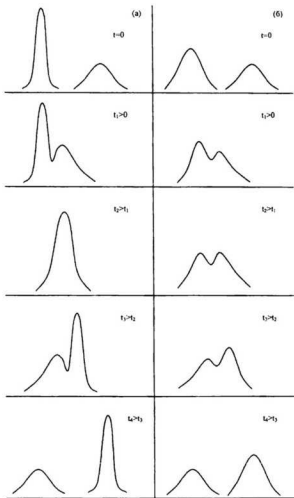
эффекты. На гребне возмущения появится осцилляция (см. рис. 8.3в), развитие которой приведет к образованию солитона. Поскольку солитон движется со скоростью большей скорости  $c_{H_0}$ , он отходит от фронта вперед. Затем формируется второй солитон и т. д. (см. рис. 8.3г) пока возмущение полностью не распадется на совокупность солитонов и слабонелинейный волновой пакет. Число возникающих при этом солитонов пропорционально  $\sqrt{\mathcal{E}}$ . Многосолитонные решения можно получить методом обратной задачи рассеяния.

При достаточно больших амплитудах возмущения дисперсия уже не в состоянии конкурировать с нелинейностью, что приводит к опрокидыванию возмущения и образованию разрыва. Это явление рассматривалось в разделе 6.

Интересные результаты получаются при решении задачи о взаимодействии двух солитонов. Пусть в среде распространяются два солитона с различными амплитудами. Если первый солитон с большей амплитудой в начальный момент времени расположен позади второго солитона с меньшей амплитудой, то первый солитон, скорость которого больше, чем у второго (см. (8.15)), догонит второй солитон и начнется их взаимодействие (см. рис. 8.4а). При перекрытии образуется возмущение с одним максимумом, которое не является линейной суммой взаимодействующих солитонов. Это возмущение затем распадется на два солитона, которые в точности совпадают с исходными. Таким образом, несмотря на нелинейность процесса происходит независимое прохождение одного солитона через другой. Следует отметить, что такое взаимодействие реализуется только при значительной разнице в амплитудах солитонов.

Если амплитуды взаимодействующих солитонов близки по величине, то их полного перекрытия не происходит. Солитоны сближаются так, что связанное состояние имеет два выраженных максимума (см. рис. 8.4б). Затем в течение некоторого времени относительное расположение максимумов не изменяется. При этом изменяется их величина так, что меньший максимум вырастает до большего, а больший достигает величины меньшего. После этого солитоны расходятся и оказываются такими же, какими они были до взаимодействия.





**Рис. 8.4.** Процесс взаимодействия двух солитонов с сильно различающимися (а) и близкими по величине (б) амплитудами

$$h = h_0 c h^{-2} \left( \frac{x - (c_{H_0} + s_c)t - \tau_A}{\Delta} \right), \quad (8.14)$$

где

$$h_0 = \frac{3s_c}{\gamma} \quad \text{и} \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{\beta}{s_c}} \quad (8.15)$$

соответственно высота и ширина солитона.

Согласно (8.14) солитонное возмущение движется относительно лабораторной системы координат  $K_{II}$  со скоростью  $c_{H_0} + s_c$ . При заданных значениях  $\beta$  и  $\gamma$ , которые мы считаем положительными, солитон полностью определяется одним из своих параметров, в качестве которого можно взять  $s_c$ . Чем больше скорость  $s_c$ , тем, согласно (8.15), солитон выше и уже.

Оценим третье дисперсионное и четвертое нелинейное слагаемые в уравнении (7.9) для возмущения с высотой  $h_0$  и шириной  $\Delta$ .

$$Q_d = \left| \beta \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right| \approx \beta \frac{h_0}{\Delta^3}. \quad (8.16)$$

$$Q_n = \left| \gamma h \frac{\partial h}{\partial x} \right| \approx \gamma h_0 \frac{h_0}{\Delta}. \quad (8.17)$$

Для отношения вкладов нелинейности к дисперсии, согласно (8.16) и (8.17), имеем

$$\frac{Q_n}{Q_d} = \frac{\gamma}{\beta} h_0 \Delta^2. \quad (8.18)$$

В случае солитона, когда нелинейность сбалансирована дисперсией, согласно (8.15), отношение (8.18) равно 12.

В связи с этим в качестве параметра, определяющего отношение вкладов нелинейности к дисперсии в возмущении жидкости, удобно взять

$$\xi = \frac{\gamma h_0 \Delta^2}{12\beta}. \quad (8.19)$$

Для солитона, когда вклад нелинейности сбалансирован дисперсией,  $\xi = 1$ . При  $\xi < 1$  преобладает дисперсия. В силу этого возмущение расплывается, а параметр  $\xi$  возрастает, приближаясь к единице. В результате из слабо нелинейного возмущения может сформироваться солитон.

При  $\xi > 1$  преобладает нелинейность. В результате возмущение будет искажаться (см. рис. 8.3а, б), что приведет к

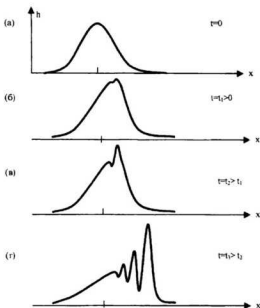


Рис. 8.3. Эволюция возмущения, в котором преобладает нелинейность

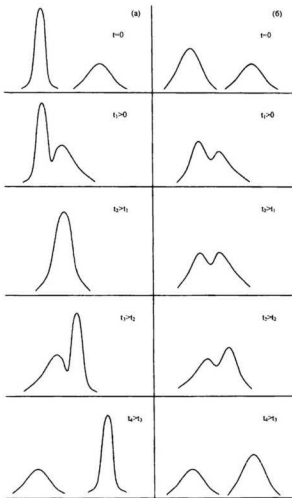
увеличению крутизны переднего фронта и обогащению спектра возмущения высшими гармониками. Когда фронт возмущения станет настолько крутым, что дисперсионное третье слагаемое в уравнении (7.9) будет сравнимо по величине с нелинейным четвертым слагаемым, начнут действовать дисперсионные

эффекты. На гребне возмущения появится осцилляция (см. рис. 8.3в), развитие которой приведет к образованию солитона. Поскольку солитон движется со скоростью большей скорости  $c_{H_0}$ , он отходит от фронта вперед. Затем формируется второй солитон и т. д. (см. рис. 8.3г) пока возмущение полностью не распадется на совокупность солитонов и слабонелинейный волновой пакет. Число возникающих при этом солитонов пропорционально  $\sqrt{E}$ . Многосолитонные решения можно получить методом обратной задачи рассеяния.

