Лекция №13

Макроскопическая теория поляритонов

При исследовании поперечных оптических фононов в предыдущей лекции мы учитывали только статическое кулоновское взаимодействия между ионами. Запаздывающее взаимодействие переносится поперечными электромагнитными волнами, которые порождаются при поперечных оптических колебаниях ионов. Взаимодействие квантов свободного электромагнитного поля – фотонов и фононов поперечных оптических колебаний велико, когда их энергия и волновые векторы почти равны. В этих условиях стационарным состояниям кристалла отвечает «смесь» фононов и фотонов. Эти новые элементарные возбуждения получили название **поляритонов.**

Макроскопическая теория поляритонов в изотропных средах может быть развита, если при исследовании поперечных ионов в уравнениях сохранить поперечное электромагнитное поле:

$$\ddot{\xi}_t + \Omega^2 \xi_t = \gamma_1 \mathbf{E}_t, \qquad \gamma_1 = \Omega_t \sqrt{\left(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty\right)/4\pi}, \tag{1}$$

$$\mathbf{P}_t = \gamma_1 \xi_t + \gamma_2 \mathbf{E}_t, \qquad \gamma_{22} = \frac{\varepsilon_\infty - 1}{4\pi} \tag{2}$$

и дополнить их уравнениями Максвелла

$$rot\mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(\dot{\mathbf{E}}_t + 4\pi \dot{\mathbf{P}}_t\right), rot\mathbf{E}_t = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{H}}, \tag{3}$$

$$div\mathbf{H} = 0,\ div\left(\mathbf{E}_t + 4\pi \mathbf{P}_t\right) = 0, \tag{4}$$

связывающими поперечные поля $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{H}$ с поперечной удельной поляризуемостью. Для поперечных полей уравнения (4) удовлетворяются автоматически. Решение системы уравнений (1) – (4) будем искать в виде:

$$\frac{E_x}{E_{x0}} = \frac{P_x}{P_{x0}} = \frac{\xi_x}{\xi_{x0}} = \frac{H_y}{H_{y0}} = \exp\left[i\left(kz - \omega t\right)\right],$$

тогда получим систему уравнений

$$\left(\Omega_T^2-\omega^2\right)\xi_x-\gamma_1 E_x=0, \qquad kE_x=\frac{\omega}{c}H_y,$$

$$P_x=\gamma_1\xi_x+\gamma_2 E_x, \qquad kH_y=\frac{\omega}{c}\left(E_x+4\pi P_x\right).$$

Условие нетривиальной разрешимости этой системы сводится к равенству:

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2}=4\pi\left(\gamma_2+\frac{\gamma_1^2}{\Omega_t^2-\omega^2}\right).$$

Подставляя значения γ_1, γ_2 и вспоминая, что

$$\Omega_l=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty}}\Omega_t, \tag{5}$$

дисперсионное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2}=\frac{\varepsilon_\infty\left(\Omega_l^2-\omega^2\right)}{\left(\Omega_t^2-\omega^2\right)}. \tag{6}$$

Правая часть этого уравнения совпадает с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ кристалла, вычисленной без учета запаздывания взаимодействия (см. предыдущую лекцию)

$$\varepsilon\left(\omega\right)=\varepsilon_\infty+\frac{\left(\varepsilon_0-\varepsilon_\infty\right)}{\Omega_t^2-\omega^2}\Omega_t^2=\frac{\varepsilon_\infty\left(\Omega_l^2-\omega^2\right)}{\Omega_t^2-\omega^2}.$$

Уравнение (6) позволяет вычислить значение волнового вектора $\mathbf{k}$ как функции заданной вещественной частоты. С другой стороны, решая уравнение относительно ω, можно определить частоту новых элементарных возбуждений – поляритонов как функцию вещественного волнового вектора $\mathbf{k}$. Относительно ω уравнение (6) четвертого порядка:

$$\varepsilon_\infty\omega^4-\omega^2\left(\varepsilon_\infty\Omega_l^2+k^2c^2\right)+k^2c^2\Omega_t^2=0.$$

