Лекция №19

Спиновые волны в антиферромагнетике

Одним из примеров двухподрешеточного антиферромагнетика является кубический кристалл $RbMnF_3$ с температурой Нееля, равной $82{,}5K$. Поле анизотропии в этом кристалле направлено вдоль оси третьего порядка и весьма мало ($\sim 4э$) по сравнению с обменным взаимодействием ($\sim 8{,}9\cdot 10^5 э$).

В качестве теоретической модели антиферромагнетика рассмотрим кристалл, составленный из двух подрешеток A и B, вставленных друг в друга так, что у каждого иона подрешетки A все ближайшие соседи являются ионы подрешетки B и наоборот. Магнитные моменты $\mu_0 S$ и спины S ионов A и B одинаковы. В основном состоянии без внешнего магнитного поля каждая из подрешеток намагничена до насыщения, а суммарные магнитные моменты подрешеток направлены в противоположные стороны. Следовательно, в основном состоянии, которое описывается вектором состояния $|0\rangle$

$$\hat{S}^{A}_{\mathbf{n}z}|0\rangle = S|0\rangle, \qquad \hat{S}^{B}_{\mathbf{n}z}|0\rangle = -S|0\rangle. \tag{1}$$

Оператор Гамильтона антиферромагнетика можно записать в виде

$$\hat{H} = -\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\mathbf{n}\neq\mathbf{m}} J_{\alpha,\beta}(\mathbf{n}-\mathbf{m})\hat{S}^{(\alpha)}_{\mathbf{n}}\hat{S}^{(\beta)}_{\mathbf{m}} - \mu_0\sum_{\mathbf{n},\alpha} B\hat{S}^{(\alpha)}_{\mathbf{n},\alpha}, \tag{2}$$

где α, β - пробегают два значения A и B, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ - векторы решетки; B - магнитное поле в кристалле. Произведение операторов $\hat{S}^{(\alpha)}_{\mathbf{n}}\hat{S}^{(\beta)}_{\mathbf{m}}$ может быть представлено в виде

$$\hat{S}^{(\alpha)}_{\mathbf{n}}\hat{S}^{(\beta)}_{\mathbf{m}} = \hat{S}^{(\alpha)}_{\mathbf{n},z}\hat{S}^{(\beta)}_{\mathbf{m},z} + \frac{1}{2}\left(\hat{S}^{-(\alpha)}_{\mathbf{n}}\hat{S}^{+(\beta)}_{\mathbf{m}} + \hat{S}^{-(\beta)}_{\mathbf{m}}\hat{S}^{+(\alpha)}_{\mathbf{n}}\right), \tag{3}$$

где операторы $\hat{S}^{\pm(\alpha)}_{\mathbf{n}}$ определяются, как и раньше, выражениями

$$\hat{S}^{\pm(\alpha)}_{\mathbf{n}} = \hat{S}^{(\alpha)}_{\mathbf{n},x} \pm i\hat{S}^{(\alpha)}_{\mathbf{n},y}. \tag{4}$$

Обменные интегралы $J_{\alpha,\beta}(\mathbf{n}-\mathbf{m})$ должны удовлетворять неравенствам

$$J_{A,A}(\mathbf{n}-\mathbf{m}) = J_{B,B}(\mathbf{n}-\mathbf{m}) > 0, \quad J_{A,B}(\mathbf{n}-\mathbf{m}) < 0. \tag{5}$$

В соответствии с методом Голдстейна – Примакова переход от спиновых операторов к операторам рождения и уничтожения спиновых возбуждений $\hat{A}_{\mathbf{n}}^{+}, \hat{A}_{\mathbf{n}}, \hat{B}_{\mathbf{n}}^{+}, \hat{B}_{\mathbf{n}}$, действующих в пространстве чисел заполнения, должен происходить согласно формулам

$$\hat{S}_{\mathbf{n}}^{-(A)} = \hat{A}_{\mathbf{n}}^{+}\sqrt{2S - \hat{A}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{A}_{\mathbf{n}}}, \quad \hat{S}_{\mathbf{n}}^{+(A)} = \sqrt{2S - \hat{A}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{A}_{\mathbf{n}}}\,\hat{A}_{\mathbf{n}}, \quad \hat{S}_{\mathbf{n},z}^{(A)} = S - \hat{A}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{A}_{\mathbf{n}}, \tag{6}$$

$$\hat{S}_{\mathbf{n}}^{-(B)} = \hat{B}_{\mathbf{n}}^{+}\sqrt{2S - \hat{B}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{B}_{\mathbf{n}}}, \quad \hat{S}_{\mathbf{n}}^{+(B)} = \sqrt{2S - \hat{B}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{B}_{\mathbf{n}}}\,\hat{B}_{\mathbf{n}}, \quad \hat{S}_{\mathbf{n},z}^{(B)} = S - \hat{B}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{B}_{\mathbf{n}}.$$