При достаточно больших амплитудах возмущения дисперсия уже не в состоянии конкурировать с нелинейностью, что приводит к опрокидыванию возмущения и образованию разрыва. Это явление рассматривалось в разделе 6.

Интересные результаты получаются при решении задачи о взаимодействии двух солитонов. Пусть в среде распространяются два солитона с различными амплитудами. Если первый солитон с большей амплитудой в начальный момент времени расположен позади второго солитона с меньшей амплитудой, то первый солитон, скорость которого больше, чем у второго (см. (8.15)), догонит второй солитон и начнется их взаимодействие (см. рис. 8.4а). При перекрытии образуется возмущение с одним максимумом, которое не является линейной суммой взаимодействующих солитонов. Это возмущение затем распадется на два солитона, которые в точности совпадают с исходными. Таким образом, несмотря на нелинейность процесса происходит независимое прохождение одного солитона через другой. Следует отметить, что такое взаимодействие реализуется только при значительной разнице в амплитудах солитонов.

Если амплитуды взаимодействующих солитонов близки по величине, то их полного перекрытия не происходит. Солитоны сближаются так, что связанное состояние имеет два выраженных максимума (см. рис. 8.4б). Затем в течение некоторого времени относительное расположение максимумов не изменяется. При этом изменяется их величина так, что меньший максимум вырастает до большего, а больший достигает величины меньшего. После этого солитоны расходятся и оказываются такими же, какими они были до взаимодействия.



**Рис. 8.4.** Процесс взаимодействия двух солитонов с сильно различающимися (а) и близкими по величине (б) амплитудами

## 9. Солитоны на мелкой воде и в пленках сверхтекучей жидкости

Для случая жидкости с глубиной  $H_0$  в поле внешней силы  $F$  (см. рис. 3.1) найдем явные выражения для коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$ , которые определяют соответственно дисперсию и нелинейность в уравнении (7.9).

При получении коэффициента  $\beta$  будем исходить из уравнения (4.21), которое с точностью до кубических членов по малому параметру (4.22) запишем в виде

$$\omega^2 = \frac{c_{H_0}^2}{H_0} \left( 1 + \frac{\sigma H_0}{\rho_0 c_{H_0}^2} k^2 \right) k^2 H_0 \left( 1 - \frac{1}{3} (k H_0)^2 \right). \quad (9.1)$$

Учитывая малость второго слагаемого в первой и второй скобках правой части уравнения (9.1), получим

$$\omega = c_{H_0} k \left\{ 1 - \frac{k^2}{2} \left( \frac{H_0^2}{3} - \frac{\sigma H_0}{\rho_0 c_{H_0}^2} \right) \right\}. \quad (9.2)$$

Линейное уравнение (7.5) дает закон дисперсии (9.2), если параметр  $\beta$  равен

$$\beta = \frac{c_{H_0}}{2} \left( \frac{H_0^2}{3} - \frac{\sigma H_0}{\rho_0 c_{H_0}^2} \right). \quad (9.3)$$

При получении явного выражения для коэффициента  $\gamma$  необходимо знать явное выражение для внешней силы  $F(H)$ . Для случая мелкой воды, удовлетворяющей неравенству (4.22), в поле силы тяжести, равенства (6.3) и (7.8) дают

$$\gamma_\kappa = \frac{\partial u_g}{\partial H} \Big|_{H=H_0} = \frac{3c_g}{2H_0}, \quad (9.4)$$

где согласно (6.1)

$$c_\kappa = \sqrt{gH_0}. \quad (9.5)$$

Для мелкой воды в поле силы тяжести второе слагаемой в уравнении (9.3) много меньше первого. Учитывая это, имеем

$$\beta_k = \frac{1}{6} c_g H_0^2. \quad (9.6)$$

Согласно (9.4) и (9.6) коэффициенты  $\beta_k$  и  $\gamma_k$  являются положительными величинами. Напомним, что положительность коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$  предполагалась при расчетах в разделах 7 и 8.

Рассмотрим солитоны в пленках сверхтекучего гелия. Существенной особенностью волнового процесса в пленке сверхтекучего гелия является зависимость возвращающей силы Ван-дер-Ваальса от расстояния до подложки. Как было показано в разделе 6, это приводит к образованию разрыва на заднем фронте волны конечной амплитуды. Однако последнее обстоятельство не было учтено в ряде работ. Поэтому, полученное там уравнение и вытекающее из него солитонное решение не описывает распространение возмущения в пленке сверхтекучего гелия. Уравнение, которое адекватно отображает нелинейность и дисперсию волн в пленках сверхтекучего гелия, было впервые получено в работе [7]. Там же были исследованы солитонные решения этого уравнения.

Следуя работе [7], вычислим коэффициенты  $\gamma_B$  и  $\beta_B$ , которые определяют соответственно нелинейность и дисперсию волн в пленках сверхтекучего гелия. Исходя из уравнений (6.11) и (7.8) получим

$$\gamma_B = \left. \frac{\partial u_B}{\partial H} \right|_{H=H_0} = -\frac{c_3}{2H_0}, \quad (9.7)$$

где в соответствии с равенством (6.9)

$$c_3 = \sqrt{\frac{\alpha_B}{H_0^3}}. \quad (9.8)$$

Согласно (9.7) сила Ван-дер-Ваальса, в отличие от силы тяжести (сравни с (9.4)), дает отрицательный знак перед нелинейным членом. Что же касается дисперсионного члена, то согласно (9.3) для него возможен как положительный, так и отрицательный знаки. Толщина пленки  $H_*$ , при которой дисперсия изменяет знак, согласно (9.3) определяется уравнением

$$\frac{H_s^2}{3} - \frac{\sigma H_s}{\rho c_{nn}^2 (H = H_s)} = 0. \quad (9.9)$$

Подставляя в уравнение (9.9) выражение (6.9) при  $H = H_s$ , получим явное выражение для  $H_s$

$$H_s = \sqrt{\frac{\rho \alpha_B}{3\sigma}}. \quad (9.10)$$

Подстановка численных значений для гелия в выражение (9.10) для  $H_s$  дает величину порядка атомного слоя. Поэтому при гидродинамическом рассмотрении, когда выполняется неравенство (1.1), всегда  $H_0 \gg H_s$  и в пленках сверхтекучего гелия второе слагаемое в (9.3) много больше первого. В итоге дисперсионный коэффициент  $\beta_B$  в пленке сверхтекучего гелия оказывается отрицательным и в соответствии с (9.3) равен

$$\beta_B = -\frac{\sigma H_0}{2\rho c_3}. \quad (9.11)$$

Согласно (7.9), (9.7) и (9.11) уравнение для малых отклонений  $h$  от равновесного значения  $H_0$  для пленок сверхтекучего гелия записывается в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c_3 \frac{\partial h}{\partial x} - |\beta_B| \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - |\gamma_B| h \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (9.12)$$

