

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2}{r} \left(\frac{x}{x^2} \frac{dy}{dt} - \frac{y}{x^2} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{x^2}{r} \frac{d}{dt} \frac{y}{x} = \\
&= \frac{x^2}{r} \frac{d}{dt} (\operatorname{tg} \varphi) = \frac{x^2}{r} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Ще один спосіб отримання явного вигляду проекцій v_r і v_φ у полярній системі координат полягає в прямому диференціюванні радіус-вектора, $\vec{r} = r\vec{e}_r$, за часом: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$. Похідна орта \vec{e}_r за часом, у свою чергу, дорівнює:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{e}_r}{dt} &= \frac{d}{dt} (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) = \\
&= \vec{e}_x \frac{d(\cos \varphi)}{dt} + \vec{e}_y \frac{d(\sin \varphi)}{dt} = \vec{e}_x (-\sin \varphi) \frac{d\varphi}{dt} + \vec{e}_y \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \\
&= \frac{d\varphi}{dt} (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Отже, $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$. Коефіцієнти в цьому виразі при ортах і є проекціями вектора швидкості на відповідні напрямки: $v_r = dr/dt$, $v_\varphi = r d\varphi/dt$. Цей спосіб є найкоротшим, але в ньому, як і в попередньому, фізичний зміст проекцій v_r і v_φ є прихованим.

Отже, ми отримали явний вигляд для модуля моменту імпульсу в полярних координатах:

$$\mathcal{L} = mrv_\varphi = mr^2 d\varphi/dt. \quad (4.26)$$

Проаналізуємо, що означає збереження модуля моменту імпульсу матеріальної точки при її русі в центральному полі, тобто незмінність у часі виразу (4.26). Для цього поділимо траєкторію руху на малі ділянки, що їх проходить матеріальна точка за однакові малі проміжки часу (рис. 4.8). Обчислимо

площу трикутника OAB , що утворюється радіус-вектором $\vec{r} \equiv \vec{OA}$ та елементарним переміщенням $d\vec{r} \equiv \vec{AB}$. Для цього зручно скористатись геометричним змістом векторного добутку. Порахуємо площу dS трикутника OAB як напівдобуток довжин сторін OA і AB на синус кута $\angle OAB \equiv \alpha$ між ними:

$$dS = 0.5 OA \cdot AB \cdot \sin \alpha = 0.5 |\vec{r}| |d\vec{r}| \sin(\pi - \alpha). \quad (4.27)$$

Зазначимо, що кут $\pi - \alpha$ – це є кут між радіус-вектором \vec{r} та вектором імпульсу $\vec{p} = m\vec{v} = m d\vec{r}/dt$. Тоді вираз для площі цього трикутника матиме вигляд:

$$dS = \frac{1}{2m} |\vec{r}| \cdot |\vec{p} dt| \sin(\angle \vec{r}, \vec{p}) = \frac{dt}{2m} [\vec{r}, \vec{p}] = \frac{dt}{2m} \mathcal{L}. \quad (4.28)$$

Площу, яку описує («замітає») радіус-вектор за одиницю часу, dS/dt , називають **секторіальною швидкістю**. За розмірністю $[dS/dt] = \text{м}^2/\text{с}$. Завдяки збереженню моменту імпульсу матеріальної точки, яка рухається у полі центральних сил, $dS = \text{const} dt$. Таким чином, теоретично доведено **другий закон Кеплера**¹:

«Радіус-вектор, що поєднує Сонце з будь-якою планетою, за рівні проміжки часу описує рівні площі».

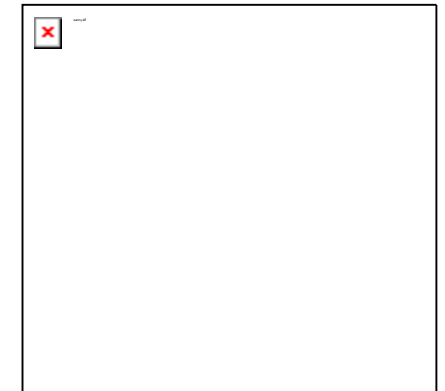


Рис. 4.8. До доведення другого закону Кеплера

¹ Кеплер (Kepler) Йоганнес (1571-1630) – німецький філософ, математик, астроном, астролог і оптик. В обчислювальній математиці на його честь названо метод наближеного обчислення інтегралів. Він вдосконалив телескоп-рефрактор та допоміг довести відкриття, зроблені з допомогою телескопа Галілеєм. Ім'ям Кеплера названо відкриття ним наднову.

Хоча Сонце також рухається через взаємодію з планетами, але його маса є дуже великою порівняно з масами планет Сонячної системи: $m_C / m_3 = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг} / 6 \cdot 10^{24} \text{ кг} = 332 \cdot 10^3$, $m_C / m_{Ю} \approx 10^3$, тут m_C – це маса Сонця, m_3 – маса Землі, $m_{Ю}$ – маса найважчої серед планет Сонячної системи Юпітера. А розміри радіусів орбіт руху планет навколо Сонця істотно перевищують радіус Сонця. Наведемо тут деякі з цих параметрів руху: радіус земної орбіти $R_{C3} = 1,5 \times 10^8$ км, радіус Сонця $R_C = 7 \times 10^5$ км, радіус орбіти Юпітера $R_{CЮ} = 7,8 \times 10^8$ км, радіус планети Юпітер $R_{Ю} = 6,3 \times 10^3$ км. Тому в задачах про рух планет навколо Сонця останнє можна вважати нерухомим, і розглядати рух планет у полі тяжіння Сонця як рух матеріальних точок у полі центральної сили.

4.8. Перший закон Кеплера

Перший закон Кеплера стверджує: «Всі планети рухаються за еліптичними орбітами навколо Сонця, яке знаходиться в одному з фокусів еліпса».

Всі свої закони Кеплер встановив експериментально, систематизувавши та усвідомивши результати багаторічних спостережень (як власних, так і своїх попередників). Саме спираючись на закони Кеплера, Ньютон вивів свій закон всесвітнього тяжіння. Але теоретично можна, виходячи з законів Ньютона, розрахувати траєкторію рухів планет в Сонячній системі. Для цього скористаємося законом збереження моменту імпульсу:

$$\mathcal{L} = mrv_\varphi = mr^2 d\varphi / dt = \text{const} \quad (4.29)$$

та законом збереження повної механічної енергії:

$$E_0 = K + U = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r} = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_\varphi^2) - \gamma \frac{mM}{r}$$

$$= m \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{r^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \gamma \frac{M}{r} \right] = \text{const}. \quad (4.30)$$

З цих двох законів (4.29) та (4.30) маємо два рівняння для двох невідомих функцій $r(t)$ та $\varphi(t)$. Цього досить, щоб математично описати рух планети в Сонячній системі. Рівняння траєкторії $r=r(\varphi)$ не містить часу – це підказує, як слід розв'язувати систему рівнянь (4.29) та (4.30): передовсім, слід виключити з цих рівнянь час. Для цього знайдемо з (4.29) вираз для похідної $d\varphi/dt$:

$$d\varphi / dt = \mathcal{L} / (mr^2), \quad (4.31)$$

і підставимо його до рівняння (4.29):

$$E_0 = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\mathcal{L}^2}{2r^2m} - \gamma \frac{mM}{r}. \quad (4.32)$$

