Типы групп симметрии и некоторые их свойства

Однородность, неоднородность и дискретность пространства. Группы симметрии пространства можно разбить на типы, которые определяются по признаку однородности или неоднородности пространства и его подпространств меньшей размерности, т. е. плоскостей или прямых в трехмерном пространстве.

Понятие однородности пространства может быть сформулировано для двух случаев — бесконечного непрерывного пространства и бесконечного дискретного пространства. Примерами первого могут служить пустое евклидово пространство, анизотропное кристаллическое вещество, рассматриваемое с макроскопической точки зрения как однородная сплошная среда. Примером второго является кристаллическое вещество, рассматриваемое на микроскопическом уровне,— его атомистичность и выражается геометрическим условием дискретности.

В обоих случаях в пространстве имеется бесконечное число симметрично равных друг другу точек. Но непрерывное пространство есть континуум только таких точек: все его точки симметрично равны. В дискретном же пространстве не все точки симметрично равны.

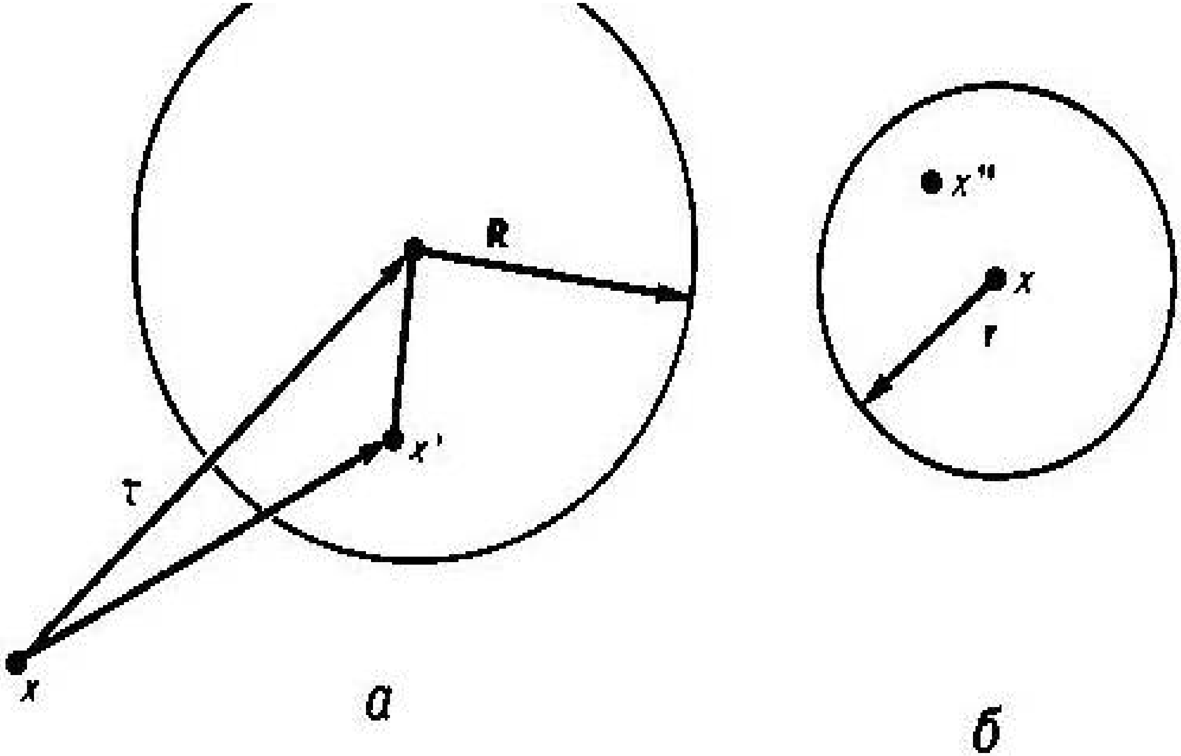
Геометрический постулат микрооднородности («дискретной однородности») может быть сформулирован следующим образом:

а) существует шар такого постоянного радиуса R, что, где бы его ни выбрать, внутри него найдется точка $\mathbf{x}'$, симметрично равная любой, наперед заданной точке пространства $\mathbf{x}$ (однородность);

б) в пространстве есть такие точки (по крайней мере одна точка $\mathbf{x}$), что вокруг них в шаре радиуса r нет ни одной симметрично равной им точки (дискретность).

Требование «а» означает, что есть операция $g\,[\mathbf{x}] = \mathbf{x}'$, удовлетворяющая условию симметрии $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}')$ (1), (2), причем

$$|\boldsymbol{\tau} - (\mathbf{x}' - \mathbf{x})| < R, \tag{52}$$



Шар однородности (а) и шар дискретности (б)

где τ — произвольный вектор (рис. [illegible], *а*): он может быть равным нулю или бесконечно малым, или сколь угодно большим и как угодно направленным. Поскольку симметрично равных точек бесконечное множество, то и операций g бесконечное множество, и поэтому $G \supseteq g$ есть группа бесконечного порядка. При этом согласно общему определению симметрии (1), (2) каждая операция g, переводящая конкретную точку $\mathbf{x}$ в $\mathbf{x}'$, переводит и любую другую точку пространства в ей симметричную, т. е. преобразует все пространство в себя.

Требование «б» записывается как

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}''| < r, \tag{53}$$

где $\mathbf{x}$ — некоторая точка, а $\mathbf{x}''$ не выводятся из $\mathbf{x}$ никакой операцией $g \in G$ (рис. 34, *б*).

Оба требования вместе могут быть переформулированы и по-иному — как требование конечности фундаментальной (независимой) области. Такая область определяется как состоящая из симметрично не равных друг другу точек (см. § 5). Тогда ее конечность — она не бесконечно мала — обеспечивает выполнение условия «б». С другой стороны, она не бесконечно велика, и, значит, вне ее есть точки, симметрично равные точкам, находящимся внутри области (условие «а»).

Поскольку внутри шара r с центром в точке $\mathbf{x}$ нет симметрично равных ей точек, то всегда

$$R > r/2. \tag{54}$$

Если взять любую точку, то в шаре R, касающемся этой точки, есть равная ей точка, и поэтому расстояние d между ближайшими равными точками

$$d < 2R. \tag{55}$$

Следовательно, любые равные точки можно соединить ломаной линией с вершинами в равных точках, звенья которой меньше $2R$.