Вводя обозначения

$$q_B = |\gamma_B| h \quad (9.13)$$

и новую переменную

$$x_B = x - c_3 t, \quad (9.14)$$

уравнение (9.12) запишем в виде

$$\frac{\partial q_B}{\partial t} - |\beta_B| \frac{\partial^3 q_B}{\partial x_B^3} - q_B \frac{\partial q_B}{\partial x_B} = 0. \quad (9.15)$$

Если не учитывать зависимости силы Ван-дер-Ваальса от расстояния до подложки или не учитывать поверхностное натяжение  $\sigma$ , как это делалось в ряде работ, то дисперсионный и



нелинейный члены в уравнении КдФ, в отличие от уравнения (9.15), будут иметь разные знаки. Можно показать, что солитонные решения уравнения КдФ с противоположными знаками перед нелинейным и дисперсионным членами неустойчивы относительно изгиба солитона вдоль оси  $y$ . Уравнение КдФ (9.15) с одинаковыми знаками перед нелинейным и дисперсионным членами дает устойчивое решение.

Заменой  $x_B \rightarrow -x_B$  или  $t \rightarrow -t$  уравнение (9.15) приводится к привычному виду уравнения КдФ (7.14) с плюсами перед нелинейным и дисперсионным членами. Односолитонное решение уравнения (9.15), с учетом (9.13) и (9.14), записывается в виде

$$h = h_B c h^{-2} \left( \frac{x - (c_3 - s_B)t - \tau_B}{\Delta_B} \right), \quad (9.16)$$

где

$$h_B = \frac{3s_B}{|\gamma_B|} \text{ и } \Delta_B = 2\sqrt{\frac{|\beta_B|}{s_B}} \quad (9.17)$$

соответственно высота и ширина солитона, а  $s_B$  и  $\tau_B$  – константы интегрирования.

Солитоны, которые описывает решение (9.16), в отличие от солитонов (8.14), движутся со скоростью  $c_3 - s_B$  меньшей скорости звука  $c_3$ . В результате этого в соответствии с критерием сверхтекучести Ландау критическая скорость, обусловленная рождением солитона, должна быть меньше критической, связанной с любым другим поверхностным возбуждением. Сказанное дает основание предполагать, что солитоны могут возникать при движении пленки сверхтекучего гелия в результате неустойчивости однородного течения.

## 10. Затухание колебаний, обусловленное силой трения

Диссипативные процессы в жидкости приводят к возникновению силы трения, которая обусловлена движением жидкости. Силу трения  $F_T(\mathbf{v})$  следует учесть в правой части уравнения движения (1.5). При малых одномерных колебаниях жидкости со скоростью  $v_x$  сила трения  $F_T(v_x)$  в большинстве случаев линейно зависит от скорости и может быть описана выражением

$$F_{TII} = -B \cdot v_x, \quad (10.1)$$

где  $B$  – положительный коэффициент, а знак минус показывает, что сила трения действует в сторону, противоположную скорости.

Подстановка выражения (10.1) в правую часть уравнения (4.5) дает следующую замкнутую систему уравнений для малых отклонений скорости  $v_x$  и глубины жидкости  $h$  от состояния равновесия

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{c_{H_0}^2}{H_0} \frac{\partial h}{\partial x} = -B v_x. \quad (10.3)$$

Система уравнений (2.5), (2.6) с точностью до переобозначений  $\rho \rightarrow H$  и  $c_\rho \rightarrow c_H$  совпадает с системой уравнений (3.19), (3.20). В связи с этим система уравнений (10.2), (10.3) с точностью до переобозначений  $h \rightarrow \rho'$ ,  $H_0 \rightarrow \rho_0$  и  $c_{H_0} \rightarrow c_{\rho_0}$  описывает и малые одномерные колебания плотности  $\rho'$  в безграничной жидкости при наличии силы трения.

Подстановка решений (4.6) в систему уравнений (10.2), (10.3) дает следующую систему линейных уравнений относительно  $h$  и  $v_x$ :

$$\omega \cdot h - H_0 k v_x = 0, \quad (10.4)$$

$$c_{H_0}^2 kh - H_0 (\omega + iB) v_x = 0. \quad (10.5)$$

Приравняв определитель линейной системы уравнений (10.4), (10.5) нулю, получим закон дисперсии

$$k = \pm \frac{\omega}{c_{H_0}} \sqrt{1 + i \frac{B}{\omega}}. \quad (10.6)$$

Соотношение между  $h$  и  $v_x$  с законом дисперсии (10.6) следует из (10.4)

$$h = \pm \frac{H_0}{c_{H_0}} \sqrt{1 + i \frac{B}{\omega}} v_x. \quad (10.7)$$

В отличие от (4.9) волновое число (10.6) оказывается комплексным

$$k = \pm (\text{Re } k + i \text{Im } k). \quad (10.8)$$

Из сопоставления (4.10) с (10.7) следует, что сила трения приводит к появлению дополнительной разности фаз  $\delta$  между колебаниями  $h$  и  $v_x$ , которая определяется равенством

$$\text{tg } \delta = \frac{\text{Im } k}{\text{Re } k}. \quad (10.9)$$

Согласно (10.8) решение (4.6) записывается в виде

$$v = v_k e^{\mp x \text{Im } k} e^{i(\pm x \text{Re } k - \omega t)}, \quad (10.10)$$

$$h = h_k e^{\mp x \text{Im } k} e^{i(\pm x \text{Re } k - \omega t)}.$$

Из решения (10.10) следует, что если в начале координат  $x = 0$  находится генератор периодических колебаний с частотой  $\omega$  так, что

$$v_x(x=0) = v_k e^{-i\omega t}, \quad (10.11)$$

то в положительном ( $x > 0$ ) и отрицательном ( $x < 0$ ) направлениях оси  $x$  от генератора будут распространяться затухающие колебания. При этом для волны, распространяющейся от генератора колебаний в направлении  $x > 0$  в выражениях

(10.6), (10.7) и (10.10) следует брать верхний знак, а в направлении  $x < 0$  – нижний знак.