Операторы $\hat{A}_{\mathbf{n}}^{+}, \hat{A}_{\mathbf{n}}, \hat{B}_{\mathbf{n}}^{+}, \hat{B}_{\mathbf{n}}$ должны удовлетворять коммутационным соотношениям

$$\left[\hat{A}_{\mathbf{n}}, \hat{A}_{\mathbf{m}}^{+}\right] = \delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}}, \quad \left[\hat{B}_{\mathbf{n}}, \hat{B}_{\mathbf{m}}^{+}\right] = \delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}}, \quad \left[\hat{A}_{\mathbf{n}}, \hat{B}_{\mathbf{m}}^{+}\right] = \left[\hat{A}_{\mathbf{n}}, \hat{B}_{\mathbf{m}}\right] = 0.$$

При малых возбуждениях в главном приближении, как это делалось нами и ранее, из (6) имеем

$$\hat{S}_{\mathbf{n}}^{-(A)} = \sqrt{2S}\,\hat{A}_{\mathbf{n}}^{+}, \quad \hat{S}_{\mathbf{n}}^{+(A)} = \sqrt{2S}\,\hat{A}_{\mathbf{n}}, \quad \hat{S}_{\mathbf{n},z}^{(A)} = S - \hat{A}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{A}_{\mathbf{n}}, \tag{7}$$

$$\hat{S}_{\mathbf{n}}^{-(B)} = \sqrt{2S}\,\hat{B}_{\mathbf{n}}^{+}, \quad \hat{S}_{\mathbf{n}}^{+(B)} = \sqrt{2S}\,\hat{B}_{\mathbf{n}}, \quad \hat{S}_{\mathbf{n},z}^{(B)} = S - \hat{B}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{B}_{\mathbf{n}}.$$

С помощью этих формул выписанный выше гамильтониан преобразуется к виду

$$\hat{H} = E_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \tag{8}$$

где

$$E_0 = SN\left[L_{AA}(0) - \frac{1}{2}L_{AB}(0)\right],$$

$$L_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = S\sum_{\mathbf{n}\neq 0} J_{\alpha\beta}(\mathbf{n})\exp(i\mathbf{k}\mathbf{n}), \quad \alpha,\beta = A,B,$$

$$\hat{H}_1 = \sum_{\mathbf{n}}\left(G_{+}\hat{A}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{A}_{\mathbf{n}} + G_{-}\hat{B}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{B}_{\mathbf{n}}\right) -$$

$$-S\sum_{\mathbf{n}\neq\mathbf{m}}\left[J_{AA}(\mathbf{n}-\mathbf{m})\left(\hat{A}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{A}_{\mathbf{m}} + \hat{B}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{B}_{\mathbf{m}}\right) - \frac{1}{2}J_{AB}(\mathbf{n}-\mathbf{m})\left(\hat{A}_{\mathbf{n}}^{+}\hat{B}_{\mathbf{m}}^{+} + \hat{A}_{\mathbf{n}}\hat{B}_{\mathbf{m}}\right)\right],$$

$$G_{\pm} = L_{AA}(0) \pm \mu_0 B - L_{AB}(0).$$

Оператор $\hat{H}_2$ содержит более высокие степени бозонных операторов и в настоящий момент нами не выписывается.

