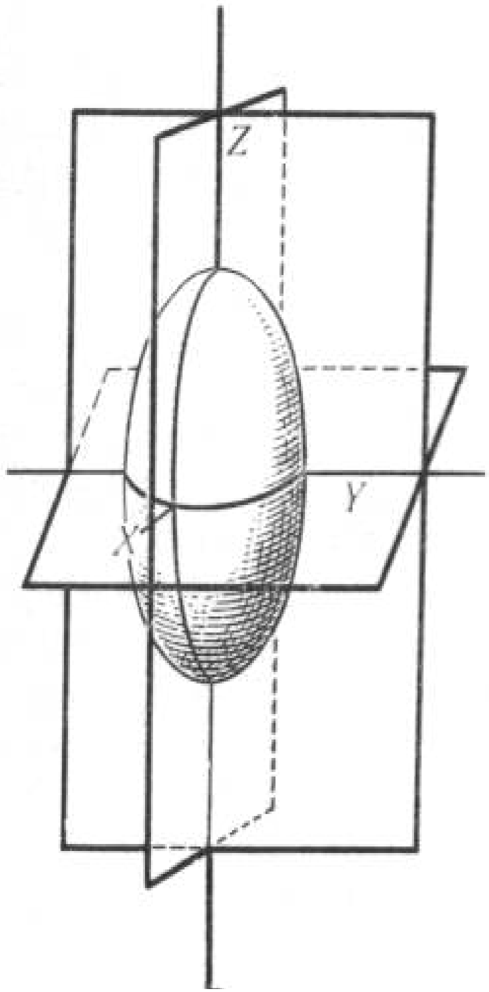
Основы теории групп

Взаимодействие операций. Рассмотрим точечную симметрию кристалла кварца, идеальная форма которого изображена на рис. 10. Фигура совмещается с собой при следующих операциях симметрии:

$$g_0 = e, \qquad g_1 = 3, \qquad g_2 = 3^2, \qquad g_3 = 2_x, \qquad g_4 = 2_y, \qquad g_5 = 2_u, \qquad (21)$$

где g_1 — поворот на угол $2\pi/3$ против часовой стрелки вокруг оси, обозначенной на рис. 10 символом 3; g_2 — поворот на угол $2\cdot 2\pi/3$ против часовой стрелки вокруг оси 3 (или, что то же самое, на $2\pi/3$ по часовой стрелке); g_3, g_4, g_5 — повороты на π вокруг осей, обозначенных символами 2_x, 2_y, 2_u на рис. 10, перпендикулярных оси 3 и расположенных под углом $2\pi/3$ друг к другу.

Последовательное выполнение двух (или нескольких) операций симметрии также является операцией симметрии, поскольку по условиям (1), (2) после первой (и каждой следующей) операции фигура не изменяется. Так, в нашем примере дважды проведенная операция g_1 эквивалентна операции g_2, что записывают как $g_1 g_1 = g_1^2 = g_2$. Аналогично $g_1 g_4 = g_3$ и т. д. (Подразумевается, что при последовательном проведении операций $g_i g_j$ первой производится операция g_j.) Операции g_1 и g_2 взаимно-обратны: $g_1 = g_2^{-1}$, операции g_3, g_4, g_5 обратны сами себе: $g_3 = g_3^{-1}$.