Характерная длина затухания определяется равенством

$$L_d = \frac{2\pi}{\text{Im } k}. \quad (10.12)$$

Согласно (10.10) на расстоянии  $L_d$  от генератора колебаний амплитуда волны уменьшается в  $e^{2\pi}$  раз. Величину  $L_d$  следует сравнивать с длиной волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\text{Re } k}. \quad (10.13)$$

Затухание считается слабым, если безразмерный параметр

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{L_d} = \frac{\text{Im } k}{\text{Re } k}. \quad (10.14)$$

много меньше единицы. Отметим, что правые части равенств (10.9) и (10.14) совпадают. Поэтому при

$$\tilde{\lambda} \ll 1 \quad (10.15)$$

малой является и разность фаз  $\delta$ .

Затухание считается сильным, если

$$\tilde{\lambda} \approx 1. \quad (10.16)$$

В этом случае колебания фактически затухают на длине порядка длины волны.

Согласно (10.6) при слабом затухании

$$\frac{B}{\omega} \ll 1. \quad (10.17)$$

Учитывая в выражении (10.6) только линейные слагаемые по малому параметру (10.17) для волнового числа  $k_1$  получим

$$k_1 = \pm \left( \frac{\omega}{c_{H_s}} + i \frac{B}{2c_{H_0}} \right). \quad (10.18)$$

При этом согласно (10.12) и (10.14) для длины затухания  $L_{d_1}$  и параметра затухания  $\tilde{\lambda}_1$  соответственно получим

$$L_{d_1} = \frac{4\pi c_{H_0}}{B} \text{ и } \tilde{\lambda}_1 = tg\delta_1 = \frac{B}{2\omega}. \quad (10.19)$$

В другом предельном случае сильного затухания

$$\frac{B}{\omega} \gg 1 \quad (10.20)$$

согласно (10.6), (10.12) и (10.14) для волнового числа  $k_2$ , длины затухания  $L_{d_2}$  и параметра затухания  $\tilde{\lambda}_2$  соответственно имеем

$$k_2 = \pm(1+i) \sqrt{\frac{B\omega}{2c_{H_0}^2}}, \quad (10.21)$$

$$L_{d_2} = 2\pi \sqrt{\frac{2c_{H_0}^2}{B\omega}} \text{ и } \tilde{\lambda}_2 = tg\delta_2 = 1. \quad (10.22)$$

Согласно (10.21), (10.22) в предельном случае (10.20) колебания практически затухают уже на расстоянии от генератора равном длине волны. При этом разность фаз между колебаниями  $\dot{h}$  и  $v_x$ , обусловленная силой трения, достигает максимального значения  $\delta_2 = \pi/4$ .

## 11. Распространение волн в жидкости при нелинейной зависимости трения от скорости

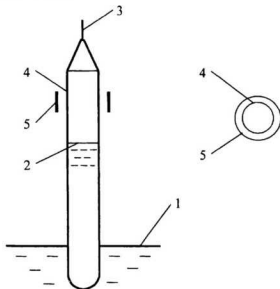
Возможны ситуации, когда даже при относительно малых отклонениях от состояния равновесия сила трения не линейно зависит от скорости движения жидкости. В этом случае правая часть уравнения (10.3) будет не линейно зависеть от скорости и простой метод решения линейной системы уравнений (10.2), (10.3), который дает результат (10.10) оказывается неприменимым.

Как известно, нет алгоритма решения системы уравнений, которая содержит нелинейное слагаемое. Такая система уравнений требует индивидуального подхода, который определяется конкретным видом нелинейного слагаемого. В качестве примера рассмотрим эксперименты [8], в которых наблюдалось явление, обусловленное нелинейной зависимостью силы трения от скорости движения сверхтекучей жидкости.

Прежде чем рассматривать постановку экспериментов [8] обсудим роль пленки сверхтекучей жидкости в работе всевозможных устройств, которые используют сверхтекучий гелий. На поверхности твердого тела, соприкасающегося с насыщенными парами сверхтекучего гелия, образуется жидкая пленка сверхтекучего гелия. Наличие гелиевой пленки на стенках сосуда может привести к значительным потерям гелия за счет его вытекания из сосуда при движении пленки сверхтекучей жидкости.

Вытекание сверхтекучего гелия из сосуда, обусловленное движением пленки, исследовалось в [8] с помощью прибора, схема которого изображена на рис. 11.1. Камера заполнялась жидким гелием до определенной высоты. Ампула наполнялась путем погружения и поднималась над уровнем гелия в камере. В результате создавалась желаемая разность уровней. Под действием разностей уровней жидкости сверхтекучая пленка двигалась по стенкам ампулы со скоростью, близкой к критической скорости  $v_k$ , при которой трение отсутствовало. Вытекание жидкости из ампулы за счет движения пленки регистрировалось с помощью катетометра, который позволял вести наблюдения за изменением уровня жидкости в ампуле в зависимости от времени. Отсюда, по

известной геометрии ампулы рассчитывалась скорость переноса гелия по пленке.



**Рис. 11.1.** Схема прибора для исследования вытекания жидкости из ампулы за счет движения сверхтекучей пленки по ее стенкам:

- 1 – уровень жидкости в камере;
- 2 – уровень жидкости в стеклянной ампуле;
- 3 – приспособление для погружения и поднятия ампулы;
- 4 – обкладка конденсатора на стенке ампулы;
- 5 – обкладка конденсатора, которая опоясывает ампулу на расстоянии  $d$  от нее

В экспериментах [8] наблюдалось резкое уменьшение скорости движения сверхтекучей пленки по стенкам ампулы, вплоть до ее остановки, при распространении в ней волн третьего звука. Генератором третьего звука в [8] являлся конденсатор, одна из обкладок которого находилась на стенке ампулы, а другая обкладка опоясывала ампулу на расстоянии  $d$  от неё (см. рис. 11.1). При

этом зазор  $d$  между обкладками конденсатора был много больше толщины пленки, а ширина обкладок – много меньше длины ампулы.

Когда на обкладки подавалось переменное напряжение с частотой  $\omega$ , то под действием переменного электрического поля жидкость периодически втягивалась в пространство между обкладками конденсатора. В итоге в обе стороны от конденсатора по сверхтекучей пленке распространялись волны третьего звука, которые описаны в разделе 4.

Возможность управления движением пленки имеет как научное, так и прикладное значение. Дело в том, что движение сверхтекучей пленки мешает проведению многих экспериментов и затрудняет применение гелия в ряде устройств. В связи с этим с момента открытия сверхтекучести обсуждались различные способы остановки или, по крайней мере, влияния на скорость течения пленки.