Перейдем теперь в полученном гамильтониане $\hat{H}_1$ к бозонным операторам коллективных возбуждений $\hat{A}^{+}_{\mathbf{k}}, \hat{A}_{\mathbf{k}}, \hat{B}^{+}_{\mathbf{k}}, \hat{B}_{\mathbf{k}}$ с помощью не раз уже рассматриваемых нами канонических преобразований

$$\hat{A}_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{A}_{\mathbf{k}} \exp\left(i\mathbf{kn}\right), \quad \hat{B}_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_{\mathbf{k}} \exp\left(i\mathbf{kn}\right), \tag{9}$$

где $\mathbf{k}$ - волновые векторы в первой зоне Бриллюэна, операторы $\hat{A}^{+}_{\mathbf{k}}, \hat{A}_{\mathbf{k}}, \hat{B}^{+}_{\mathbf{k}}, \hat{B}_{\mathbf{k}}$ удовлетворяют в соответствии с (6) перестановочным соотношениям

$$\left[\hat{A}_{\mathbf{k}}, \hat{A}^{+}_{\mathbf{q}}\right] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}}, \quad \left[\hat{B}_{\mathbf{k}}, \hat{B}^{+}_{\mathbf{q}}\right] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}}, \quad \left[\hat{A}_{\mathbf{k}}, \hat{B}^{+}_{\mathbf{q}}\right] = \left[\hat{A}_{\mathbf{n}}, \hat{B}_{\mathbf{m}}\right] = 0.$$

В результате этого преобразования получим

$$\hat{H}_1 = \sum_{\mathbf{k}} \hat{H}_{\mathbf{k}}, \tag{10}$$

где

$$\hat{H}_{\mathbf{k}} = \alpha(\mathbf{k}) \hat{A}^{+}_{\mathbf{k}} \hat{A}_{\mathbf{k}} + \beta(\mathbf{k}) \hat{B}^{+}_{-\mathbf{k}} \hat{B}_{-\mathbf{k}} + \gamma(\mathbf{k}) \left(\hat{A}^{+}_{\mathbf{k}} \hat{B}^{+}_{-\mathbf{k}} + \hat{A}_{\mathbf{k}} \hat{B}_{-\mathbf{k}} \right),$$

$$\alpha(\mathbf{k}) = \alpha(-\mathbf{k}) = L_{AA}(0) - L_{AA}(\mathbf{k}) + \mu_0 B + \gamma(0),$$

$$\beta(\mathbf{k}) = \beta(-\mathbf{k}) = L_{AA}(0) - L_{AA}(\mathbf{k}) - \mu_0 B + \gamma(0),$$

$$\gamma(\mathbf{k}) = \gamma(-\mathbf{k}) = -\frac{1}{2} L_{AB}(\mathbf{k}).$$

Полученный гамильтониан по-прежнему недиагональный. А нам, как мы знаем, для введения газа квазичастиц надо сделать его диагональным

$$\hat{H}_{\mathbf{k}} = \varepsilon_0(\mathbf{k}) + \sum_{l} \varepsilon_l(\mathbf{k}) \hat{\mu}^{+}_l(\mathbf{k}) \hat{\mu}_l(\mathbf{k}), \quad l = 1,2. \tag{11}$$

С этой целью введем новые канонические преобразования от операторов $\hat{A}^{+}_{\mathbf{k}}, \hat{A}_{\mathbf{k}}, \hat{B}^{+}_{\mathbf{k}}, \hat{B}_{\mathbf{k}}$ к операторам $\hat{\mu}^{+}_l(\mathbf{k}), \hat{\mu}_l(\mathbf{k})$ формулами

$$\hat{\mu}_1(\mathbf{k}) = \hat{A}_{\mathbf{k}} ch\phi(\mathbf{k}) + \hat{B}^{+}_{-\mathbf{k}} sh\phi(\mathbf{k}), \quad (12)$$

$$\hat{\mu}_2(\mathbf{k}) = \hat{A}^{+}_{\mathbf{k}} sh\phi(\mathbf{k}) + \hat{B}_{-\mathbf{k}} ch\phi(\mathbf{k}),$$

где $sh\phi(\mathbf{k}),\ \ ch\phi(\mathbf{k})$ - гиперболические функции некоторой величины $\phi(\mathbf{k})$, которая в процессе диагонализации подлежит определению. Введенное нами преобразование при любом $\phi(\mathbf{k})$ является унитарным, следовательно, введенные нами операторы $\hat{\mu}^{+}_{l}(\mathbf{k}), \hat{\mu}_{l}(\mathbf{k})$ удовлетворяют бозевским перестановочным соотношениям

$$\left[\hat{\mu}_l(\mathbf{k}), \hat{\mu}^{+}_{l'}(\mathbf{k}')\right] = \delta_{ll'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}.$$