З (4.32) знайдемо похідну від відстані r за часом:

$$\begin{aligned} \frac{m\dot{r}^2}{2} &= E_0 - \frac{\mathcal{L}^2}{2r^2m} + \gamma \frac{mM}{r}; \quad \dot{r}^2 = \frac{2E_0}{m} - \frac{\mathcal{L}^2}{2r^2m^2} + \frac{2\gamma mM}{r}; \\ \frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{2E_0}{m} - \frac{\mathcal{L}^2}{r^2m^2} + \frac{2\gamma M}{r}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Зауважимо, що під радикалом в (4.33) можна виділити повний квадрат:

$$\frac{\mathcal{L}^2}{r^2m^2} - \frac{2\gamma M}{r} = \left(\frac{\mathcal{L}}{mr} \right)^2 - 2 \frac{\mathcal{L}}{mr} \frac{\gamma mM}{\mathcal{L}} + \left(\frac{\gamma mM}{\mathcal{L}} \right)^2 - \left(\frac{\gamma mM}{\mathcal{L}} \right)^2. \quad (4.34)$$

З урахуванням формули (4.34) похідна dr/dt набуває вигляду:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E_0}{m} + \left(\frac{\gamma m M}{L}\right)^2 - \left(\frac{L}{mr} - \frac{\gamma m M}{L}\right)^2}. \quad (4.35)$$

Визначимо елементарний проміжок часу dt з (4.31) та (4.35) та прирівняємо ці вирази:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E_0}{m} + \left(\frac{\gamma m M}{L}\right)^2 - \left(\frac{L}{mr} - \frac{\gamma m M}{L}\right)^2}} = \frac{d\varphi mr^2}{L}. \quad (4.36)$$

В такий спосіб ми здобули рівняння, в якому не фігурує час. Це рівняння розв'язують методом поділу змінних, тобто (4.36) можна тотожно перетворити так, аби одна частина рівняння містила лише одну координату та її диференціал, а друга – іншу змінну:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{L dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2E_0}{m} + \left(\frac{\gamma m M}{L}\right)^2 - \left(\frac{\gamma m M}{L} - \frac{L}{mr}\right)^2}} = \\ &= \frac{d\left(\frac{\gamma m M}{L} - \frac{L}{mr}\right)}{\sqrt{\frac{2E_0}{m} + \left(\frac{\gamma m M}{L}\right)^2 - \left(\frac{\gamma m M}{L} - \frac{L}{mr}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Для скорочення і спрощення запису введемо позначення:

$$a^2 = \frac{2E_0}{m} + \left(\frac{\gamma m M}{L}\right)^2, \quad x = \frac{\gamma m M}{L} - \frac{L}{mr}, \quad \text{тоді отримуємо:}$$

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow \varphi - \varphi_0 = -\arccos \frac{x}{a}. \quad (4.38)$$

Скористаємося парністю функції косинус:

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\frac{\gamma m M}{L} - \frac{L}{mr}}{\sqrt{\frac{2E_0}{m} + \left(\frac{\gamma m M}{L}\right)^2}} = \frac{1 - \frac{L^2}{\gamma^2 m^3 M^2}}{\sqrt{1 + \frac{2E_0 L^2}{\gamma^2 m^3 M^2}}} = \frac{1 - \frac{p}{r}}{e}. \quad (4.39)$$

Тут введено загальноновживані позначення: параметр орбіти (або фокальний параметр) p і ексцентриситет e :

$$p = \frac{L^2}{\gamma m^2 M}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E_0 L^2}{\gamma^2 m^3 M^2}}. \quad (4.40)$$

З урахуванням цих позначень траєкторія матеріальної точки набуває наступного вигляду: $r = \frac{p}{1 - e \cos(\varphi - \varphi_0)}$. Це є рівняння

еліпса, тобто, ми довели перший закон Кеплера. Проаналізуємо здобутий результат.

За розмірністю параметр орбіти – це довжина, $[p]=\text{м}$. Його фізичний зміст найкраще зрозуміти з того, що у разі нульового ексцентриситету, $e=0$, матеріальна точка рухається по окружності, $r=p$. З умови $e=0$ з урахуванням формули (4.40) дістаємо, що відповідне значення повної механічної енергії при цьому є від'ємним,

$$E_0 = -\gamma^2 m^3 M^2 / 2L^2. \quad (4.41)$$

Цей результат співпадає з тим, який було здобуто в параграфі 4.5 для фінітного руху в гравітаційному полі.

Ексцентриситет є безрозмірним параметром. Якщо він є меншим за одиницю, $0 < e < 1$, траєкторією матеріальної точки є еліпс. При цьому повна механічна енергія також є від'ємною, $-\gamma^2 m^3 M^2 / 2L^2 < E_0 < 0$, що також співпадає з результатами, здобутими в параграфі 4.5. Найменшу відстань від планети до Сонця, $r_{\min} = p/(1+e)$, називають **перигелієм**, для Землі він становить 147 млн км. Найбільшу відстань від планети до

Сонця; $r_{\max} = p/(1-e)$ називають **афелієм**, для Землі – це 152 млн км. Як видно, орбіта Землі мало відрізняється від окружності, її ексцентриситет є малим. Зазначимо без доведення, що в еліпсі сума відстаней від будь-якої точки на ньому до двох його фокусів є стала величина (рис. 4.9).

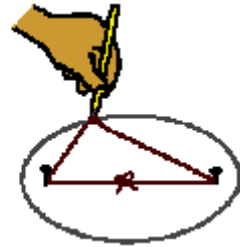


Рис. 4.9. До визначення поняття «еліпс»

Явні вирази для афелію та перигелію,

$$r_{\max, \min} = \frac{p}{1 \mp e} = \frac{\gamma m M}{-2E_0} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2E_0 \mathcal{L}^2}{\gamma^2 m^3 M^2}} \right) > 0, \quad (4.42)$$

– можна отримати без того, аби розв'язувати диференціальне рівняння і здобувати траєкторію, прямо з рівняння (4.32). Для цього достатньо скористатись наступним фізичним міркуванням. В афелії (перигелії) планета перестає віддалятися (наближатися) від (до) Сонця. В цих точках відстань від планети до Сонця сягає максимуму (мінімуму), тобто швидкість зміни відстані дорівнює нулю, $dr/dt|_{r_{\min, \max}} = 0$. При цьому рівняння (4.32) набуває вигляду квадратного рівняння відносно $r_{\max, \min}$:

$$\frac{\mathcal{L}^2}{2m} \left(\frac{1}{r_{\min, \max}} \right)^2 - \gamma \frac{mM}{r_{\min, \max}} = E_0; \quad (4.43)$$

розв'язки якого співпадають із виразами (4.43).

Нульове значення повної механічної енергії, $E_0 = 0$, відповідає (див. формулу (4.40)) одиничному ексцентриситету, $e = 1$. При цьому матеріальна точка рухається по параболі, тобто виконує вже інфінітний рух.

