Основные свойства групп. Кроме групп симметрии существуют и различные другие группы с иным конкретным смыслом элементов и операций (например, совокупность действительных чисел с групповым действием сложением, совокупности перестановок и др.). Если не указан конкретный геометрический, арифметический, физический и т. п. смысл элементов группы, то группа G называется абстрактной.

Группа может содержать один, несколько или бесконечное число отличных друг от друга элементов. Порядок группы n — это число таких элементов. Группа называется конечной, если n конечно. Так, группа $D_3 = \{g_0 = e, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$, порядок ее $n = 6$.

Очень важное понятие в теории групп — *изоморфизм*. Если между элементами двух групп можно установить взаимно-однозначное соответствие, причем такое, что произведению любых двух элементов одной из групп отвечает произведение соответствующих им элементов другой группы, то эти группы называются изоморфными. Значит, группы $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ и $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ изоморфны:

$$G \leftrightarrow H, \text{ если } g_i \leftrightarrow h_i, \quad g_j \leftrightarrow h_j, \quad g_i g_j \leftrightarrow h_i h_j. \tag{28}$$

Порядок изоморфных групп одинаков. Например, группам поворотов пространства на углы $2\pi/N$ изоморфна группа из n комплексных чисел $\exp(2\pi i n/N)$ $(0 \leqslant n \leqslant N)$, в которой групповой операцией является умножение этих комплексных чисел. Изоморфные друг другу конкретные группы являются с точки зрения теории групп реализациями одной и той же абстрактной группы. Поэтому закономерности, устанавливаемые в абстрактных группах, справедливы для всех изоморфных им конкретных групп, и именно в этом заключается обобщающее значение теории групп.

Поскольку все закономерности сводятся к закону «умножения» элементов, свойства абстрактной группы G полностью определяются ее таблицей умножения, называемой также квадратом Кели. Для конечной группы эта таблица имеет вид

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\
\hline
g_1 & g_1^2 & g_1 g_2 & \cdots & g_1 g_n \\
g_2 & g_2 g_1 & g_2^2 & \cdots & g_2 g_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
g_n & g_n g_1 & g_n g_2 & & g_n^2
\end{array}
\tag{29}
$$

Поскольку $g_i g_j = g_l$, то таблица (29) будет задана, если будет указано, какому из элементов g_l равен каждый из n^2 элементов $g_i g_j$. Например, для группы 32 [illegible]) таблица умножения такова (вначале выполняется операция, указанная в первом столбце):

	e	3	3^2	2_x	2_y	2_u
e	e	3	3^2	2_x	2_y	2_u
3	3	3^2	e	2_y	2_u	2_x
3^2	3^2	e	3	2_u	2_x	2_y
2_x	2_x	2_u	2_y	e	3^2	3
2_y	2_y	2_x	2_u	3	e	3^2
2_u	2_u	2_y	2_x	3^2	3	e

(30)

В группах симметрии их элементы — операции имеют конкретный геометрический смысл. Как мы увидим ниже, некоторые различные группы симметрии, т. е. отличающиеся геометрически (например, у одной g_1 — отражение, а у другой — поворот на π), могут иметь одинаковую таблицу умножения, т. е. быть изоморфными.

Циклические группы, генераторы. Если в группе G имеется такой элемент g, что его степени g^l исчерпывают все элементы группы, т. е.

$$G = \{g,\ g^2, \ldots, g^l, \ldots, g^n = e\}, \tag{32}$$

то такая группа называется циклической и порядок ее равен n. Таковы все группы симметрии поворотов на $2\pi/n$, обозначаемые C_n. Такой элемент g_i, степенями которого являются другие элементы группы, называется порождающим элементом, или генератором. Если группа не является циклической, то в ней можно выделить несколько элементов, степени и произведения которых дают все n элементов группы G.

Задание группы таблицей умножения наглядно, но избыточно. Пользуясь порождающими элементами и задав определяющие соотношения между ними, мы также получим полное описание группы. Для группы 32 , генераторами могут служить g_1 и любой из g_3, g_4, g_5, определяющие соотношения таковы (ср. с (30)):

$$g_1^3 = g_3^2 = (g_1 g_3)^2 = e. \tag{33}$$