Казалось, что само явление сверхтекучести не позволит остановить пленку, которая при разных уровнях или температурах всегда будет двигаться со скоростью близкой к критической  $v_k$ . Поэтому эксперименты [8], в которых удалось уменьшить скорость движения пленки вплоть до нулевого значения, привлекли внимание всех, работающих в области физики квантовых жидкостей.

Дальнейшее развитие исследований по изучению и использованию открытого в [8] явления требовало понимания его физической природы. Теоретическое объяснение указанного явления было дано в работах [9; 10]. Из выполненных там расчетов следовало, что обнаруженное в [8] явление объясняется необычным характером распространения колебаний в сплошных средах, имеющих нелинейную зависимость силы трения от скорости.

Прежде, чем писать уравнения и искать их решения, попытаемся понять на качественном уровне, каковы могут быть физические причины наблюдаемого в [8] явления. Для этого рассмотрим безграничную пленку сверхтекучей жидкости. Будем считать, что плоскость подложки, на которой находится пленка совпадает с плоскостью  $x, y$  и отсутствует зависимость от



координаты  $y$ . Толщина гелиевой пленки  $H_0 \approx 10^{-8}$  м существенно меньше длины волны  $\lambda_3 = 2\pi c_3/\omega$  генерируемого третьего звука. Это обстоятельство, как показано в разделе 3, дает право пренебречь поперечной составляющей скорости  $v_z$  и считать колебания жидкости в волне третьего звука продольными со скоростью  $\tilde{v}_x \equiv \tilde{v}$ .

Пусть в покоящейся пленке распространяется волна третьего звука с амплитудой  $v_A < v_k$ . Для наглядности рассмотрим зубцеобразные периодические колебания, зависимость которых от времени в любой фиксированной точке пленки  $x$  описывается функцией

$$\tilde{v}^{(0)} = v_A \{ \eta(\sin \omega t) - \eta(-\sin \omega t) \}, \quad (11.1)$$

где  $\eta$  – ступенчатая функция Хевисайда, которая равна единице, когда ее аргумент положительный, и равна нулю при отрицательном значении аргумента.

Согласно (11.1) в течение полупериода колебаний

$$\tau_{\omega} = \frac{\pi}{\omega}, \quad (11.2)$$

когда  $\sin \omega t \geq 0$ , скорость движения жидкости

$$\tilde{v}^{(0)} = \tilde{v}_{\rightarrow}^{(0)} = v_A, \quad (11.3)$$

а в отрицательном полупериоде, когда  $\sin \omega t \leq 0$

$$\tilde{v}^{(0)} = \tilde{v}_{\leftarrow}^{(0)} = -v_A. \quad (11.4)$$

Среднее по периоду колебаний  $2\tau_{\omega}$  функции  $f(t)$  определим равенством

$$\bar{f} = \frac{1}{2\tau_{\omega}} \int_0^{2\tau_{\omega}} f(t) dt. \quad (11.5)$$

Среднее значение  $\tilde{v}$  при колебательном движении удобно записать в виде суммы средних по положительному и отрицательному полупериодам

$$\bar{\tilde{v}} = \bar{\tilde{v}}_{\rightarrow} + \bar{\tilde{v}}_{\leftarrow}, \quad (11.6)$$

где

$$\bar{v}_{\rightarrow} = \frac{1}{2\tau_{\omega}} \int_0^{\tau_{\omega}} \tilde{v}_{\rightarrow}(t) dt, \text{ а } \bar{v}_{\leftarrow} = \frac{1}{2\tau_{\omega}} \int_{\tau_{\omega}}^{2\tau_{\omega}} \tilde{v}_{\leftarrow}(t) dt. \quad (11.7)$$

Выполняя усреднение в (11.6) с функциями (11.3) и (11.4), получим

$$\bar{v}^{(0)} = \frac{1}{2\tau_{\omega}} (v_A \tau_{\omega} - v_A \tau_{\omega}) = 0. \quad (11.8)$$

Очевидно, что результат (11.8) справедлив при любых периодических колебаниях, поскольку при этом средние значения (11.7) по положительному и отрицательному полу периодам равны по модулю и противоположны по знаку. Зубцеобразная зависимость была выбрана для наглядности.

Рассмотрим теперь движущуюся пленку сверхтекучей жидкости. Как известно, при движении сверхтекучей жидкости трение равно нулю при скоростях  $|v_x|$  меньших критической  $v_k$  и резко возрастает при  $|v_x| > v_k$ , когда происходит срыв сверхтекучего движения. Зависимость силы трения  $F_T$  от скорости движения сверхтекучей жидкости  $v_x$  приведена на рис. 11.2.

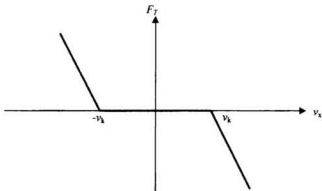


Рис. 11.2. Зависимость силы трения  $F_T$  от скорости движения  $v_x$  сверхтекучей жидкости

Отметим, что, строго говоря, при  $|v_x| > v_k$  зависимость силы трения от скорости не является линейной. Между тем линейная аппроксимация, согласно [9; 10], является вполне удовлетворительной.

Сила трения при  $|v_x| > v_k$  является достаточно большой. Поэтому при относительно малом перепаде уровней можно считать, что пленка движется с критической скоростью  $v_k$ . Пусть теперь в движущейся со скоростью  $v_k$  пленке генерируются периодические колебания третьего звука, в которых скорость движения жидкости  $\tilde{v}$ . Тогда скорость движения жидкости  $v_x$  относительно подложки, очевидно, равна сумме

$$v_x = v_k + \tilde{v}. \quad (11.9)$$

Пусть в некоторой фиксированной точке  $x$  жидкости, которая движется со скоростью  $v_k$ , в положительном полупериоде скорость колебательного движения  $\tilde{v} = \tilde{v}_{\rightarrow} > 0$  направлена по течению жидкости. Тогда в рассматриваемом положительном полупериоде скорость (11.9) движения жидкости

$$v_{x\rightarrow} = v_k + \tilde{v}_{\rightarrow} \quad (11.10)$$

должна превышать критическую. При этом возникает большая сила трения, которая препятствует движению жидкости со скоростью, превышающей критическую. В пределе бесконечно большой силы трения

$$\tilde{v}_{\rightarrow}^{(\infty)} = 0 \text{ и } v_{x\rightarrow}^{(\infty)} = v_k. \quad (11.11)$$

