6.6. Представления точечных групп K. В § 3 мы выяснили, что группа G может быть представлена изоморфной ей (28) или гомоморфной ей (31) группой H, элементы которой могут быть числами, матрицами и т. п.

Точное (изоморфное) представление групп K дают матрицы $D(g)$ (6) преобразований координат, соответствующие данной операции $g \in K$. Совокупность таких матриц образует точное векторное представление (размерности 3) соответствующей группы, таблица умножения этих матриц по правилам матричного умножения (45) соответствует таблице умножения элементов g_i. (Матрицы порождающих операций даны в табл. 5.)

Например, для группы $K = 2/m$ векторное представление D при специальном выборе осей X_1, X_2, X_3 (табл. 5) имеет вид:

$$2/m = \{ \quad 1, \qquad 2, \qquad \bar{1}, \qquad m \quad \}, \tag{76}$$

$$\updownarrow$$

$$D(2/m) = \left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \right\}, \tag{77}$$

Нетрудно убедиться, что, например, умножению $2\bar{1} = m$ отвечает умножение соответствующих матриц из (77).

Из такого рода векторных представлений группы K, если перейти к другим ортогональным осям X_1^*, X_2^*, X_3^* с помощью неособенного преобразования S, можно получить другие эквивалентные представления той же группы $D^*(g) = SD(g)S^{-1}$. Но для всех эквивалентных представлений сохраняется след матрицы — характер представления $\chi(g)$ (51).

Так, характеры элементов $\chi(g)$ группы $2/m$ во всех векторных ортогонально-эквивалентных представлениях $D(G)$ равны

$$\chi(g) = \{\chi(1) = 3,\ \chi(2) = -1,\ \chi(\bar{1}) = -3,\ \chi(m) = 1\}. \tag{78}$$

Из векторных представлений групп K по определенным правилам можно получить тензорные представления степени $3^2, \ldots, 3^s$, что важно для анализа физических свойств кристаллов, описываемых тензорами различных рангов. При этом соответствующие матрицы $D^2, \ldots, D^s$ перемножаются по правилам тензорного умножения.

• ***<u>Неприводимые представления.</u>***

С другой стороны, векторные представления могут быть разложены на неприводимые составляющие — диагональные квадратные блоки вида A (48). Так, каждая из матриц векторного представления $D\,(2/m)$ может быть представлена в виде прямой суммы трех матриц, например,

$$D\,(2)=\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\oplus\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\oplus\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (79)$$

Принимая эти вырожденные 3×3 матрицы с одним значащим матричным элементом D_{ii} за одномерный квадратный блок, построим два одномерных (антисимметричных) представления $D_{ii}\,(G)$ группы $2/m$:

$$2/m=\{1,\quad 2,\quad \bar{1},\ m\},$$

$$\updownarrow$$

$$D_{11}\,(2/m)=\{1,\ -1,\ -1,\ 1\}=D_{22}\,(2/m), \qquad (80)$$

$$\updownarrow$$

$$D_{33}\,(2/m)=\{1,\quad 1,\ -1,\ -1\} \qquad (81)$$

(индексы ii отмечают позицию матричного элемента $D_{ii}(g)$ в расщепленных 3×3 матрицах). Сопоставляя элементам $g \in K$ числа ± 1, кроме этих двух можно построить еще два одномерных представления: тривиальное единичное (полносимметричное) представление

$$\{1,\ 1,\ 1,\ 1\} \tag{82}$$

и знакопеременное (антисимметричное)

$$\{1,\ -1,\ 1,\ -1\}. \tag{83}$$

Последнее образует представление группы $2/m$, так как $2\bar{1} \leftrightarrow (-1)(1) = (-1) \leftrightarrow m$ и т. д. Итак, группа $2/m$ имеет всего четыре одномерных представления. Заметив, что для одномерных матриц сама матрица $D(g)$ совпадает с характером $\chi(g)$ представления, запишем результат в форме таблицы характеров

Γ_i	1	2	$\bar{1}$	m
Γ_1	1	1	1	1
Γ_2	1	1	-1	-1
Γ_3	1	-1	1	-1
Γ_4	1	-1	-1	1

(84)

Здесь в первой строке записаны элементы группы; в первом столбце — одномерные представления, обозначенные символами Γ_i; в каждой строке Γ_i — величины $\chi(g) = D(g)$, соответствующие элементам $g \in K$.

Неэквиалентные неприводимые представления

Γ_i — величины $\chi(g) = D(g)$, соответствующие элементам $g \in K$.

Число неэквивалентных неприводимых представлений равно числу классов сопряженных элементов (36). Поэтому в таблицах характеров неприводимых представлений групп K в первой строке перечисляются обычно элементы, сгруппированные в классы сопряженных элементов $\{xgx^{-1}\}$. Изоморфные группы $K_1 \leftrightarrow K_2 \leftrightarrow \mathfrak{K}$ расщепляются на одинаковое число классов $\{xgx^{-1}\}$ и поэтому имеют одинаковые неприводимые представления Γ_i и общую таблицу характеров. Так, в силу изоморфизма групп $2/m \leftrightarrow \leftrightarrow 222 \leftrightarrow mm2$ (табл. 6 и 7) все они имеют одну и ту же таблицу характеров (84). Другие важные свойства неприводимых представлений групп K таковы:

1) размерности n_i матриц неприводимых представлений Γ_i являются делителями порядка групп G; 2) сумма квадратов размерностей $\sum_i n_i^2$ равна порядку G; 3) среди представлений Γ_i всегда имеется единичное Γ_1.

Характеры единичного (тождественного) преобразования χ_i в любом Γ_i равны размерности n_i представления Γ_i. Возможные значения характеров χ одномерных представлений Γ_j групп K следуют из определяющих соотношений табл. 7 вида $A^n = e$, $n = 1, 2, 3, 4, 6$, для циклических групп (подгрупп) при условии $e \leftrightarrow 1$. Это дает $\chi^n = 1$, откуда $\chi = \exp(-2\pi i/n)$.