Величина $\phi(\mathbf{k})$ определяется из условия, чтобы исходный гамильтониан принял диагональную форму (11). Из (11), (12) следует

$$\left[\hat{\mu}_1(\mathbf{k}), \hat{H}_{\mathbf{k}}\right] = \varepsilon_1(\mathbf{k})\hat{\mu}_1(\mathbf{k}) = \varepsilon_1(\mathbf{k})\left(\hat{A}_{\mathbf{k}} ch\phi(\mathbf{k}) + \hat{B}^{+}_{-\mathbf{k}} sh\phi(\mathbf{k})\right).$$

С другой стороны, из (10), (12) имеем

$$\left[\hat{\mu}_1(\mathbf{k}), \hat{H}_{\mathbf{k}}\right] = \hat{A}_{\mathbf{k}}\left(\alpha(\mathbf{k}) ch\phi(\mathbf{k}) - \gamma(\mathbf{k}) sh\phi(\mathbf{k})\right) + \hat{B}^{+}_{-\mathbf{k}}\left(\gamma(\mathbf{k}) ch\phi(\mathbf{k}) - \beta(\mathbf{k}) sh\phi(\mathbf{k})\right)$$

Из сравнения двух последних равенств находим систему двух уравнений

$$\left(\varepsilon_1(\mathbf{k}) - \alpha(\mathbf{k})\right) ch\phi(\mathbf{k}) + \gamma(\mathbf{k}) sh\phi(\mathbf{k}) = 0, \quad (13)$$

$$\gamma(\mathbf{k}) ch\phi(\mathbf{k}) - \left(\varepsilon_1(\mathbf{k}) - \beta(\mathbf{k})\right) sh\phi(\mathbf{k}) = 0.$$

Из условия разрешимости этой системы уравнений получаем значение энергии элементарных возбуждений

$$\varepsilon_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\left[\alpha(\mathbf{k}) - \beta(\mathbf{k}) \pm \sqrt{\left(\alpha(\mathbf{k}) + \beta(\mathbf{k})\right)^2 - 4\gamma^2(\mathbf{k})}\right]. \quad (14)$$

Из определений следует, что

$$\alpha(\mathbf{k}) - \beta(\mathbf{k}) = 2\mu_0 B.$$

Поскольку, как уже говорилось, в антиферромагнетике $\mu_0 B$ значительно меньше обменных интегралов, то в (14) следует сохранить только знак + перед корнем:

$$\varepsilon_1(\mathbf{k})=\frac{1}{2}\left[\alpha(\mathbf{k})-\beta(\mathbf{k})+\sqrt{\left(\alpha(\mathbf{k})+\beta(\mathbf{k})\right)^2-4\gamma^2(\mathbf{k})}\right]. \quad (14a)$$

Проводя далее аналогичные вычисления для $\left[\hat{\mu}_2(\mathbf{k}),\hat{H}_{\mathbf{k}}\right]$, получим выражение для $\varepsilon_2(\mathbf{k})$:

$$\varepsilon_2(\mathbf{k})=\frac{1}{2}\left[\beta(\mathbf{k})-\alpha(\mathbf{k})+\sqrt{\left(\alpha(\mathbf{k})+\beta(\mathbf{k})\right)^2-4\gamma^2(\mathbf{k})}\right]. \quad (15)$$

При отсутствии магнитного поля оба найденные решения совпадают

$$\varepsilon_1(\mathbf{k})=\varepsilon_2(\mathbf{k})=\sqrt{\alpha^2(\mathbf{k})-\gamma^2(\mathbf{k})}\,. \quad (16)$$

В области малых значений волновых векторов $\mathbf{k}$ ($ka\ll 1$) в изотропном кристалле можно использовать приближенные выражения

$$\gamma(\mathbf{k})=\gamma(0)-l_{12}\mathbf{k}^2, \quad \frac{1}{2}\left(\alpha(\mathbf{k})+\beta(\mathbf{k})\right)=\gamma(0)-l_{11}\mathbf{k}^2, \quad (17)$$

$$l_{11}=\frac{1}{2}S\sum_{\mathbf{n}}\mathbf{n}^2J_{AA}(\mathbf{n}), \quad l_{12}=-\frac{1}{2}S\sum_{\mathbf{n}}\mathbf{n}^2J_{AB}(\mathbf{n}).$$

