

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

Часть 2. Третий семестр

Возле всех вопросов проставлены страницы где это можно найти в конспекте Беляева, типа предметного указателя.

Линейные и полуторалинейные формы в унитарном пространстве (ст 2).

1. Линейные формы в унитарном пространстве (ст 2). Теорема о специальном представлении линейных форм (ст 2).
2. Полуторалинейные формы в унитарном пространстве (ст 2). Теоремы о специальном представлении полуторалинейных форм (ст 2, 3).
3. Связь между матрицей полуторалинейной формы и матрицей линейного оператора.

Сопряженные (ст 3) и самосопряженные (те эрмитовы, ст 4) операторы в унитарном пространстве (ст 3).

1. Сопряженный оператор и его свойства (ст 4).
2. Эрмитовы (самосопряженные) операторы (ст 4).
3. Коммутирующие операторы (ст 4, внизу).
4. Собственные числа и собственные векторы эрмитового оператора (ст 4, 5).
5. Норма линейного и эрмитового оператора (ст 5).
6. Свойства эрмитовых операторов (ст 6).
7. Теорема о собственном базисе эрмитового оператора (ст 6).
8. Спектральное разложение эрмитового оператора (ст 8). Теорема Гамильтона-Кэли (ст 8).
9. Положительные операторы (ст 9). Корень n -й степени из оператора (ст 9).

Эрмитовы формы (ст 10).

1. Полуторалинейные эрмитовы формы (ст 10). Квадратичные формы в унитарном пространстве (ст 10).
2. Приведение квадратичной формы и пары квадратичн форм к каноническому виду (ст 10).

Унитарные и нормальные операторы (ст 11).

1. Унитарные операторы (ст 11). Необходимое и достаточное условие унитарности оператора (ст 11).
2. Нормальные операторы (ст 11, 12). Диагонализуемость матрицы нормального и унитарного операторов (~ ст 11, 12).

Канонический вид линейного оператора (ст 12, 13).

1. Нормальная жорданова форма (ст 12, 13). Схема построения жорданова базиса и приведения матрицы линейного оператора к жордановой форме (ст 14).
2. Примеры приведения матрицы к жордановому виду (ст 15, 16).

Линейные операторы в евклидовом пространстве (ст 19).

1. Линейные операторы в евклидовых пространствах (ст 19). Билинейные формы (ст 19).
2. Самосопряженные операторы (ст 19, 20). Спектр самосопряженного (те эрмитового) оператора (ст 6, 7). Диагонализуемость матрицы самосопряженного оператора (ст 20).
3. Ортогональные операторы (ст 20). Ортогональные матрицы (ст 20, 21). Общий вид произвольного ортогонального оператора (ст 21).

Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве (ст 22).

1. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов (ст 22). Одновременное приведение пары квадратичных форм к сумме квадратов (ст 22).
2. Экстремальные свойства квадратичной формы (ст 22).

Элементы теории тензоров (ст 36).

1. Определитель Грама (ст 36). Линейная зависимость и независимость системы векторов (ст 36).
2. Взаимные базисы (ст 37). Ковариантные и контравариантные координаты векторов (ст 37).
3. Преобразование координат векторов при изменении базиса (ст 39). Ковариантные и контравариантные координаты (ст 37). Формулы Гиббса (ст 38).
4. Понятие тензора (ст 43). Примеры тензоров (ст 44).
5. Основные операции над тензорами (ст 44).
6. Аффинные ортогональные тензоры (ст 45). Операции над аффинными ортогональными тензорами (ст 46).
7. Признак тензорности величины (ст 46). О свойствах симметрии тензоров (ст 47).
8. Псевдотензоры (ст 48). Примеры псевдотензоров (ст 49).
9. Алгебраический символ Леви-Чивита (ст 49, конец).
10. Связь тензоров 2-го ранга с матрицей линейного оператора и с определителями (ст 50).
11. Тензорные поля (ст 50). Дифференцирование тензорного поля по координатам (ст 51).
12. Дифференциальные операции 1-го порядка (ст 51). Градиент, дивергенция и ротор тензорного поля (ст 51, 52).
13. Дифференциальные операции 2-го порядка для тензорных полей (ст 52).
14. Интегральные формулы тензорного анализа (ст 53). Формула Гаусса-Остроградского и формула Стокса для тензорных полей (ст 53).

Элементы теории групп (ст 24).

1. Определение группы (ст 23). Подгруппы (ст 24). Примеры (ст 24).
2. Группа самосовмещений правильного многоугольника (на примере треугольника) (ст 25).
3. Группа перестановок (ст 25, 27, 28). Таблица Кэли для группы перестановок трех элементов (ст 24).
4. Свойства групп (ст 26). Изоморфные группы (ст 27). Примеры (ст 28).
5. Смежные классы (ст 27). Нормальные делители группы (ст 27).
6. Гомоморфизмы групп (ст 27). Фактор-группа (ст 28).
7. Теоремы о гомоморфизмах групп (ст 30).
8. Группы линейных преобразований (ст 30). Ортогональная группа, группа Лоренца (ст 31).
9. Линейные представления групп (ст 33). Приводимые и неприводимые представления (ст 34). Примеры (ст 35).

Элементы теории гильбертовых пространств (не должно быть экзамене).

1. Бесконечномерное евклидово пространство E_∞ . Норма в E_∞ .
2. Ортонормированные системы в E_∞ . Примеры. Ряд Фурье.
3. Замкнутые и полные системы векторов в E_∞ . Сходимость по норме и слабая сходимость в E_∞ .
4. Компактные и слабо компактные множества в E_∞ . Полнота и сепарабельность пространств.
5. Линейные функционалы в E_∞ . Непрерывные и ограниченные линейные функционалы. Норма линейного функционала.
6. Пространство бесконечных последовательностей l^2 .

7. Пространство интегрируемых функций L^2_E
8. Изоморфизм пространств l^2 и L^2_E .
9. Определение гильбертового пространства. Примеры.