Рух по гіперболі реалізується для значень ексцентриситету, які є більшими за одиницю, $e > 1$, при цьому повна механічна енергія є додатною (див. (1.4.33)), $E_0 > 0$. Цей

результат також повністю збігається з тим, який було здобуто в параграфі 4.5., коли розглядали можливість реалізації фінітного та інфінітного рухів у гравітаційному полі.

У гравітаційному полі сила завжди спрямована до силового центру. Однак, після наближення до перигелію планета починає віддалятися від Сонця. Знайдемо відповідь на питання, чому попри дію сили тяжіння планета не падає на Сонце. Для цього скористаємось рівнянням (4.32). Воно має вигляд закону збереження повної механічної енергії, в якому кінетична енергія обертального руху, $0.5mv_\phi^2$, замаскована під виглядом функції радіальної координати, $\mathcal{L}^2/(2r^2m)$, який притаманний потенціальній енергії. Власне, рівняння (4.32) можна трактувати так, нібито в ньому сума кінетичної енергії радіального руху, $0.5mv_r^2$, та ефективної потенціальної енергії, $U^* = (\mathcal{L}^2/(2r^2m)) - \gamma m M/r$, є незмінною.

Проаналізуємо залежність $U^*(r)$. При малих значеннях відстані до Сонця, $r \rightarrow 0$, переважає перший доданок, $\mathcal{L}^2/(2r^2m)$, ефективна потенціальна енергія є додатною і має особливість $1/r^2$. При значному віддаленні від Сонця, $r \rightarrow \infty$, переважає другий доданок, $(-\gamma m M/r)$, ефективна потенціальна енергія є від'ємною і прямує до нуля пропорційно $(-1/r)$ (рис. 4.10). Уже з цих простих міркувань випливає, що залежність $U^*(r)$ містить мінімум. Аби знайти його, слід узяти похідну від $U^*(r)$ за радіальною координатою та прирівняти її нулю:

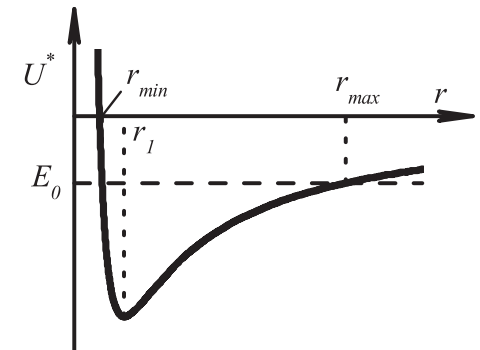


Рис. 4.10. Залежність ефективної потенціальної енергії від радіусу

$$\frac{dU^*}{dr} = -\frac{\mathcal{L}^2}{r^3 m} + \frac{\gamma m M}{r^2} = 0. \quad (4.44)$$

З рівняння (4.44) дістаємо координату мінімуму, $r_I = \mathcal{L}^2 / \gamma m^2 M$. Це в точності співпадає з параметром орбіти (4.40), що відповідає фізичному значенню параметра орбіти як радіуса окружності, по якій рухається матеріальна точка за умови нульового ексцентриситету, $e=0$. Здобуте значення r_I дає можливість замінити математичне визначення малої відстані до Сонця, використане вище, « $r \rightarrow 0$ », на фізичне визначення: « $r < r_I$ ». Аналогічно математичне визначення значного віддалення від Сонця, « $r \rightarrow \infty$ », тепер можна замінити на фізичне визначення: « $r > r_I$ ».

Порахуємо значення ефективної потенціальної енергії при $r=r_I$:

$$\begin{aligned} U^*(r_I) &= \frac{\mathcal{L}^2}{2r_I^2 m} - \frac{\gamma m M}{r_I} = \frac{\mathcal{L}^2 \gamma^2 m^4 M^2}{2\mathcal{L}^4 m} - \frac{\gamma m M \gamma m^2 M}{\mathcal{L}^2} = \\ &= -\frac{\gamma^2 2m^3 M^2}{2\mathcal{L}^2}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Звернемо увагу, що це значення, $U^*(r_I)$, в точності співпадає з тим мінімальним значенням повної механічної енергії (4.41), яке відповідає руху по окружності. Такий збіг має просте фізичне тлумачення. Коли повна механічна енергія має значення (4.41), відповідна горизонтальна пряма має лише одну точку перетину з графіком ефективної потенціальної енергії, $r=r_I$, тобто траєкторія руху матеріальної точки є окружність. Коли ж повна механічна енергія є від'ємною, але більшою за значення (4.41), то відповідна горизонтальна пряма має дві точки перетину з графіком ефективної потенціальної енергії (див. рис. 4.10). Ці точки і є перигелієм і афелієм.

4.9. Третій закон Кеплера

Зміст цього закону Кеплера полягає в тому, що: «Квадрати періоду часу обертання планет навколо Сонця відносяться один до одного так, як куби великих півосей їхніх еліптичних орбіт».

Для спрощення математичних записів доведемо це на прикладі руху по окружності з радіусом R . Планета, що рівномірно обертається навколо Сонця по окружності, рухається з доцентровим прискоренням $a = \omega^2 R$ під дією сили гравітації $F = \gamma m M / R^2$. За другим законом Ньютона маємо рівняння:

$$\omega^2 R = \gamma M / R^2. \quad (4.46)$$

Беручи до уваги зв'язок кутової швидкості обертання планети з періодом, $\omega = 2\pi / T$, перепишемо (4.46) у наступному вигляді:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}, \quad (4.47)$$

де $4\pi^2 / (\gamma M) = \text{const}$ – це одна й та сама величина для всіх планет однієї Сонячної системи, бо вона не залежить від характеристик планети. Що ближча планета до Сонця, то коротший там рік, але залежність ця не є прямо пропорційною, а визначається формулою (4.47).

4.10. Космічні швидкості

Першим кроком у міжпланетних перельотах є запуск штучного супутника Землі, який рухатиметься поблизу поверхні Землі. Першою космічною швидкістю, v_1 , називають мінімальну швидкість, яку слід надати тілу на поверхні Землі, аби воно могло назавжди полишити Землю, ставши її штучним супутником. За другим законом Ньютона для матеріальної точки маси m , що обертається навколо Землі (маса M_3) в полі її тяжіння по круговій орбіті радіусом R , маємо таке співвідношення:

$$ma = mv^2 / R = F_{тяж} = \gamma mM_3 / R^2. \quad (4.48)$$

Для навколосемних орбіт відстань між матеріальною точкою та центром Землі можна вважати приблизно рівною радіусу Землі R_3 , тоді для першої космічної швидкості здобудемо вираз:

$$v_I = \sqrt{\gamma M_3 / R_3} = \sqrt{g R_3} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ м/с}. \quad (4.49)$$

Тут ми скористались визначенням прискорення вільного падіння, $g = \gamma M_3 / R_3^2$. Відзначимо, що здобуте значення (4.49) слід розглядати як оцінку, бо при її отриманні було знехтувано багатьма реальними умовами, зокрема, опором повітря, обертанням Землі, тощо.