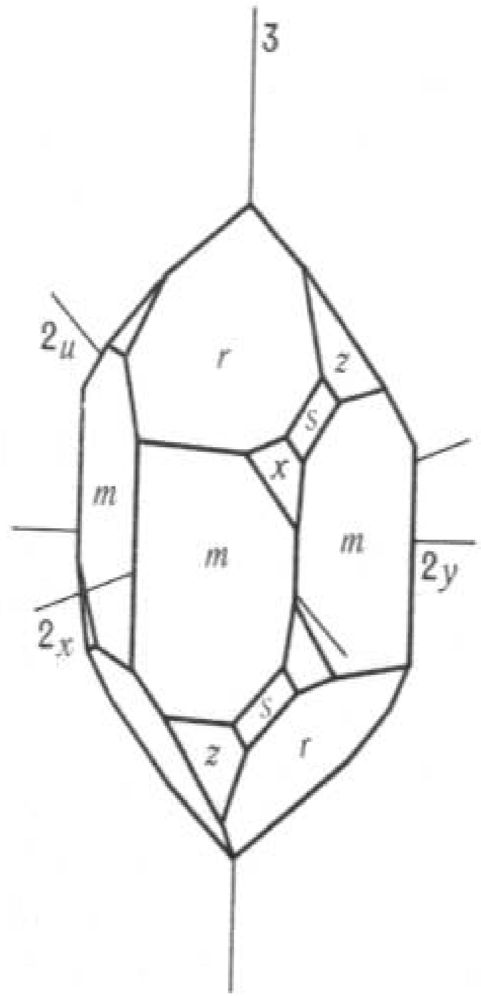


Рис. 9
Эллипсоид Френеля общего вида

Рис. 10
Идеальная форма кристалла кварца и его оси симметрии

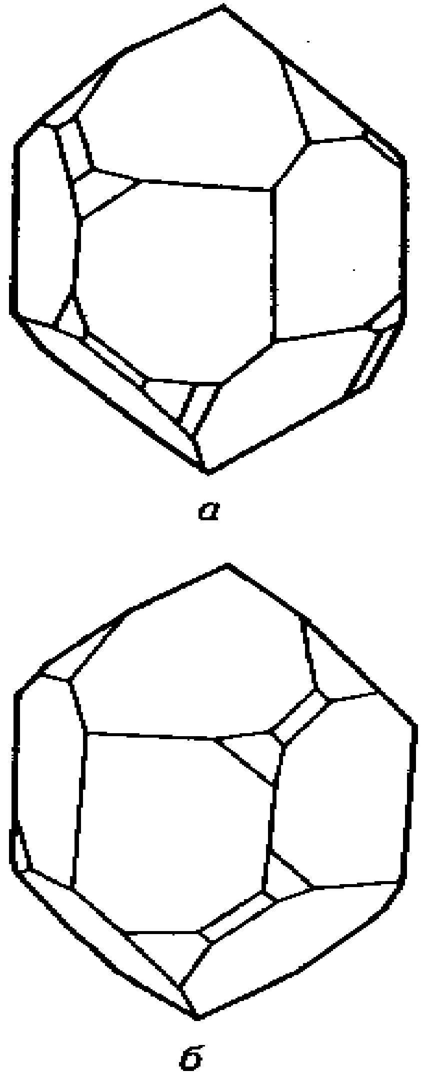


Рис. 2. Правый (*а*) и левый (*б*) кристаллы кварца.

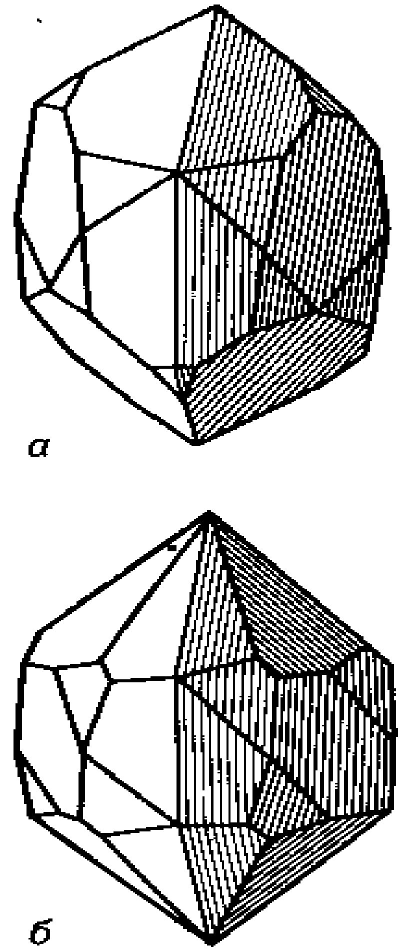


Рис. 3. Двойники кварца: бразильский (*а*) и дофинийский (*б*).

Среди операций симметрии есть и ничего не преобразовывающая операция «отождествления», или *единичная* операция $g_0 = e = 1$. Геометрически она соответствует неподвижности или повороту на 2π вокруг любой оси и присуща любому, в том числе асимметричному, объекту. Несмотря на кажущуюся на первый взгляд бесполезность операции e, она играет важную роль в формализме теории симметрии. Нетрудно понять, что проведение любой операции, а потом ей обратной эквивалентно единичной операции: $gg^{-1} = e$. К единичной операции может свестись и результат нескольких операций. В нашем примере $g_1g_2 = e$, $g_1^3 = e$, $g_4^2 = e$ и т. д. Этот и любой другой пример, так же как и рассматривавшиеся выше общие свойства симметрии, показывают, как мы сейчас увидим, что с математической точки зрения совокупность операций симметрии удовлетворяет понятию группы.

Групповые аксиомы. В математической теории множеств совокупности различного рода элементов рассматриваются исключительно с точки зрения их отношений друг к другу. Если в множестве элементов $\{g_1, g_2, \ldots\}$ выполняются четыре определенных правила (групповые аксиомы), то оно называется группой G. Групповые аксиомы формулируются так:

1) в группе G определено «групповое действие» — «умножение», так что произведение любой пары элементов $g_i \in G$ и $g_j \in G$ есть элемент g_k, также содержащийся в G:

$$g_i g_j = g_k \in G; \tag{22}$$

2) для любых элементов группы умножение ассоциативно:

$$g_i(g_j g_l) = (g_i g_j) g_l; \tag{23}$$

3) существует единичный элемент $e \in G$, такой, что для любого $g_i \in G$

$$e g_i = g_i; \tag{24}$$

4) для любого $g_i \in G$ существует обратный элемент g_i^{-1}, так что

$$g_i g_i^{-1} = e. \tag{25}$$

Из совокупности аксиом следует, что единичный элемент — единственный и $e g_i = g_i e$, а также что и обратный элемент единственный и $g_i^{-1} g_i = g_i g_i^{-1}$.