Если учесть равенство (5), его решение можно записать в виде

$$2\varepsilon_\infty \omega_{1,2}^2 = \Omega_t^2 \varepsilon_0 \pm \sqrt{\left(\Omega_t^2 \varepsilon_0 + c^2 k^2\right)^2 - 4\Omega_t^2 c^2 k^2 \varepsilon_\infty} \,. \qquad (7)$$

При малых значения $\mathbf{k}$ два решения (7) принимают вид

$$(-)\ldots\omega_1^2\left(k\right) = \frac{c^2 k^2}{\varepsilon_0}, \qquad (8)$$

$$(+)\ldots\omega_2^2\left(k\right) = \Omega_t^2 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty} + \frac{c^2 k^2}{\varepsilon_\infty} \equiv \Omega_l^2 + \frac{c^2 k^2}{\varepsilon_\infty}.$$

При больших значениях k $\left(k \gg \Omega \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c}\right)$ еще удовлетворяющих макроскопическому описанию $\left(ka \ll 1\right)$

$$\omega_2^2\left(k\right) = \frac{c^2 k^2}{\varepsilon_0},$$

$$\omega_1^2 = \Omega_t^2.$$

Таким образом, имеются две ветви элементарных возбуждений (**поляритонов**): первая ветвь с частотами в интервале $0 \le \omega_1\left(k\right) \le \Omega_t$, и вторая ветвь с частотами в интервале $\Omega_t \le \omega_2\left(k\right) < \infty$. При больших значениях k возбуждения первой ветви совпадают с поперечными фононами, а возбуждения второй ветви – с фотонами в среде с диэлектрической проницаемостью ε_∞. Однако в окрестности значений $k = \Omega \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{c}$ поляритоны представляют собойвесьма сложную смесь фотонов и фононов. Таким образом, поляритонные возбуждения являются не чем иным, как стационарными электромагнитными волнами внутри кристалла. Энергия этих волн естественным образом и энергию поляризационных колебаний кристалла.

В области прозрачности кристалла поляритоны (больших длин волн) тождественно совпадают с фотонами в кристалле, так как отличаются от свободных фотонов той же частоты только меньшей в $n = \sqrt{\varepsilon_0}$ раз длиной волны. Первая поляритонная ветвь описывает фотоны с частотами, меньшими Ω_t, а вторая ветвь – фотоны с частотами, превышающими Ω_t.

1) В рассмотренном нами случае не учитывалась дисперсия поперечных фононов. Поэтому и утверждалось, что найденные нами поляритонные ветви справедливы только в области прозрачности кристалла. При учете конечного времени жизни поперечных фононов (учет дисперсии!) и поляритонные состояния будут обладать конечным временем жизни. 2) Макроскопическая диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon\left(\omega\right)=\varepsilon_{\infty}+\frac{\left(\varepsilon_{0}-\varepsilon_{\infty}\right)}{\Omega_{t}^{2}-\omega^{2}}\Omega_{t}^{2}=\frac{\varepsilon_{\infty}\left(\Omega_{l}^{2}-\omega^{2}\right)}{\Omega_{t}^{2}-\omega^{2}}. \tag{9}$$

определена только для кристаллов достаточно больших размеров по сравнению с длиной волны электромагнитного излучения. Поэтому о поляритонных состояниях можно говорить только в случае кристаллов, размеры которых велики по сравнению с длиной волны излучения. 3). В предыдущих рассуждения предполагалось, что электромагнитное поле находится внутри кристалла и не покидает его. Это справедливо только для кристаллов, окруженных идеальными зеркалами, или имеющих бесконечные размеры. Из кристаллов конечных размеров электромагнитное поле излучается. Это приводит к дополнительному сокращению времени жизни полчритонов.