Другим кроком у міжпланетних перельотах слід розглядати такі польоти, коли космічна ракета полишає навколосемний простір. Мінімальну швидкість, яку слід надати тілу на поверхні Землі, аби воно могло подолати тяжіння Землі і віддалитися від неї на скільки завгодно велику відстань, називають **другою космічною швидкістю**. Визначимо другу космічну швидкість із наступних міркувань. Значення найменшої повної механічної енергії, яка потрібна для того, аби рух матеріальної точки в полі сили тяжіння став інфінітним, дорівнює: $E = 0$. При цьому тіло рухатиметься за параболічною орбітою (параболі відповідає ексцентриситет $e=1$). Запишемо закон збереження енергії:

$$mv^2 / 2 - \gamma mM_3 / r = 0. \quad (4.50)$$

Звідси знайдемо другу космічну швидкість:

$$v_{II} = \sqrt{2\gamma M_3 / R_3} = \sqrt{2} \ v_I = 11.2 \text{ км/с}. \quad (4.51)$$

При виводі аналітичного виразу для другої космічної швидкості ми знехтували дисипацією енергії, обертанням Землі як навколо Сонця, так і навколо власної осі, тощо. Відзначимо, що вплив інших планет також може спричинити значний ефект у низці задач. Наприклад, якщо летіти на Уран за умови сприятливого розташування Юпітера на його орбіті, то політ

може зайняти п'ять років замість шістнадцяти, які потрібні у загальному випадку. Крім того, ми вважали орбіту Землі за окружність.

Третім кроком у міжпланетних перельотах слід розглядати такі польоти, коли ракета полишає Сонячну систему, стартувавши з орбіти Землі. Мінімальну швидкість, яку слід надати тілу на поверхні Землі, аби воно могло перебороти силу тяжіння не лише Землі, а й Сонця і вийти в міжзоряний простір, називають **третьою космічною швидкістю**. Визначимо її з міркувань, аналогічних до тих, що було використано при здобутті другої космічної швидкості. А саме, найменша повна механічна енергія, яка є потрібною для інфінітного руху в полі тяжіння Землі та Сонця, дорівнює нулю:

$$mv^2 / 2 - \gamma mM_3 / R_3 - \gamma mM_C / R_{3C} = 0. \quad (4.52)$$

Тут M_C – це маса Сонця і R_{3C} – це радіус земної орбіти. Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії ракети на поверхні нашої планети з Землею за абсолютною величиною набагато менша від потенціальної енергії гравітаційної взаємодії ракети (на орбіті Землі) з Сонцем. Це не є очевидним, тому покажемо це шляхом прямого розрахунку. Частка потенціальної енергії гравітаційної взаємодії певного тіла з Землею до його енергії взаємодії з Сонцем за модулем дорівнює малій величині:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma mM_3}{R_3} \right) : \left(\frac{\gamma mM_C}{R_{3C}} \right) &= \frac{\gamma mM_3 R_{3C}}{\gamma mM_C R_3} = \\ &= \frac{M_3 R_{3C}}{M_C R_3} = \frac{(6 \cdot 10^{24} \text{ кг}) \cdot (1.5 \cdot 10^{11} \text{ м})}{(2 \cdot 10^{30} \text{ кг}) \cdot (6.4 \cdot 10^6 \text{ м})} \approx 0.07 < 1. \end{aligned}$$

Тому для простої оцінки третьої космічної швидкості можна скористатися формулою (4.51), замінивши в ній масу Землі та її радіус, відповідно, на масу Сонця M_C та радіус орбіти руху Землі навколо Сонця R_{3C} : $v_{III} = \sqrt{2\gamma M_C / R_{3C}} \approx 42 \text{ км/с}$. Насправді, ця величина швидкості є дуже завищеною. Якщо скористатися тим, що ракета на поверхні Землі вже має початкову швидкість

відносно Сонця внаслідок річного обертання Землі навколо Сонця, а також внаслідок добового обертання Землі навколо власної осі, тоді мінімальне значення швидкості, яку слід надати ракеті для того, щоб вона могла полишити Сонячну систему, можна значно зменшити: $v_{\min} \approx 42 - 25 \approx 17 \text{ км/с}$.

4.11. Проблема двох тіл

Серед космічних об'єктів нашої Галактики масу розподілено поміж приблизно 10^{10} зірок, діаметр нашої Галактики становить близько 10^5 світлових років, час її обертання навколо власної осі складає величину приблизно 200 млн. років. Серед космічних об'єктів зустрічаються різні за розмірами і масою. І не завжди для вивчення взаємодії двох із них можна вважати масу одного з тіл набагато більшою за масу іншого, $m_1 \gg m_2$, і не завжди є застосовною теорія руху матеріальної точки в полі центральної сили. Наприклад, це не можна зробити у випадку вивчення взаємного руху Місяця та Землі або такого об'єкта, як подвійні зірки, і таке інше. Дослідимо взаємодію саме таких двох об'єктів, маси яких є величинами одного порядку, $m_1 \sim m_2$.

Цю задачу можна розв'язувати на основі законів Ньютона та на основі законів збереження.

Спочатку динаміку руху цих матеріальних точок під дією сил гравітації з боку іншої матеріальної точки за умови, що до цієї замкнутої системи входять лише ці два об'єкти, опишемо на основі другого закону Ньютона (рис. 4.11):

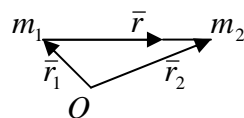


Рис. 4.11. До проблеми двох тіл

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}. \quad (4.53)$$

До системи рівнянь (4.53) входять три змінні: радіус-вектор першого тіла \vec{r}_1 , радіус-вектор другого тіла \vec{r}_2 і їхня різниця

$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, в тому числі її модуль r . Систему рівнянь (4.53) природно та нескладно трансформувати в одне рівняння для однієї змінної \vec{r} . Для цього поділимо перше рівняння (4.53) на m_1 , а друге – на m_2 та віднімемо перше рівняння системи (1.4.50) від другого рівняння:

$$\frac{d^2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt^2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right). \quad (4.54)$$

З урахуванням введеної в Розділі 3 зведеної маси $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ з (4.54) маємо:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{\mu (m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r}. \quad (4.55)$$

Це рівняння не вимагає особливих зусиль для його розв'язання. Бо його розв'язок є добре відомим із теорії руху тіла зведеної маси μ у центральному полі, утвореному масою $m_1 + m_2$. Отже, проблему двох тіл

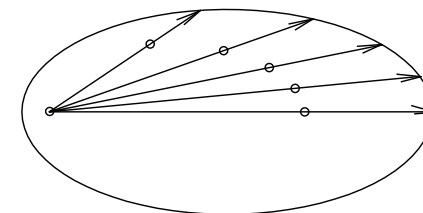


Рис. 4.12. Рух тіла зведеної маси по еліптичній орбіті

зведено до вже відомої теорії, яку представлено у параграфі 4.8. Покажемо, як здобуті там результати дають можливість дослідити рух двох тіл з масами одного порядку на прикладі випадку від'ємної повної механічної енергії. У цьому випадку зведена маса μ рухатиметься по еліпсу, в одному з фокусів якого міститиметься маса $m_1 + m_2$. На рис. 4.12 показано положення радіус-вектора зведеної маси, який, рухаючись за стрілкою годинника, за однакові проміжки часу замальовує однакові площі, як того вимагає другий закон Кеплера. В дійсності цей радіус-вектор показує вектор, що поєднує перше тіло з другим. Для визначеності при побудові цієї траєкторії вважалося, що маса другого тіла вдвічі більша за масу першого, $m_2 = 2m_1$. Положення центру мас у цьому випадку показано на рис. 4.12

дрібними кружечками. Як відомо з параграфу 3.1, у дійсності центр мас замкнутої механічної системи, якою є досліджувана тут система, що складається з двох матеріальних точок, може рухатися рівномірно та прямолінійно. Вважатимемо для визначеності, що центр мас у нашому випадку є нерухомим, тобто вважатимемо, що ми спостерігаємо за рухом цих двох матеріальних точок з системи відліку, пов'язаної з їхнім центром мас. Тоді для визначення траєкторій руху тіл m_1 і m_2 належить провести таку побудову.