В отрицательном полупериоде, когда колебания направлены против течения, так что  $\tilde{v} = \tilde{v}_{\leftarrow} < 0$  скорость (11.9) движения жидкости

$$v_{x\leftarrow} = v_k + \tilde{v}_{\leftarrow} = v_k - |\tilde{v}_{\leftarrow}| \quad (11.12)$$

будет меньше критической, если

$$|\tilde{v}_{\leftarrow}| \leq 2v_k. \quad (11.13)$$

Будем считать, что неравенство (11.13) выполняется. Тогда в отрицательном полупериоде сила трения отсутствует и  $v_{x*}$  может меняться в пределах

$$-v_k \leq v_{x*} \leq v_k. \quad (11.14)$$

Средняя по времени скорость движения жидкости относительно подложки, исходя из определения среднего (11.5) и соотношений (11.6), (11.7), равна

$$\bar{v}_x = v_k + \frac{1}{2\tau_\omega} \int_0^{\tau_\omega} \tilde{v}_{\rightarrow}(t) dt - \frac{1}{2\tau_\omega} \int_{\tau_\omega}^{2\tau_\omega} \tilde{v}_{\leftarrow}(t) dt. \quad (11.15)$$

Второе слагаемое в правой части выражения (11.15) меньше модуля третьего слагаемого, поскольку сила трения возникает только при колебаниях  $\tilde{v}_{\rightarrow}$  по течению и отсутствует при колебаниях  $\tilde{v}_{\leftarrow}$  против течения. В пределе бесконечной силы трения, согласно (11.11), второе слагаемое в (11.15) равно нулю. В любом случае асимметрия силы трения при колебаниях по и против течения приведет к тому, что перенос массы жидкости по движущейся пленке уменьшится при распространении в ней волн третьего звука, поскольку, согласно (11.15),

$$\bar{v}_x < v_k. \quad (11.16)$$

В пределе бесконечно большой силы трения при зубцеобразных колебаниях с амплитудой  $\tilde{v}_{\leftarrow}^{(0)} = -2v_k$  соотношение (11.15) дает

$$\bar{v}_x^{(0)} = v_k + 0 - \frac{1}{2\tau_\omega} \tau_\omega 2v_k = 0. \quad (11.17)$$

Согласно (11.17) перенос массы, обусловленный движением пленки со скоростью  $v_k$ , полностью компенсируется переносом массы жидкости при распространении в ней волн третьего звука. Именно такое явление наблюдалось в экспериментах [8] при достаточно больших значениях амплитуды переменного напряжения, которое подавалось на обкладки конденсатора.

После того, как физические причины наблюдаемого в [8] явления понятны, можно писать уравнения, которые должны отображать рассмотренную выше ситуацию, и искать их решения.

Система уравнений, описывающая рассматриваемое явление, состоит из уравнения закона сохранения массы (3.19) и уравнения движения (3.20), в правую часть которого следует добавить силу  $F_n$ , движущую пленку, и силу трения  $F_T = F_T(v_x)$ . В итоге имеем

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{c_H^2}{H} \frac{\partial H}{\partial x} + F_n + F_T(v_x). \quad (11.18)$$

Выше отмечалось, что в экспериментах [8] пленка двигалась в результате перепада уровней  $\Delta H$ . Следовательно,

$$F_n = g \cdot \Delta H / 2z, \quad (11.19)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения, а  $2z$  – длина пленки. Зависимость силы трения от скорости, представленная на рис.11.2, описывается функцией

$$F_T = -B(v_x - v_k \text{sign}(v_x)) \eta(|v_x| - v_k). \quad (11.20)$$

Если колебания в жидкости отсутствуют, то  $H = H_0 = \text{const}$  и  $v_x = v_0 = \text{const}$ . В этом случае уравнение (3.19) удовлетворяется тождественно, а уравнение (11.18) дает

$$F_n = -F_T(v_0) = B(v_0 - v_k). \quad (11.21)$$

При наличии колебаний скорость движения жидкости  $v_x$  относительно подложки равна

$$v_x = v_0 + \tilde{v}. \quad (11.22)$$

В экспериментах [8] скорость  $v_x$  была существенно меньше скорости третьего звука  $c_3$  и малым было отклонение толщины пленки  $h$  от равновесного значения  $H_0$ . В этом случае уравнения (3.19) и (11.18) с учетом неравенств (4.2), (4.3) и соотношения (11.21) можно записать в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = 0, \quad (11.23)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{c_3^2}{H_0} \frac{\partial h}{\partial x} = F_T(\tilde{v}), \quad (11.24)$$

где

$$F_p(\tilde{v}) = F_T(v_0 + \tilde{v}) - F_T(v_0). \quad (11.25)$$

Если амплитуда колебаний настолько мала, что  $|\tilde{v}| < (v_0 - v_k)$ , то выражения (11.20) и (11.25) дают

$$F_p(|\tilde{v}| < (v_0 - v_k)) = -B\tilde{v}. \quad (11.26)$$

Результат (11.26) получается всегда, когда функция  $F_T(v_0 + \tilde{v})$  может быть разложена в ряд по степеням  $\tilde{v}$  так, что в линейном приближении имеем

$$F_T(v_0 + \tilde{v}) = F_T(v_0) - B\tilde{v}. \quad (11.27)$$

Подстановка (11.27) в (11.25) дает вновь выражение (11.26). После этого система уравнений (11.23), (11.24) с выражением (11.26) оказывается линейной и описывает обычные затухающие колебания, которые были рассмотрены в разделе 10.

Очевидно, что ситуация оказывается другой, когда амплитуда колебаний скорости настолько велика, что линейное приближение (11.27) уже не применимо. При этом колебания могут быть малыми в том смысле, что выполняются неравенства (4.2), (4.3) и в системе уравнений (11.23), (11.24) нелинейным оказывается только одно слагаемое  $F_p(\tilde{v})$ . Наличие такого нелинейного слагаемого не позволяет использовать стандартный алгоритм решения линейных уравнений. В этом случае метод решения системы уравнений определяется функциональной зависимостью нелинейного слагаемого и в каждом конкретном случае является искусством.