При получении последних выражений необходимо воспользоваться разложением величин $L_{\alpha\beta}(\mathbf{k}),\quad \alpha,\beta=A,B$

$$L_{\alpha\beta}(\mathbf{k})=S\sum_{\mathbf{n}\neq 0}J_{\alpha\beta}(\mathbf{n})\exp(i\mathbf{kn}), \quad \alpha,\beta=A,B$$

в ряд по малым $\mathbf{k}$ ($ka\ll 1$), учитывая разложение экспоненты $\exp(i\mathbf{kn})$:

$$\exp(i\mathbf{kn})\approx 1+i\mathbf{kn}-\frac{1}{2}(\mathbf{kn})^2+\ldots$$

и заметив, что вследствие $J_{AA}(\mathbf{n})=J_{AA}(-\mathbf{n}),\quad J_{AB}(\mathbf{n})=J_{AB}(-\mathbf{n})$

$$\sum_{\mathbf{n}\neq 0}\mathbf{n}J_{AA}(\mathbf{n})=0, \quad \sum_{\mathbf{n}\neq 0}\mathbf{n}J_{AB}(\mathbf{n})=0.$$

Подставляя разложение (17) в формулы (14a), (15), получим

$$\varepsilon_1(\mathbf{k})=\varepsilon_2(\mathbf{k})=\pm\mu_0B+k\sqrt{\gamma(0)\left(l_{11}+l_{12}\right)}\,. \quad (18)$$

Следовательно, энергия длинноволновых магнонов в антиферромагнетиках линейно зависит от волнового вектора. Такая же зависимость характерна и для акустических фононов. Поэтому магноны антиферромагнетика вносят в теплоемкость кристаллов при низких температурах вклад, также как и фононы, пропорциональный третьей степени температуры. Напомним, что в ферромагнетиках спектр магнонов квадратичен по волновому вектору, что приводило к вкладу в теплоемкость ферромагнетика, пропорциональному $\Theta^{3/2}$. Это давало возможность отделить в теплоемкости ферромагнетика вклад магнонов от вклада фононов, и вычислить некоторые характеристики магнонов, например, эффективную их массу.

Величину $\phi(\mathbf{k})$ во введенном нами каноническом преобразовании можно вычислить, если первое из уравнений (13) умножить на $sh\phi(\mathbf{k})$, а второе – на $ch\phi(\mathbf{k})$, после чего из этих уравнений получим

$$\frac{2\gamma(\mathbf{k})}{\alpha(\mathbf{k})+\beta(\mathbf{k})}=\frac{2ch\phi sh\phi}{ch^2\phi+sh^2\phi}=th2\phi. \qquad (19)$$

Значение этой величины требуется для определения энергии $\varepsilon_0(\mathbf{k})$ в (11). После некоторых достаточно громоздких, но простых вычислений для случая $B=0$ (в этом случае $\varepsilon_1(\mathbf{k})=\varepsilon_2(\mathbf{k})=\varepsilon(\mathbf{k})$) можно прийти к следующему выражению

$$\varepsilon_0(\mathbf{k})=-2\varepsilon(\mathbf{k})sh^2\phi(\mathbf{k}),$$

После чего выражение для $\hat{H}_{\mathbf{k}}$ обретает уж совсем простой вид

$$\hat{H}_{\mathbf{k}}=\varepsilon(\mathbf{k})\sum_l\left(\hat{\mu}_l^+(\mathbf{k})\hat{\mu}_l(\mathbf{k})-sh^2\phi(\mathbf{k})\right),\quad l=1,2. \qquad (20)$$

Обратное каноническое преобразование имеет вид

$$\hat{A}_{\mathbf{k}}=\hat{\mu}_1(\mathbf{k})ch\phi(\mathbf{k})-\hat{\mu}_2^+(\mathbf{k})sh\phi(\mathbf{k}),$$
$$\hat{B}_{-\mathbf{k}}^+=\hat{\mu}_2^+(\mathbf{k})ch\phi(\mathbf{k})-\hat{\mu}_1(\mathbf{k})sh\phi(\mathbf{k}).$$