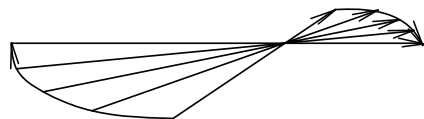


Рис. 4.13. Відносний рух двох тіл

Слід зняти радіус-вектори з рис. 4.12 та накласти їх один на одного так, аби положення центру мас у них співпали (рис. 4.13). Кінці векторів показують рух другого тіла, а їхні початки – рух першого тіла навколо нерухомого центру мас, який тепер міститься в точці перетину векторів.

Розв'яжемо тепер проблему двох тіл на основі закону збереження повної механічної енергії. Це тим більш важливо, що зведена маса μ виникла в переході від (4.54) до (4.55) недостатньо обґрунтовано – з таким самим успіхом рівняння (4.54) можна було помножити на будь-яку іншу масу. В наведеному нижче енергетичному підході зведена маса виникає самоузгоджено.

Повна механічна енергія E_0 системи двох тіл дорівнює:

$$E_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (4.56)$$

Тут v_1 і v_2 – швидкості першого та другого тіл відносно початку координат O (рис. 4.11), $\vec{v}_1 = d\vec{r}_1/dt$ і $\vec{v}_2 = d\vec{r}_2/dt$. Скористаємося стандартним прийомом: перейдемо до системи центра мас, яка рухається зі швидкістю $\vec{V}_{\text{цм}} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$. В цій системі відліку швидкість j -го тіла визначається так:

$\vec{v}_{cj} = \vec{v}_j - \vec{V}_{\text{цм}}$. Отже, для швидкостей першого та другого тіл у системі центра мас маємо такі вирази:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{c1} &= \vec{v}_1 - \vec{V}_{\text{цм}} = \mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)/m_1, \\ \vec{v}_{c2} &= \vec{v}_2 - \vec{V}_{\text{цм}} = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)/m_2. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Використання цих значень швидкостей дозволяє переписати рівняння (4.56) в наступний спосіб:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{m_1 (\vec{V}_{\text{цм}} + \vec{v}_{c1})^2}{2} + \frac{m_2 (\vec{V}_{\text{цм}} + \vec{v}_{c2})^2}{2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} = \\ &= V_{\text{цм}}^2 \frac{m_1 + m_2}{2} + \frac{m_1 v_{c1}^2 + m_2 v_{c2}^2}{2} + \\ &\quad \vec{V}_{\text{цм}} (m_1 \vec{v}_{c1} + m_2 \vec{v}_{c2}) - \gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Тепер скористаємося тим, що сумарний імпульс механічної системи, порахований відносно центру мас, дорівнює нулю (це було показано у параграфі 3.1), $m_1 \vec{v}_{c1} + m_2 \vec{v}_{c2} = 0$, а також формулами (4.57). Це дає можливість спростити вираз для повної механічної енергії:

$$E_0 = V_{\text{цм}}^2 \frac{m_1 + m_2}{2} + \frac{\mu v^2}{2} - \gamma \frac{\mu(m_1 + m_2)}{r}. \quad (4.59)$$

Тут $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = d\vec{r}/dt$ – це швидкість другого тіла відносно першого. Як було зазначено в параграфі 3.1, центр мас замкнутої механічної системи рухається зі сталою швидкістю, тому перший доданок в правій частині (4.59) є константа. Вона не впливає на розв'язання задачі, бо повна механічна енергія є сумою кінетичної та потенціальної, яку, в свою чергу, визначають з точністю до константи.

З урахуванням зазначеного рівняння (4.59) набуває вигляду закону збереження повної механічної енергії механічної системи, яка складається з матеріальної точки зведеної маси μ ,

яка рухається зі швидкістю v (її кінетична енергія $0.5\mu v^2$) в полі тяжіння, яке створює маса m_1+m_2 (його потенціальна енергія є від'ємною: $-\mu(m_1+m_2)/r$).

Таким чином, тут показано, що задача двох тіл зводиться до задачі про рух тіла зведеної маси μ в полі центральної сили, створеної масою m_1+m_2 .

Зазначимо, що задачу трьох тіл, тобто задачу про взаємодію трьох матеріальних точок, які складають замкнуту механічну систему, не вдається розв'язати так просто, як це має місце у випадку двох тіл. З одного боку, випадок зіткнення трьох тіл є набагато рідкіснішим за зіткнення трьох тіл. З іншого боку, існують фізичні задачі, де роль потрібних зіткнень є важливою. У цьому випадку вдаються до спеціальних числових методів.

4.12. Контактні сили (сили реакції і тертя)

Якщо створити контакт між двома тілами, наприклад, притиснувши брусок до столу або до стіни, то виникають сили взаємодії. При цьому не тільки брусок діє на стіл, але й у відповідності до третього закону Ньютона виникає сила, що діє на брусок із боку столу. Кінець кінцем цю силу обумовлено відштовхуванням атомів. Якщо електронні оболонки двох атомів починають перекриватись, між атомами виникає відштовхування, і чим ближче наближаються атоми, тим більшим є це відштовхування. Сила відштовхування атомів має електромагнітну природу і може виявитись дуже великою порівняно з силою гравітаційної взаємодії. Якщо притискати брусок до столу, то атоми на поверхні столу будуть наближатись до атомів на поверхні бруска до тих пір, доки результуюча сила відштовхування, яка має напрямок назустріч прикладеній силі, не буде дорівнювати їй за абсолютною величиною. Подібні сили відштовхування між поверхнями ми будемо називати контактними.

На рис. 4.14 зображено брусок масою m , що притиснутий до горизонтальної поверхні з силою \vec{F}_N , яку направлено вертикально вниз. Якщо у цьому випадку автоматично

і помилково застосувати рівняння $m\vec{a} = \vec{F}_N$, то прискорення дорівнюватиме

$$\vec{a} = \vec{F}_N / m, \quad (4.60)$$

тобто буцімто не дорівнюватиме нулю.

Але зовсім очевидно, що брусок не набуває прискорення під дією сили \vec{F}_N . Більш ретельний аналіз показує, що атоми стінки відштовхують брусок із силою $\vec{F}_I = -\vec{F}_N$. Результуюча сила дорівнює нулю,

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F}_N + \vec{F}_I = \vec{F}_N + (-\vec{F}_N) = 0. \quad (4.61)$$

Силою, з якою брусок тисне на поверхню, у найпростішому випадку є сила тяжіння.