Из рассмотренных выше свойств преобразований симметрии (1), (2) и примеров следует, что их множество удовлетворяет групповым аксиомам, т. е. совокупность операций симметрии образует группу [1]. Произведение элементов группы $g_i g_j$ всегда является элементом группы, однако результат, вообще говоря, зависит от порядка умножения элементов «справа» или «слева»

$$g_i g_j \neq g_j g_i. \tag{26}$$

Применительно к операциям симметрии это означает, что если переменить порядок их выполнения, то результирующие операции могут оказаться различными. В так называемых коммутативных (или абелевых) группах результат не зависит от порядка проведения операций

$$g_i g_j = g_j g_i. \tag{27}$$

Таким образом, теория симметрии является по существу теорией групп симметрии, она широко использует математический аппарат абстрактной теории групп, но придает им конкретное геометрическое или физическое содержание.

Кристаллографические группы имеют определенные обозначения, с которыми мы подробнее ознакомимся далее. Так, группа симметрии внешней формы кварца (рис. 10) обозначается 32 (читается «три — два») или D_3.

3.3. Основные свойства групп. Кроме

Основные свойства групп. Кроме групп симметрии существуют и различные другие группы с иным конкретным смыслом элементов и операций (например, совокупность действительных чисел с групповым действием сложением, совокупности перестановок и др.). Если не указан конкретный геометрический, арифметический, физический и т. п. смысл элементов группы, то группа G называется абстрактной.

Группа может содержать один, несколько или бесконечное число отличных друг от друга элементов. Порядок группы n — это число таких элементов. Группа называется конечной, если n конечно. Так, группа $D_3 = \{g_0 = e, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$, порядок ее $n = 6$.

Очень важное понятие в теории групп — *изоморфизм*. Если между элементами двух групп можно установить взаимно-однозначное соответствие, причем такое, что произведению любых двух элементов одной из групп отвечает произведение соответствующих им элементов другой группы, то эти группы называются изоморфными. Значит, группы $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ и $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ изоморфны:

$$G \leftrightarrow H, \text{ если } g_i \leftrightarrow h_i, \quad g_j \leftrightarrow h_j, \quad g_i g_j \leftrightarrow h_i h_j. \tag{28}$$

Порядок изоморфных групп одинаков. Например, группам поворотов пространства на углы $2\pi/N$ изоморфна группа из n комплексных чисел $\exp(2\pi i n/N)$ $(0 \leqslant n \leqslant N)$, в которой групповой операцией является умножение этих комплексных чисел. Изоморфные друг другу конкретные группы являются с точки зрения теории групп реализациями одной и той же абстрактной группы. Поэтому закономерности, устанавливаемые в абстрактных группах, справедливы для всех изоморфных им конкретных групп, и именно в этом заключается обобщающее значение теории групп.

Поскольку все закономерности сводятся к закону «умножения» элементов, свойства абстрактной группы G полностью определяются ее таблицей умножения, называемой также квадратом Кели. Для конечной группы эта таблица имеет вид

	g_1	g_2	$\cdots$	g_n
g_1	g_1^2	$g_1 g_2$	$\cdots$	$g_1 g_n$
g_2	$g_2 g_1$	g_2^2	$\cdots$	$g_2 g_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
g_n	$g_n g_1$	$g_n g_2$		g_n^2

(29)

Поскольку $g_i g_j = g_l$, то таблица (29) будет задана, если будет указано, какому из элементов g_l равен каждый из n^2 элементов $g_i g_j$. Например, для группы 32 [illegible]) таблица умножения такова (вначале выполняется операция, указанная в первом столбце):

	e	3	3^2	2_x	2_y	2_u
e	e	3	3^2	2_x	2_y	2_u
3	3	3^2	e	2_y	2_u	2_x
3^2	3^2	e	3	2_u	2_x	2_y
2_x	2_x	2_u	2_y	e	3^2	3
2_y	2_y	2_x	2_u	3	e	3^2
2_u	2_u	2_y	2_x	3^2	3	e

(30)

В группах симметрии их элементы — операции имеют конкретный геометрический смысл. Как мы увидим ниже, некоторые различные группы симметрии, т. е. отличающиеся геометрически (например, у одной g_1 — отражение, а у другой — поворот на π), могут иметь одинаковую таблицу умножения, т. е. быть изоморфными.

Между двумя группами G и H может быть одностороннее соответствие, называемое *гомоморфизмом*, не столь полное, как изоморфизм (28):

$$\begin{array}{lccc} & g_{i_1} \searrow & g_{j_1} \searrow & \\ G \to H, & g_{i_2} \to h_i, & g_{j_2} \to h_j, & g_{i_s} g_{j_t} \to h_i h_j \quad (s, t = 1, \ldots, k). \\ & g_{i_k} \nearrow & g_{j_k} \nearrow & \end{array} \qquad (31)$$

Группа G по порядку больше, чем H. Одному и тому же элементу h_i сопоставляется несколько элементов $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_k}$, однако групповая операция сохраняется. Например, гомоморфным является такое отображение группы 32 (21) на группу чисел $\{1, -1\}$: $g_0, g_1, g_2 \to 1$, $g_3, g_4, g_5 \to -1$ с групповой операцией умножения этих чисел.