Произведения групп. Из двух групп H и K, все элементы которых, кроме единичного $h_0 = e = k_0$, разные, можно образовывать новые группы G.

Группа $G = H \otimes K$ называется *внешним прямым произведением* H и K, если каждый элемент $g \in G$ может быть записан в виде произведения $g = hk$. Закон умножения

$$h_i g_j \otimes h_k g_l = h_i h_k g_j g_l. \tag{41}$$

Обе исходные группы являются инвариантными подгруппами, т. е. нормальными делителями возникшей группы G.

Группа $G = H \circledS K$ называется *полупрямым* произведением групп H и K, если все g могут быть выражены как $g = hk$, $kH = Hk$.

Закон умножения

$$h_i g_j \circledS h_k g_l = h_i \left(g_j h_k g_j^{-1}\right) g_j g_l. \tag{42}$$

В этом случае инвариантной подгруппой — нормальным делителем G является только подгруппа H (ее пишут в полупрямом произведении первой).

Новые группы симметрии можно получать, используя прямые или полупрямые произведения и рассматривая также подгруппы этих произведений.

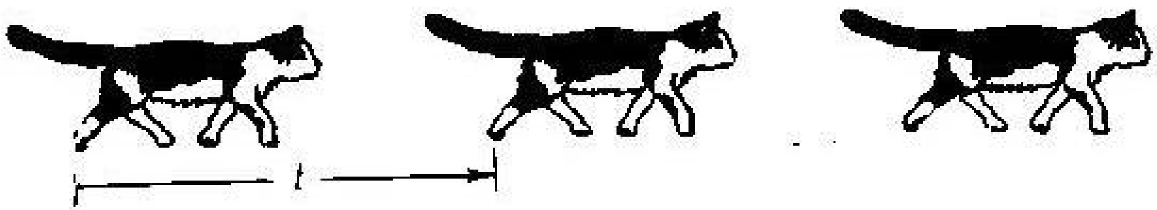
Разберем следующий пример. Возьмем на плоскости группу одномерных трансляций T_1. Эта группа — бесконечная, но может быть задана своим *базисом* $\{0, t\}$, где t — трансляция, повторение которой задает остальные элементы группы: $2t$, $3t$, . . . (рис. 33, *а*). Образуем ее полупрямое произведение с точечной группой отражения $M = \{e, m\}$, так чтобы линия отражения была параллельна оси трансляции (рис. 33, *б*). Это произведение таково:

$$G = T_1 M = \{0, t, 2t, \ldots\} \textcircled{s} \{e, m\} = \{0e, te, 2te, \ldots, 0m, tm, 2tm, \ldots\}. \tag{43}$$

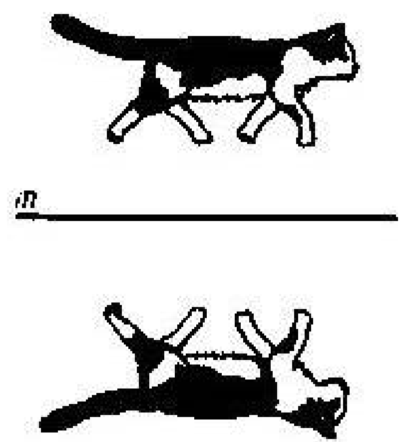
Каждую из исходных групп T_1 и M можно назвать тривиальными подгруппами (делителями) новой группы. В новой группе $T_1 \textcircled{s} M$ (рис. 33, *в*) есть новый элемент $tm = a$ — операция скользящего отражения. Оказывается, что в этой группе можно теперь выделить подгруппу, которая не совпадает с ее тривиальными подгруппами T_1 и M. Эта подгруппа такова: $A = \{0e, 2te, \ldots, 0a, 2ta, \ldots\}$ (рис. 33, *г*). Таким образом, новые операции симметрии вида $a = tm$, полученные комбинированием различных геометрических операций — элементов групп сомножителей T и M,— могут существовать самостоятельно в рамках новой группы, нетривиальной подгруппы $A \subset T_1 \textcircled{s} M$ произведения двух групп. В кристаллографии группы вида $T_1 \textcircled{s} M$, получаемые как произведения групп, называют симморфными, а их нетривиальные подгруппы вида A — несимморфными группами.