В усіх випадках, коли застосовується другий закон Ньютона, спочатку необхідно обчислити результуючу силу. Іноді правильне застосування законів Ньютона може виявитись дуже хитромудрим. Свого роду «пересторогою» може служити наступний парадокс.

Розглянемо два бруски з масам m_A та m_B , розташовані на абсолютно гладкій поверхні. Силу \vec{F} прикладають до бруска A , і він передає її бруску B . Відповідно до третього закону Ньютона брусок B , буцімто, повинен діяти на брусок A з такою ж за величиною і протилежною за напрямом силою $-\vec{F}$. Результуюча сила, що діють на брусок A , дорівнює сумі сили \vec{F} і сили реакції $-\vec{F}$ бруска B , тобто, буцімто, дорівнює нулю, $\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0$. Відповідно до другого закону Ньютона це означає, що брусок A , буцімто, не прискорюється, $\vec{a} = \vec{F}_{\text{рез}} / m_A = 0$!

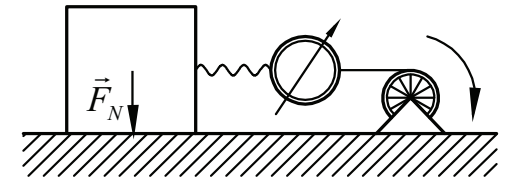


Рис. 4.14. Схема досліду з визначення статичного та динамічного коефіцієнтів тертя

Помилка полягає в припущенні, що сила \vec{F} повністю передається бруском A бруску B і, таким чином, повністю прикладається до бруска B . Закони Ньютона зовсім не стверджують, що це повинно бути саме так. Від цього припущення треба відмовитись і припустити, що сила реакції, що діє на B з боку A приймає якісь інші значення \vec{F}' . Загальний підхід до розв'язання задач динаміки полягає в застосуванні закону Ньютона до кожної маси окремо. На масу m_A , окрім сили \vec{F} , діятиме сила реакції з боку маси m_B , направлена в протилежний бік, яка за третім законом Ньютона дорівнює $-\vec{F}'$. Тоді результуюча сила, що діє на A дорівнює $\vec{F} - \vec{F}'$, і другий закон Ньютона набуває вигляду

$$m_A \vec{a} = \vec{F} - \vec{F}' . \quad (4.62)$$

Для маси m_B другий закон Ньютона дає

$$\vec{F}' = m_B \vec{a} . \quad (4.63)$$

Додаючи рівняння (4.62) та (4.63), одержуємо $\vec{F} = (m_A + m_B) \vec{a}$, або

$$\vec{a} = \vec{F} / (m_A + m_B) . \quad (4.64)$$

Зазначимо, що такий самий результат можна здобути, якщо розглядати обидва бруски як одне тіло з масою $m_A + m_B$.

До цієї пори ми розглядали контактні сили, що направлені перпендикулярно (по нормалі) до поверхні контакту між двома тілами. Ці сили ми назвали **силами реакції**, \vec{F}_N . Крім того, контактна сила може мати складову вздовж поверхні. Сила взаємодії \vec{F}_m , паралельна поверхні, зветься **силою тертя**, $\vec{F}_N \perp \vec{F}_m$.

Влаштуємо такий експеримент. Приєднаємо пружину одним кінцем до бруска, іншим – до динамометра (рис. 4.14). Динамометр за допомогою мотузки з'єднаємо з двигуном так,

що коли двигун увімкнута, мотузка рівномірно намотується на вал двигуна. У початковий момент часу пружину вважаємо недеформованою.

Увімкнемо двигун. Мотузка почне рівномірно намотуватись на вал, пружина почне

розтягуватись. На брусок з боку пружини почне діяти сила \vec{F} паралельно до поверхні. Величину цієї сили F показуватиме динамометр (рис. 4.15). Спочатку ($0 < t < t_1$) ця сила за абсолютною величиною зростатиме лінійно. При цьому брусок лишатиметься нерухомим. Це означає, що сила \vec{F} урівноважуватиметься якоюсь іншою силою. Ця інша сила діє на брусок з боку поверхні. Її називають **силою тертя спокою** $\vec{F}_m = -\vec{F}$. Підкреслимо, що сила тертя спокою не має певного значення – вона залежить від того, яку зовнішню силу вона врівноважує.

З плином часу сила F зростатиме, і настане момент часу $t = t_1$, коли брусок A почне рухатись. Чим більш гладкою є поверхня, тим раніше брусок прийде у рух. Позначимо це граничне значення сили тертя як F_{mc} (індекс «с» означає «статична»). Частка F_{mc} до сили нормальної реакції F_N характеризує **статичний коефіцієнт тертя** μ_c :

$$\mu_c \equiv F_{mc} / F_N . \quad (4.65)$$

Шарль Огюстен Кулон² експериментально встановив, що для більшості сухих поверхонь μ_c майже не залежить від F_N та від площі контакту.

Через короткий проміжок часу ($t > t_2$) рух бруска

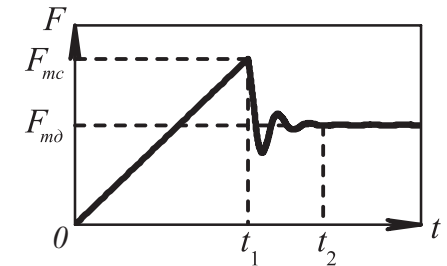


Рис. 4.15. До визначення статичного та динамічного коефіцієнтів тертя

² Кулон (Coulomb) Шарль Огюстен (1736-1806) – французький фізик, військовий інженер. Член Паризької академії наук. Працював у галузі електрики, магнетизму, прикладної механіки.

стабілізується: він стає рівномірним. При цьому в напрямку, протилежному до його швидкості, на нього, як і раніше, діє сила, проте тепер це – **сила тертя ковзання** F_{mo} (індекс «d» означає «динамічна»). Відповідний **динамічний коефіцієнт тертя** визначається так:

$$\mu_d \equiv F_{mo}/F_N. \quad (4.66)$$

Для більшості речовин μ_d є трохи меншим за μ_s . Ця різниця може відігравати значну роль. Наприклад, у повсякденному житті взимку часто можна спостерігати, як водії-новачки намагаються виїхати по слизькій дорозі вгору, надмірно натискаючи на «газ», і буксують на місці або навіть пливуть униз. Вони помиляються, бо намагаються використати силу тертя ковзання, тоді як досвідчені водії на повільній швидкості потрошку долають шлях угору, не зриваючись на пробуксовку. Умисне або підсвідомо вони при цьому використовують ту обставину, що статичний коефіцієнт тертя є більшим за динамічний (таблиця 1).

Таблиця 1. Статичні та динамічні коефіцієнти тертя

Поверхні	μ_s	μ_d
Сталь по сталі	0.74	0.57
Скло по склу	0.94	0.40
Метал по металу (зі змазкою)	0.15	0.06
Крига по кризі	0.10	0.03
Тефлон по тефлону	0.04	0.04
Покришка по бетону	1.00	0.80
Покришка по мокрій дорозі	0.60	0.40
Покришка по снігу	0.30	0.20

Як установив Кулон, для сухих поверхонь динамічний коефіцієнт тертя майже не залежить від притискаючої сили F_N ,

площі контакту між тілами та швидкості відносного руху.

