Подгруппа. Если среди элементов g_i $(i = 1, \ldots, n)$ группы G можно выбрать некоторое подмножество элементов g_k $(k = 1, \ldots, n_k, n_k \leqslant n)$, которое само образует группу G', т. е. удовлетворяет всем групповым аксиомам (22)—(25), то такое подмножество называют подгруппой группы G, что записывают как $G' \subset G$.

Например, в группе $32 = D_3$ (21), (30) можно выделить подгруппу 3, состоящую из трех элементов: g_0, g_1, g_2, являющуюся группой поворотов вокруг вертикальной оси на $2\pi/3$. В группе есть и другая подгруппа — поворотов 2 вокруг горизонтальной оси на π: g_0, g_3 (или g_4, или g_5).

Некоторые группы не имеют подгрупп, кроме тривиальных: группы $e \subset G$ (порядка 1) и самой себя: $G \subset G$.

Порядок подгруппы n_k является делителем порядка конечной группы n:

$$n : n_k = p, \tag{34}$$

p называют индексом подгруппы.

О группе $G \supset G'$ можно сказать, что она является надгруппой G' или что G является расширением группы G'.

3.6. К

расширением группы G'.

Классы, разложение по подгруппе. Пусть G' — подгруппа G, $G' \subset G$.
Все произведения фиксированных элементов группы g_i, не входящих в под-
группу, на элементы подгруппы $g_j' \in G'$ образуют смежные классы отно-
сительно G': правый $G'g_i$ или левый g_iG'. Например, в группе 32 (21) мож-
но взять $G' = \{g_0, g_1, g_2\}$, и тогда левый смежный класс g_3G' составят соглас-
но таблице умножения (30) элементы $\{g_3, g_4, g_5\}$.

Группу G можно *разложить по подгруппе* G', представив ее в виде объе-
динения (знак $\bigcup$) смежных классов

$$G = g_0G' \bigcup g_1G' \bigcup \ldots \bigcup g_pG'. \quad (35)$$

Эту формулу можно рассматривать и как запись *расширения* группы G' до G. Заметим, что при заданных G и G' системы представителей смежных классов $\{g_0, g_1, \ldots, g_p\}$ могут быть выбраны, вообще говоря, разным способом.

Элемент группы g_i называется сопряженным элементу g_k, если в G есть такой элемент g_j, что

$$g_k = g_j^{-1} g_i g_j. \quad (36)$$

Так, в группе 32 элементы g_3 и g_4 являются сопряженными: $g_2^{-1} g_3 g_2 = g_4$. Все элементы данной группы могут быть распределены по классам сопряженных элементов. В группе 32 имеется три класса: $\{g_0\}$, $\{g_1, g_2\}$, $\{g_3, g_4, g_5\}$.

Подгруппа H группы G называется нормальной (нормальным делителем), если элемент $h_k = g_i^{-1} h_j g_i \in H$ для любых $g_i \in G$ и h_j, $h_k \in H$, т. е. H образует класс сопряженных элементов в G:

$$H = g_i^{-1} H g_i. \tag{37}$$

В группе 32 подгруппа $\{e, g_1, g_2\}$ нормальная, а $\{e, g_3\}$ нет.

С помощью нормального делителя H группы G вводится понятие фактор-группы. Образуем смежные классы $g_i H$ $(= H g_i)$ в силу (37). Фактор-группа обозначается

$$G/H \tag{38}$$

и является группой, элементами которой служат сами смежные классы вместе с $H = g_0 H$. Таблица умножения для фактор-группы с учетом правила перемножения классов

$$(g_iH)(g_jH) = g_ig_jH \tag{39}$$

выглядит так:

$$\begin{array}{c|ccc} & g_0H & \dots & g_pH \\ \hline g_0H & g_0^2H & \dots & g_0g_pH \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ g_pH & g_pg_0H & \dots & g_p^2H \end{array} \tag{40}$$

Порядок фактор-группы равен индексу H в G. Понятие фактор-группы используется при анализе связи пространственных и точечных групп симметрии и в ряде других случаев.