Типы групп симметрии и периодичность в них. Однородное дискретное симметричное пространство описывается (r, R)-условием (52), (53) и группой G. Однако мы пока не выяснили, какие именно операции $g_i \in G$ здесь возможны и какие из них обязательны.

Ясно, что наличие трансляций совместимо с (r, R)-условием. Достаточно, чтобы наибольшая трансляция a_i была меньше $2R$ (55). Однако, как мы увидим ниже, обязательно и обратное: в группе G при (r, R)-условии всегда содержится подгруппа переносов T:

$$G_{(r,R)} \supset T \tag{56}$$

— это так называемая теорема Шенфлиса.

В непрерывном однородном пространстве условия (52), (53) переходят в

$$R \to 0, \quad r \to 0 \tag{57}$$

— фундаментальная область стягивается в точку. Подгруппа дискретных параллельных переносов (56) превращается в непрерывную группу бесконечно малых переносов T_τ $(\tau \to 0)$, т. е. все точки непрерывного однородного пространства трансляционно равны друг другу. Как и в случае дискретного пространства, группа $G \supset T_\tau$ может содержать и иные операции симметрии, в том числе в пространстве $m \geqslant 2$ измерений — бесконечно малые повороты.

Однородное пространство имеет дискретные или бесконечно малые переносы во всех своих m измерениях. Возможны случаи, когда пространство неоднородно, но в подпространстве n $(< m)$ его измерений условие однородности выполняется (при $n = 2$ или 1 шары, упоминаемые в постулате микрооднородности (52), (53), заменяются соответственно на круги и отрезки). Если пространство не имеет однородных подпространств $(n = 0)$, то оно полностью неоднородно.

Соответствующие этим случаям типы групп симметрии будем обозначать G_n^m, $m \geqslant n$, и понимать под этим, если это специально не оговорено, дискрет-
ные группы, т. е. периодичные в n измерениях. Таким образом, в трехмерном
пространстве G_3^3 — это пространственные группы симметрии, G_2^3 — так на-
зываемые группы слоев, G_1^3 — группы стержней и G_0^3 — точечные группы.
Конечные (во всех измерениях) фигуры в трехмерном пространстве, т. е. фи-
гуры, занимающие только часть пространства, тем самым несовместимы
с условием однородности и, следовательно, описываются группами [1] G_0^3.

Аналогично группы G_1^3 пригодны для описания фигур,
женных в одном и конечных в двух направлениях, а G_2^3 — для фигур, бес-
конечно протяженных в двух и конечных в одном направлении. Как мы уви-
дим ниже, в группах G_2^3 остается инвариантной, переходит в себя при всех
преобразованиях симметрии, по меньшей мере одна особая плоскость: в G_1^3 —
одна особая прямая, в G_0^3 — одна особая точка. В двумерном пространстве
возможны группы G_2^2, G_1^2, G_0^2, в одномерном — G_1^1 и G_0^1.

Для дальнейшего рассмотрения

Если группа движений обладает операциями второго рода, то она называется группой второго рода G^{II}; если группа содержит только операции первого рода, то она называется группой первого рода G^{I}.

Справедливо следующее: каждая группа G обязательно содержит подгруппу всех своих движений, в том числе G^{II} — подгруппу G^{I}:

$$G^{\mathrm{I}} \supset G^{\mathrm{I}}, \qquad G^{\mathrm{II}} \supset G^{\mathrm{I}}, \qquad G \supset G^{\mathrm{I}}. \tag{58}$$

Действительно, G^{I} состоит только из движений и операции первого рода g^{I}. Всякая группа G^{II} содержит g^{I} (по меньшей мере $e = g^{\mathrm{I}}$, но могут быть и другие g^{I}). Тогда, составляя таблицу умножения для $G^{\mathrm{II}} = \{\ldots g_i^{\mathrm{I}} \ldots, \ldots g_k^{\mathrm{II}} \ldots\}$ с учетом (17), (19), (20), получаем

	g_i^{I}	g_k^{II}
g_i^{I}	g_j^{I}	g_l^{II}
g_k^{II}	g_f^{II}	g_h^{I}

(59)

Мы видим, что все g_i^{I} образуют группу G^{I}, в левом верхнем квадрате остаются только результаты их взаимодействия между собой: $\{\ldots g_j^{\mathrm{I}} \ldots\}$. Элементы g_k^{II} не образуют группы, так как их произведения $g_k^{\mathrm{II}} g_{k'}^{\mathrm{II}} = \{\ldots g_h^{\mathrm{I}} \ldots\} \in G^{\mathrm{I}}$.

G^{I} — подгруппа G^{II} индекса 2, так как каждой операции $g_j^{\mathrm{I}} \in G$ отвечает операция $g_l^{\mathrm{II}} = g_i^{\mathrm{I}} g_k^{\mathrm{II}}$.

Таким образом, из (58) следует, что, для того чтобы определить, обладает ли та или иная группа подгруппой переносов, достаточно выяснить, что ее подгруппа движений содержит подгруппу переносов:

$$G \supset G^{\mathrm{I}} \supset T_n\{t_1, \ldots, t_n\}.$$

Важным разделением кристаллографических групп K является разделение на семь сингоний. В основе этого разделения лежит признак точечной симметрии пространственной решетки кристалла, которая проявляется в симметрии элементарного параллелепипеда и выражается в определенных соотношениях между его периодами и углами. Разделение групп K по этому признаку характеризуется тем, что рассматриваемая симметрия — кристаллографическая, определяемая наличием у кристаллов пространственной решетки. Ниже, в § 8, мы будем подробно рассматривать симметрию решетки и разделение на сингонии, а сейчас их только охарактеризуем.

Характеристики сингоний и распределение по ним групп K даны в табл. 3 и 5. В случае триклинной сингонии все периоды не равны друг другу: $a \neq \beta \neq c$, и углы между осями $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ также отличаются друг от друга; в высшей, кубической сингонии $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$. Остальные случаи — гексагональной, тригональной (ее называли и ромбоэдрической), тетрагональной, ромбической и моноклинной сингоний — промежуточные и характеризуются значениями всех или некоторых углов $90°$ (или $60°$) и равенством всех или некоторых периодов между собой.

Группы K — это группы симметрии внешней формы (огранки) кристал- лов. Они, а значит и сингония кристаллов, могут быть найдены из измерений внешней формы; конечно, это можно сделать и рентгенографически. Все группы K, принадлежащие к данной сингонии, являются подгруппой выс- шей группы, характеризующей сингонию. Такая группа называется голо- эдрической — это название происходит из рассмотрения огранки кристал- лов (см. гл. III, § 1) и означает «полногранная».

Точечные группы симметрии описывают не только внешнюю форму кристаллов, но и их свойства. Для данного кристалла точечные группы огранки и различных свойств могут быть разными, но они связаны между собой таким образом, что все являются подгруппой предельной группы данного семейства и сама эта предельная группа может описывать какие- нибудь свойства, а группа K внешней формы является наинизшей в этой совокупности. Такое проявление разной, но соподчиненной точечной сим- метрии кристалла в различных его физических свойствах называют при- нципом максимальной и минимальной симметрии (см. т. 4).