Именно такая ситуация возникла в экспериментах [8], когда  $|\tilde{v}| > (v_0 - v_k)$ . Тогда, согласно (11.20) и (11.25), колебания по течению при  $\tilde{v}_+ > 0$  и колебания против течения, когда  $\tilde{v}_+ < 0$ , затухают по различным законам, что в итоге приводит к волновому движению, существенно отличающемуся по своим свойствам от обычной затухающей волны, описанной в разделе 10. Согласно качественным рассуждениям, приведенным в начале этого раздела, такая асимметрия в затухании колебаний должна, в частности, привести к переносу массы жидкости против течения.

Для исследований колебаний при нелинейной зависимости силы трения (11.20) от скорости  $v_x$  необходимо найти решение системы уравнений (11.23),

(11.24). Для простоты ограничимся случаем, когда сила  $F_n$  относительно мала, а амплитуда колебаний достаточно велика так, что можно считать  $v_0 = v_k$ . Общий случай, когда  $v_0 > v_k$ , рассмотрен в [10].

Будем считать, что амплитуда колебательного движения ограничена неравенством

$$|\tilde{v}| \leq 2v_k. \quad (11.28)$$

Неравенство (11.28) согласно (11.9) и (11.20) позволяет считать, что сила трения отсутствует при колебаниях против течения, когда  $\tilde{v}_x < 0$ . Учитывая равенство  $v_0 = v_k$ , неравенство (11.28) и выражение (11.20), уравнение движения (11.24) запишем в виде

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{c_3^2}{H_0} \frac{\partial h}{\partial x} = -B\tilde{v} \eta(\tilde{v}). \quad (11.29)$$

Систему уравнений (11.23), (11.29) дополним граничным условием в точке  $x = 0$ , которое моделирует работу генератора третьего звука

$$\tilde{v}(x = 0, t) = v_A \sin \omega t. \quad (11.30)$$

Аналитическое решение системы уравнений гиперболического типа (11.23), (11.29) с граничным условием (11.30) можно получить, если записать ее в инвариантах Римана с производными вдоль характеристик (см. [9; 10]). Согласно [9; 10] при слабом затухании, в нулевом приближении по малому параметру (10.17), вблизи генератора колебаний, когда  $|x|$  много меньше длины затухания

$$L_d = \frac{4\pi c_3}{B}, \quad (11.31)$$

решение для скорости волнового движения  $\tilde{v}(x, t)$  записывается в виде

$$\tilde{v}(x, t) = \tilde{v}_0(x, t) + \tilde{\tilde{v}} \quad \text{при } |x| \ll L_d, \quad (11.32)$$

где

$$\tilde{v}_0(x, t) = v_A \sin(\omega t - kx) \quad (11.33)$$

– решение системы (11.23), (11.29) при  $B = 0$  с граничным условием (11.30), а

$$k = \text{sign}(x)\omega/c_3. \quad (11.34)$$

Согласно (11.32) – (11.34) в обе стороны от генератора колебаний, который находится в точке  $x = 0$ , распространяются колебания скорости (11.33), смещенные на величину среднего значения  $\bar{v}$ . Усредняя по времени левую и правую части равенства (11.32) и учитывая, что  $\bar{v}_0 = 0$ , получим естественное равенство  $\bar{v} = \bar{v}$ , которое в рассматриваемом стационарном режиме согласно закону сохранения массы жидкости должно выполняться в любой точке  $x$ .

Для отклонения поверхности жидкости  $h$  от равновесного значения  $H_0$  в нулевом приближении по малому параметру (10.17), согласно [9; 10], вблизи генератора имеем решение аналогичное (4.10)

$$h(x, t) = \text{sign}(x)H_0 \tilde{v}_0(x, t)/c_3 \text{ при } |x| \ll L_d. \quad (11.35)$$

При слабом затухании, когда выполняется неравенство (10.17), вдали от генератора согласно [9; 10] имеем

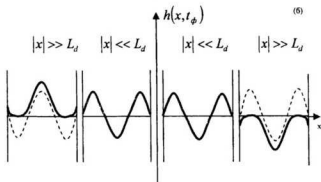
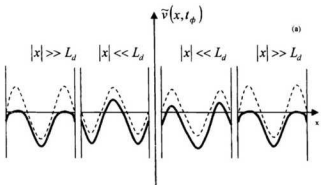
$$\tilde{v}(x, t) = \left\{ \tilde{v}_0(x, t) + \frac{\bar{v}}{2} \right\} \eta \left( - \left\{ \tilde{v}_0(x, t) + \frac{\bar{v}}{2} \right\} \right) \text{ при} \quad (11.36)$$

$$|x| \gg L_d,$$

$$h(x, t) = \text{sign}(x) \frac{H_0}{c_3} \tilde{v}(x, t) \text{ при } |x| \gg L_d. \quad (11.37)$$

Согласно (11.36) на больших расстояниях от генератора остаются только отрицательные значения скорости, когда фигурная скобка в (11.36) меньше нуля (см. рис. 11.3а). Полное затухание положительных значений скорости при  $|x| \gg L_d$  обусловлено силой трения, которая содержится в правой части уравнения (11.29).





Согласно (11.37) при  $x > 0$  вдали от генератора остаются только впадины (см. рис. 11.36), поскольку

$$h(x > 0, t) \leq 0 \text{ при } x \gg L_d, \quad (11.38)$$

а при  $x < 0$  – только горбы, т. к.

$$h(x < 0, t) \geq 0 \text{ при } x \ll -L_d. \quad (11.39)$$

Скорость же  $\tilde{v}(x, t)$ , согласно (11.36), как при  $x \gg L_d$ , так и при  $x \ll -L_d$  оказывается отрицательной (см. рис. 11.3а, б).

Наличие только впадин (11.38) при  $x \gg L_d$  и горбов (11.39) при  $x \ll -L_d$ , когда  $\tilde{v}(x, t) \leq 0$ , связано с тем, что согласно (10.7) и (10.17) для волн, распространяющихся от генератора в положительном направлении оси  $x$  (по течению жидкости),  $\tilde{v}_x$  и  $h$  имеют одинаковые знаки, а для волн, распространяющихся в отрицательном направлении оси  $x$  (против течения),  $\tilde{v}_x$  и  $h$  имеют разные знаки. Поскольку вдали от генератора остаются только незатухающие значения  $\tilde{v}_x \leq 0$ , то при  $x \gg L_d$  по течению будут двигаться только впадины (11.38), а при  $x \ll -L_d$  против течения – только горбы (11.39). В результате жидкость переносится звуковой волной в сторону, обратную ( $\overline{\tilde{v}} < 0$ ) движению жидкости.