Образование произведения групп и выделение из него нетривиальной подгруппы

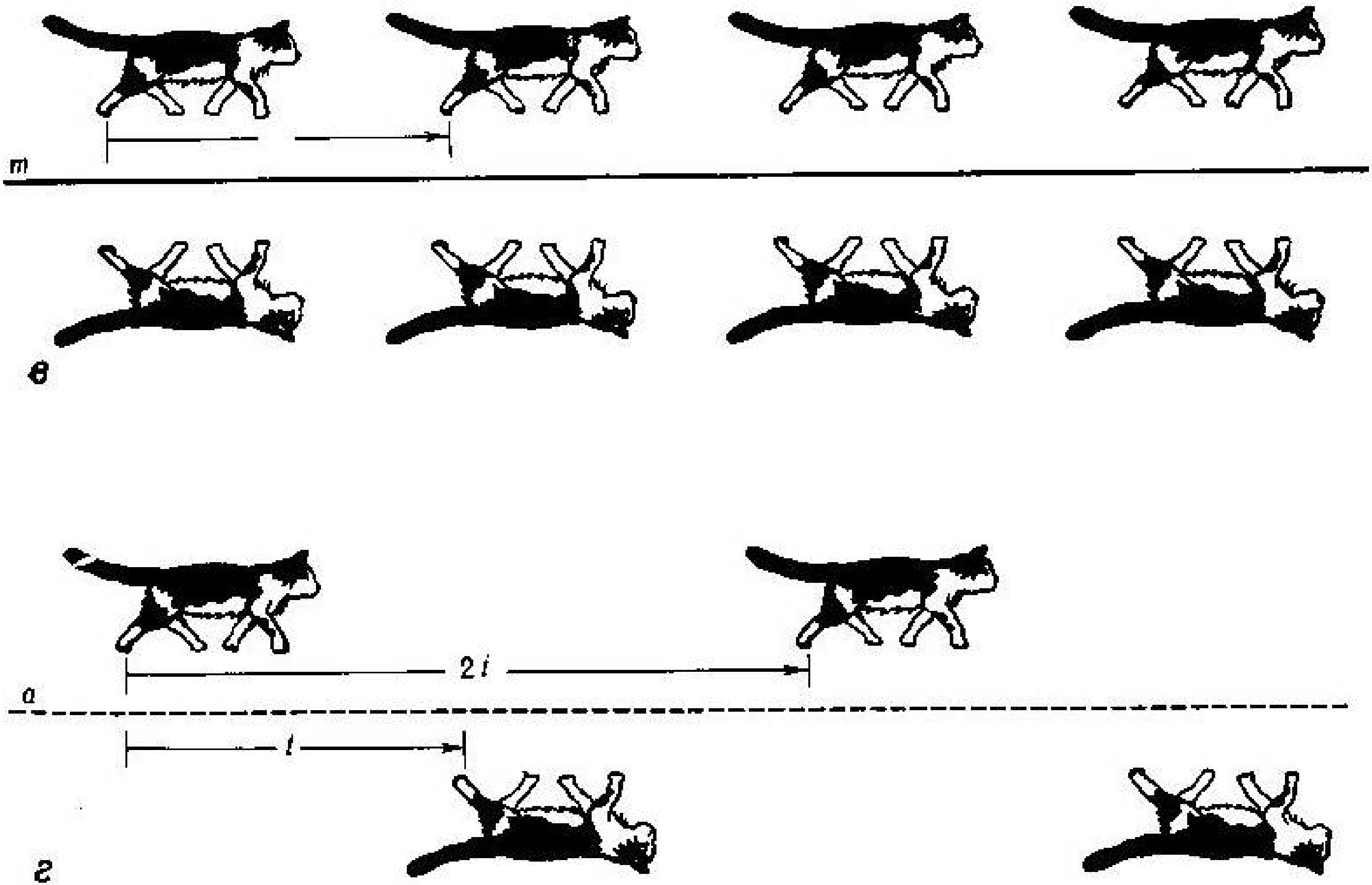
а — группа трансляций произвольной фигуры; *б* — группа отражения; *в* — их произведение (симморфная группа); *г* — нетривиальная подгруппа произведения — группа скользящего отражения (несимморфная)



а



б


т
в
2l
а
l
г