Задания на доказательство

Дополнительные задания для самостоятельной работы. Красным написаны ориентировочные баллы. При необходимости можно пользоваться любой литературой и любыми источниками в интернете. Но не надо искать в интернете доказательство 2+2=4 и других заданий, стоящих меньше 20 баллов. Бездумное передирание из википедии также не оценивается. Исполнитель должен лично представить доказательство.

Каждое задание принимается только у одного человека. Во избежание недоразумений и огорчений, особенно в конце семестра, часто оказывается не лишним уточнить заранее у преподавателя постановку задачи и критерии оценивания.

Доказательство какого-либо утверждения не должно использовать другие неочевидные утверждения, которые не были доказаны на лекциях: все предпосылки должны быть доказаны. Пример: если приводите вывод рекуррентных соотношений для каких-либо ортогональных полиномов через производящую функцию, докажите, что определение через производящую функцию дает семейство ортогональных полиномов в том виде как оно было дано в курсе.

Часть I

Глава 1: интерполяция

1. Показать, что конечные разности Δ в пределе совпадающих узлов интерполяции переходят в производные соответствующей степени (5б);
2. Вывести формулы численного дифференцирования через центральные разности по трем, четырем и пяти точкам для равноотстоящих узлов (5+5+5б); получить оценки погрешности (5+5+5б);
3. Вывести формулы для второй производной через центральные, правые и левые разности по трем точкам с оценкой погрешности (15б);
4. Вывести рекуррентные соотношения для коэффициентов интерполяционных полиномов (п. 1.3.3 "Быстрое преобразование Фурье") (10б);
5. Доказать, что матрица системы (1.82) -- пятидиагональна, симметрична, и положительно определена, как утверждается (5+5+20б)
6. Доказать формулу для коэффициентов многочлена гладкого восполнения с $p = 1$ на стр. 54 (10б).
7. Верно ли утверждение: «если $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ образуют систему Чебышёва на промежутке $[a, b]$, то сужение $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ на набор точек $\{x_j \in [a, b]\}_{j=1}^m$ линейно-независимо если m<n»? (20б);
8. Пусть есть n функций, n+1 раз непрерывно дифференцируемых на промежутке [a,b]. Доказать, что если их определитель Вронского не обращается в ноль на этом промежутке, то функции образует систему Чебышёва (30б);

Глава 2: дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Выведите формулу коррекции метода Милна интегрированием соответствующей интерполяционной формулы (20б);
2. Выведите формулы прогноза и коррекции метода Адамса-Башфорта (А.-Башфорта и А.-Мултона 4 порядка) интегрированием соответствующих интерполяционных формул (15+15б);
3. Вывести формулу коррекции метода Хэмминга (30б); (см Butcher, Hamming).
4. Найдите погрешность трехдиагональной системы (2.28) (10б);

Уравнения мат. физики

5. Постройте дискретный аналог оператора Лапласа на треугольной решетке, 7 узлов (2.5.3.3) (15б);
6. Постройте дискретный аналог оператора ($\partial_x^4+2\partial_x^2\partial_y^2+\partial_y^4$) на квадратной решетке, 13 узлов (2.5.3.3) (20б);

Глава 3: ортогональные полиномы

Функциональные пространства

1. Покажите, что пространство $C^2[a,b]$ вещественных непрерывных функций на промежутке с квадратичным скалярным произведением образует евклидово пространство (5б);
2. Покажите, что пространство вещественных непрерывных функций на промежутке с нормой $\|f\| = max|f(x)|$ является нормированным, но не евклидовым (10б);
3. Докажите непрерывность сложения и умножения на число в метрическом пространстве (10б);
4. Покажите, что если метрика удовлетворяет неравенству параллелограмма, то она индуцирует норму и скалярное произведение, и наоборот (5б);
5. Покажите, что равномерная метрика $\rho(f-g) = max|f-g|$ в пространстве непрерывных действительных функций, определенных на $[a,b]$, удовлетворяет аксиомам метрики и индуцирует норму (5б); что это пространство полно (15б);
6. Докажите, что множество полиномов с рациональными коэффициентами счетно (20б);
7. Покажите, что если множество А плотно в метрическом пространстве R, то оно плотно и в пополнении $R^\star$ (10б);
8. Покажите, что вторая аппроксимационная теорема Вейерштрасса следует из первой (40б)
9. Докажите, что последовательность функций φ_i параграфа 2.1.10 «Пространство L^2» фундаментальна в квадратичной метрике (20б);

Ортогональные полиномы

10. Докажите теорему Фаварда (40б);
11. Выведите выражение для полиномов второго рода через первого (30б);
12. Выведите коэффициенты уравнения для полиномов Якоби через $\alpha, \beta, n.$ (10б);
13. Выведите коэффициенты рекуррентных соотношений для полиномов Эрмита (20б); Лагерра (20б); Чебышева II рода (15б);

Численное интегрирование

14. Вывести формулы Ньютона-Котса для n=3,4,5 (5+10+15б);
15. Вывести погрешность формул Ньютона-Котса для n=3 и 5 интегрированием ошибки формулы Лагранжа (5+10б); для n=4 (10б).
16. Докажите формулы для узлов и весов квадратурной формулы Гаусса через матрицу Якоби (алгоритм Голуба-Уэлша) (25+25б);

Интегральные уравнения

17. Показать, что линейный оператор в бесконечномерном пространстве непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен (15б);
18. Показать, что гильбертов кирпич компактен (25б);
19. Показать, что произведение и линейная комбинация компактных операторов – компактны (20б);
20. Разобраться в доказательстве теоремы Гильберта-Шмидта о спектре компактного эрмитового оператора (3.3.5) (50б);
21. Доказать теорему о сходимости метода замены ядра на вырожденное п.4.3.7 (30б); (см. Березин Жидков)

22. Доказать теорему о сходимости метода последовательных приближений п. 4.4 (30б); (там же)
23. Доказать теоремы Фредгольма исходя из возможности представления компактного оператора как предела последовательности компактных (50б);