Эти формулы дают возможность вычислять средние значения физических величин, относящихся к разным подрешеткам. В качестве примера вичислим зависимость среднего значения магнитного момента подрешетки A от температуры

$$M_A(\Theta)=\mu_0\sum_{\mathbf{n}}\left\langle\hat{S}_{\mathbf{n}z}^A\right\rangle=\mu_0 SN\left(1-\frac{1}{SN}\sum_{\mathbf{n}}\left\langle\hat{A}_{\mathbf{n}}^+\hat{A}_{\mathbf{n}}\right\rangle\right).$$

Подставив в эту формулу значения операторов $\hat{A}^{+}_{\mathbf{n}}, \hat{A}_{\mathbf{n}}$ через операторы $\hat{\mu}_1(\mathbf{k}), \hat{\mu}^{+}_1(\mathbf{k})$ из предыдущих формул, находим

$$\sum_{\mathbf{n}} \left\langle \hat{A}^{+}_{\mathbf{n}} \hat{A}_{\mathbf{n}} \right\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(\frac{1}{2} + \left\langle \hat{\mu}^{+}_1(\mathbf{k}) \hat{\mu}_1(\mathbf{k}) \right\rangle \right) \left(ch^2\phi + sh^2\phi \right) - \frac{1}{2} \right].$$

При получении этого выражения надо учесть равенство

$$\left\langle \hat{\mu}^{+}_1(\mathbf{k}) \hat{\mu}_1(\mathbf{k}) \right\rangle = \left\langle \hat{\mu}^{+}_2(\mathbf{k}) \hat{\mu}_2(\mathbf{k}) \right\rangle.$$

При $B = 0$

полученное выше равенство упрощается, и его можно записать в виде

$$\sum_{\mathbf{n}} \left\langle \hat{A}^{+}_{\mathbf{n}} \hat{A}_{\mathbf{n}} \right\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(\frac{1}{2} + \left\langle \hat{\mu}^{+}_1(\mathbf{k}) \hat{\mu}_1(\mathbf{k}) \right\rangle \right) \frac{\alpha(\mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{k})} - \frac{1}{2} \right]. \qquad (21)$$

Здесь $\left\langle \hat{\mu}^{+}_1(\mathbf{k}) \hat{\mu}_1(\mathbf{k}) \right\rangle$ - среднее число магнонов, имеющих волновой вектор $\mathbf{k}$. При температуре Θ оно равно

$$\left\langle \hat{\mu}^{+}_1(\mathbf{k}) \hat{\mu}_1(\mathbf{k}) \right\rangle \equiv N_{\mathbf{k}} = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{\Theta} \right) - 1 \right]^{-1}$$

(функция распределения бозонов). Напомним, что число магнонов не сохраняется, следовательно, химический потенциал в последней формуле отсутствует.

Разделим выражение (21) на число элементарных ячеек N. Тем самым мы определим вероятность того, что в элементарной ячейке спин одной из подрешеток «перевернут». Например, в случае подрешетки спина, направленного вверх имеем

$$W_{\Theta}(\downarrow) \equiv \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{n}} \left\langle \hat{A}^{+}_{\mathbf{n}} \hat{A}_{\mathbf{n}} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(\frac{1}{2} + N_{\mathbf{k}} \right) \frac{\alpha(\mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{k})} - \frac{1}{2} \right]. \qquad (22)$$

Легко увидеть, что эта вероятность отлична от нуля даже при абсолютном нуле, когда среднее число магнонов $N_{\mathbf{k}}$ равно нулю:

$$W_0(\downarrow) = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{\alpha(\mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{k})} - 1 \right].$$

При $B=0$ и $ka \ll 1$

$$\frac{\alpha(\mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{k})} \approx \sqrt{\frac{\gamma_0}{l_{11}+l_{12}}}\frac{1}{k},$$

поэтому

$$W_0(\downarrow) \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma_0}{l_{11}+l_{12}}}\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{k}.$$

Переходя от суммирования к интегрированию, имеем

$$\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{k} = \begin{cases} \frac{a^3}{2\pi^2}\int\limits_0^{k_{\max}} kdk - 3D \\ \frac{a^2}{2\pi}\int\limits_0^{k_{\max}} dk - 2D \\ \frac{a}{2\pi}\int\limits_0^{k_{\max}} \frac{dk}{k} - 1D \end{cases}$$

Таким образом, для одномерного кристалла не имеется упорядоченного состояния намагниченности подрешеток, так как в этом случае вероятность $W_0(\downarrow)$ расходится.