У багатьох задачах із тертям коефіцієнт тертя задають. При цьому силу тертя ковзання обчислюють, як добуток коефіцієнта тертя μ на притискаючу силу F_N .

Тертя є досить складним явищем. Для його правильного пояснення потрібно знання фізики твердого тіла та хімії.

Зазначимо, що на відміну від сили тертя ковзання, яку завжди направлено протилежно до швидкості руху тіла відносно поверхні, напрямок сили тертя спокою не завжди так само легко визначити. Зокрема, коли автомобіль розганяється по трасі, причиною його прискорення є саме сила тертя спокою. Тобто силу тертя спокою в цьому випадку направлено вздовж швидкості. При цьому виникає також і **сила тертя кочення**. Її механізм полягає в тому, що коли колесо котиться по поверхні зі швидкістю \vec{v}_0 , воно слабко деформує поверхню (рис. 4.16). Поверхня, в свою чергу, деформує колесо. Руху колеса перешкоджає сила пружної деформації \vec{F}_{np1} з боку тієї частини поверхні, на яку в'їжджає колесо. Разом із тим, та частина поверхні, з якої колесо з'їжджає, підштовхує колесо з силою пружної деформації \vec{F}_{np2} . Якби матеріали, з яких виготовлено колесо та покриття, були ідеально пружними, то сума паралельних до швидкості \vec{v}_0 складових сил \vec{F}_{np1} і \vec{F}_{np2} дорівнювала б нулю. Після

того, як колесо з'їжджає з певної ділянки дороги, ця ділянка майже повертається до свого первісного, недеформованого стану. Через непружність деформації колеса та поверхні дороги частина енергії розсіюється. Кажуть, що відбувається дисипація енергії. З повсякденного досвіду

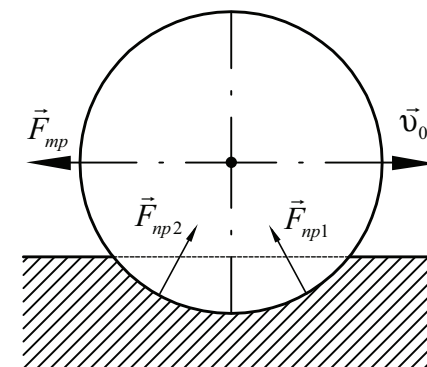


Рис. 4.16. До пояснення природи сили тертя кочення

відомо, що велосипедом легше їхати по ґрунтовій дорозі, коли вона є сухою, ніж після дощу, коли доводиться витратити енергію на розсування ґрунту та створення колії. Втрата енергії колеса на одиниці довжини шляху за абсолютною величиною дорівнює силі тертя кочення.

III. Кулон 1781 року експериментально встановив, що сила тертя кочення є прямо пропорційною до притискаючої сили N та зворотно пропорційна до радіуса котка r :

$$F_{mp} = \delta N / r, \quad (4.67)$$

тут δ – це коефіцієнт тертя кочення. За розмірністю $[\delta]=\text{м}$. Наприклад, у випадку кочення гумового колеса по бетону $\delta=15\div 35$ мм. Тобто, сила тертя кочення є набагато меншою за силу тертя ковзання, тому винахід людством колеса вважається за один із найважливіших, і тому силою тертя кочення в задачах механіки, як правило, нехтують.

4.13. Приклади розв'язання задач, у яких ураховують тертя

Задача 1

Дано: тіло масою m ковзає по похилій поверхні, яка розташована під кутом ϑ до горизонтальної площини.

Знайти: прискорення тіла.

Розв'язання:

На рис. 4.17 зображені три сили, що діють на масу m : силу нормальної реакції опори \vec{N} , силу тертя \vec{F}_m направлено проти руху, і силу тяжіння $m\vec{g}$ направлено вниз. Векторна сума цих сил дає

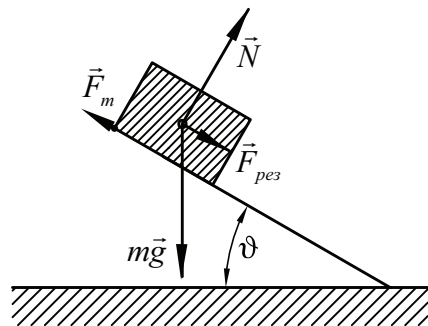


Рис. 4.17. до задачі 1

результуючу силу $\vec{F}_{рез}$, $\vec{F}_{рез} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_m$, яку спрямовано вздовж поверхні, $F_{рез} = mg \sin \vartheta - F_m$:

$$ma = mg \sin \vartheta - F_m. \quad (4.68)$$

За відсутності тертя прискорення дорівнює $a = g \sin \vartheta$. За наявності тертя ковзання $F_m = \mu_d N$. Сила реакції N набуває такого значення, щоб напрям результуючої сили $F_{рез}$ співпадав із напрямом руху. Для визначення притискаючої сили N скористаємося проекцією другого закону Ньютона на напрямок, перпендикулярний до похилої площини:

$$0 = N - mg \cos \vartheta. \quad (4.69)$$

Отже, прискорення тіла має вигляд,

$$a = g \sin \vartheta - \mu_d g \cos \vartheta. \quad (4.70)$$

Звідси ми бачимо, що похилу площину можна використати для зменшення прискорення тіла, що виникає завдяки силі тяжіння. Зокрема, аби брусок ковзав по похилій площині без прискорення, $a=0$, кут нахилу має задовольняти умові $g \sin \vartheta = \mu_d g \cos \vartheta$, тобто, $\tan \vartheta = \mu_d$.

Відповідь: $a = g \sin \vartheta - \mu_d g \cos \vartheta$.

Задача 2

Дано: Санчата в'їжджають з льоду на асфальт, маючи швидкість $v_0=6$ м/с. Коефіцієнт тертя санчат по льоду $\mu_l=0$, по асфальту – $\mu_a=1$. Довжина ковзанів санчат $l=2$ м.

Знайти: відстань, яку санчата проїдуть по асфальту.

Розв'язання:

Спочатку вважатимемо санчата за матеріальну точку. Тоді відстань S , яку санчата проїдуть по асфальту, визначимо з умови, що втрати кінетичної енергії від початку руху по асфальту до зупинки $(-0.5mv_0^2)$ обумовлені від'ємною роботою сили тертя ковзання $F_m = \mu_d N = \mu_d mg$. Оскільки притискаюча сила в цьому випадку є незмінною, то ця робота дорівнює

$$A_m = -\mu_a mgS. \quad (4.71)$$

Прирівнявши втрати кінетичної енергії до роботи сили тертя, $(-0.5mv_0^2) = -\mu_a mgS$, дістаємо, що санчата проїхали до асфальту відстань

$$S = v_0^2 / (2\mu_a g). \quad (4.72)$$

На цьому задачу було б завершено, якби не виявилось, що відстань $S = 1.8$ м не є великою порівняно з розмірами санчат. Через це санчата не можна вважати в цій задачі за матеріальну точку, а слід враховувати їхні скінченні розміри.