Значения средней скорости  $\overline{\tilde{v}}$  можно получить путем усреднения по времени выражения (11.36). Проще всего выглядит результат такого усреднения для зубцеобразных колебаний типа (11.1), который записывается в виде

$$\overline{\tilde{v}} = \frac{1}{2} \left( -v_A + \frac{\overline{\tilde{v}}}{2} \right) \text{ или } \overline{\tilde{v}} = -\frac{2}{3} v_A. \quad (11.40)$$

Согласно неравенству (11.28) имеем

$$v_A - \frac{\overline{\tilde{v}}}{2} \ll 2v_k. \quad (11.41)$$

Соотношения (11.40), (11.41) дают максимальное значение  $v_{A\max}$  амплитуды  $v_A$

$$v_{A \max} = \frac{3}{2} v_k. \quad (11.42)$$

Подставляя (11.42) в (11.40), получим минимальное значение для средней скорости

$$\overline{v}_{\min} = -v_k, \quad (11.43)$$

которое отвечает максимальному значению модуля средней скорости волнового движения

$$\left| \overline{v} \right|_{\max} = v_k. \quad (11.44)$$

Усредняя по времени выражение (11.9) с учетом (11.43), получим минимальную среднюю скорость движения жидкости относительно подложки

$$\overline{v}_{x \min} = v_k + \overline{v}_{\min} = 0. \quad (11.45)$$

Согласно (11.45) при достаточно больших амплитудах колебания перенос жидкости будет отсутствовать, что и наблюдалось в экспериментах [8].

В другом предельном случае сильного затухания, когда выполняется неравенство (10.20), положительные значения  $\tilde{v}$ , в соответствии с правой частью равенства (11.29), практически полностью затухают уже на расстоянии длины волны от генератора. В итоге в обе стороны от генератора распространяются только значения  $\tilde{v} < 0$ . При этом, согласно результатам раздела 10, в положительном ( $x > 0$ ) направлении оси  $x$  разность фаз  $\delta(x > 0)$  между значениями  $h$  и  $\tilde{v}$  будет порядка  $\delta(x > 0) \approx \pi/4$ , а в отрицательном ( $x < 0$ ) направлении оси  $x$  разность фаз  $\delta(x < 0)$  будет порядка  $\delta(x < 0) \approx \pi + \pi/4$ .

Разность фаз  $\delta(x > 0) \approx \pi/4$  между  $h$  и  $\tilde{v} < 0$  приведет к тому, что по течению ( $x > 0$ ) часть впадины будет заменена на горб, а разность фаз  $\delta(x < 0) \approx \pi + \pi/4$  между  $h$  и  $\tilde{v} < 0$  приведет к тому, что против течения ( $x < 0$ ) часть горба – на впадину. При этом по течению будут двигаться в основном впадины, а против течения – в основном горбы. В итоге генератор колебаний будет переносить жидкость против течения.

Результаты экспериментов [8] и теории [9; 10] позволили авторам работы [8] создать устройство для получения низких температур, которое было защищено патентом. Следует подчеркнуть, что теория [9; 10] применима не только для описания распространения третьего звука в движущейся пленке сверхтекучего гелия, но также может быть использована при решении ряда других задач, где сила трения не линейно зависит от скорости.

Расчеты, выполненные в [9; 10], стимулировали эксперименты, в которых исследовалось модулированное переменным давлением течение сверхтекучего гелия через узкие поры и наблюдались эффекты, предсказанные теорией [9; 10].

Описанный в этом разделе эффект наблюдался также, когда через сверхпроводящую проволоку одновременно пропускались переменный и постоянный токи. Как известно, зависимость сопротивления сверхпроводящей проволоки от тока подобна зависимости, даваемой формулой (11.20), где  $v_x$  теперь – скорость течения электронной жидкости, а  $F_T$  – сопротивление. В заключение заметим, что нелинейная сила трения при соответствующей зависимости  $F_T(v)$  может привести не только к уменьшению, но и к увеличению средней скорости движения жидкости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика – М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1986.
2. *Atkins K. R.* Third and fourth sound in liquid helium II. Phys. Rev. 113, № 4, p. 962 - 965, (1959).
3. *Everitt C. W. F., Atkins K. R., Denenstien A.* Third sound in liquid helium films. Phys. Rev. A, 136, № 6, p. A 1494 – A 1499, (1961).
4. *Bergmann D.* Third sound in superfluid helium film of arbitrary thickness. Phys. Rev. A, 3, № 6, p. 2058 – 2066, (1971).
5. *Адаменко И. Н., Полуэктов Ю. М.* К вопросу о распространении и поглощении третьего звука. ФНТ, 6, № 7, с. 858 – 866, (1980).
6. *Adamenko I. N., Nemchenko K. E., Tanatarov I. V.* Application of the theory of continuous media to the description of thermal excitations in superfluid helium. Phys. Rev. B, 67, p. 104513 (1 - 9), (2003).
7. *Адаменко И. Н., Полуэктов Ю. М.* Солитоны в пленках сверхтекучего гелия. ФНТ, 7, № 4, с. 419 – 423, (1981).
8. *Esel'son B. N., Ivantsov V. G., Mikhailov G. A., Shcherbachenko R. I.* Influence of an AC electric field on He II films transfer. Phys. Lett., 47 A, № 1, p. 29 – 30, (1974).
9. *Адаменко И. Н.* Особенности распространения звука в движущемся He II. ЖЭТФ, 68, вып.4, с. 1520 – 1527, (1975).
10. *Адаменко И. Н.* Распространение волн в жидкостях с нелинейной зависимостью силы трения от скорости (на примере He II). ФНТ, 3, № 8, с. 957 – 969, (1977).



Навчальне видання

**Адаменко Ігор Миколайович**

**Збурення скінченних амплітуд у рідинах**

Редактор І. Ю. Агаркова  
Коректор О. Є. Ткаченко  
Комп'ютерна верстка А. О. Баскакова  
Макет обкладинки І. М. Дончик

*Російською мовою*



Підписано до друку 24.12.07. Формат 60x84/16  
Папір офсетний. Друк ризографічний  
Умов. друк. арк. 4,88. Обл. – вид. арк. 5,25.  
Наклад 100 прим.  
Ціна договірна

*4-60*

61077, Харків, майдан Свободи, 4,  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,  
Видавництво Харківського національного  
університету імені В. Н. Каразіна

Надруковано ФОП «Петрова І. В.»  
61144, Харків, 144, вул. Гв. Широнінців, 79-в, к. 137  
Тел. 362-01-52

Свідоцтво про державну реєстрацію ВОО № 948011 від 03.01.03