Тепер розглянемо докладніше, як санчата в'їжджають на кригу (рис. 4.18). Оскільки іншого не зазначено в умовах задачі, вважатимемо для спрощення, що вагу санчат рівномірно розподілено по їхніх

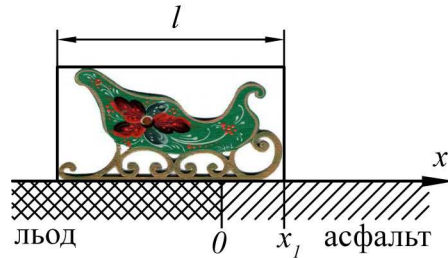


Рис. 4.18 до задачі 2

ковзанах. У момент, коли санчата в'їхали на асфальт на відстань $x_1 \leq l$, на кригу припадає сила тиску з боку санчат $mg(l-x_1)/l$. Тут координату x_1 відраховано від переднього краю ковзанів. Завдяки нульовому коефіцієнту тертя санчат о кригу ця частина притискаючої сили не створює сили тертя. Решту тиску санчата чинять на асфальт із силою mgx_1/l . Відповідна сила тертя ковзання дорівнює $F_m = \mu_a N = \mu_a mgx_1/l = mgx_1/l$. Коли санчата в'їжджають на асфальт на відстань $x_1 \leq l$, сила тертя виконує роботу

$$A_m = -(mg/l) \int_0^{x_1} x dx = -mgx_1^2 / (2l). \quad (4.73)$$

Тобто, коли всі ковзани санчат з'їдуть на асфальт, сила тертя виконає роботу $-mgl/2 = -10m$ Дж, якої недостатньо, аби

обумовити зупинку санчат, чия початкова кінетична енергія була $18m$ Дж. Тому ще якусь додаткову відстань санчата проїжджають так, що вони повністю тиснуть лише на асфальт. При цьому вони виконують роботу $-mgS_1 = -8m$ Дж. Тобто, ця додаткова відстань дорівнює, $S_1 = 0.8$ м. Отже, санчата зупиняються, коли передній край ковзанів санчат в'їжджають на асфальт на відстань $l + S_1 = 2 + 0.8 = 2.8$ м.

Відповідь: 2.8 м.

Питання для самоконтролю до розділу 4. Силowe поле

1. Що таке силowe поле?
2. Які сили називають потенціальними?
3. Які сили називають центральними?
4. Які сили називають гіроскопічними?
5. Дайте визначення потенціальної енергії.
6. Дайте визначення повної механічної енергії.
7. Сформулюйте закон збереження повної механічної енергії.
8. Як за відомим просторовим розподілом потенціальної енергії знайти розподіл потенціальної сили?
9. Який рух матеріальної точки називають фінітним?
10. Який рух матеріальної точки називають інфінітним?
11. Що таке момент імпульсу?
12. Що таке момент сили?
13. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу.
14. Чому момент імпульсу зберігається в центральному полі?
15. Що таке секторіальна швидкість?
16. Сформулюйте перший закон Кеплера.
17. Сформулюйте другий закон Кеплера.
18. Сформулюйте третій закон Кеплера.
19. Що таке перша космічна швидкість?
20. Що таке друга космічна швидкість?
21. Що таке третя космічна швидкість?
22. Що таке зведена маса?

23. Що таке сила тертя спокою?
24. Що таке сила тертя ковзання?
25. Що таке сила тертя кочення?
26. Чим відрізняються статичний та динамічний коефіцієнт тертя ковзання?
27. Як сила тертя кочення залежить від радіусу котка?

5. Механічний рух матеріальної точки у неінерціальних системах відліку

Досі ми вивчали рух в інерціальних системах відліку, де основним законом динаміки був другий закон Ньютона: $m\vec{a}_i = \sum \vec{F}_{зовн.}$. Тут індекс i означає, що прискорення виміряно відносно інерціальної системи відліку. Знайдемо тепер рівняння руху відносно неінерціальних систем відліку, які рухаються з прискоренням відносно інерціальних. При цьому залишатимемося в межах нерелятивістського наближення: $v \ll c$. Скористаємося при цьому звичайним для фізики методом: спочатку розглянемо простий випадок, тоді побудуємо точну теорію, після чого перевіримо її на простому випадку, з якого починали.

Розглянемо наступний простий випадок: неінерціальну систему відліку пов'яжемо з диском, який рівномірно обертається відносно нерухомої інерціальної системи відліку зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\Omega} = \text{const}$, перпендикулярною до площини диска. Нехай матеріальна точка рівномірно рухається

по краю диска. Відносно диска швидкість матеріальної точки є сталою за модулем: $|\vec{v}_n| = \text{const}$. Тут індекс n вказує на те, що швидкість виміряно відносно неінерціальної системи відліку. Відносно інерціальної системи відліку швидкість \vec{v}_i матеріальної точки дорівнює сумі швидкості \vec{v}_n матеріальної точки відносно точки A на диску, в якій зараз перебуває матеріальна точка, та швидкості $\vec{\Omega} \times \vec{r}_n$ точки A відносно інерціальної систем відліку, $\vec{v}_i = \vec{v}_n + \vec{\Omega} \times \vec{r}_n$. Тут \vec{r}_n – це радіус-вектор матеріальної точки; при цьому центри інерціальної та неінерціальної систем відліку в цій задачі співпадають, тому $\vec{r}_n = \vec{r}_i$. За напрямком швидкість $\vec{\Omega} \times \vec{r}_n$ точки A відносно інерціальної систем відліку є перпендикулярною до радіус-вектора \vec{r}_n ; для визначеності вважатимемо вектори \vec{v}_n та $\vec{\Omega} \times \vec{r}_n$ такими, що співпадають за напрямком. Оскільки вектор кутової швидкості є перпендикулярним до площини диска, то $|\vec{\Omega} \times \vec{r}_n| = \Omega r_n$.

Оскільки матеріальна точка рівномірно рухається по колу радіуса $|\vec{r}_n| = r$, то в інерціальній системі відліку цей рух характеризується доцентровим прискоренням:

$$a_i = v_i^2 / r = (v_n + \Omega r)^2 / r = v_n^2 / r + 2v_n \Omega + \Omega^2 r = \sum_j F_j / m. \quad (5.1)$$

В неінерціальній системі відліку матеріальна точка також рухається по колу, але з іншою швидкістю, тому доцентрове прискорення матеріальної точки в неінерціальній системі відліку дорівнює

$$a_n = v_n^2 / r. \quad (5.2)$$

Скориставшись рівняннями (5.1) та (5.2), запишемо добуток маси матеріальної точки на її прискорення відносно неінерціальної системи відліку:

$$\begin{aligned}
ma_n &= mv_n^2/r = ma_i - 2mv_n\Omega - m\Omega^2r = \\
&= \sum_j F_j - 2mv_n\Omega - m\Omega^2r. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Висновок: в неінерціальних системах відліку на додаток до справжньої сили $\sum_j F_j$, дія якої зумовлена взаємодією тіла

з фізичними об'єктами, з'являються дві «додаткові сили»: $(-2mv_n\Omega)$ та $(-m\Omega^2r)$. Перша з них називається силою Коріоліса³, друга – це відцентрова сила інерції. Обидві у нашому випадку орієнтовані від осі обертання диска. Відцентрова сила інерції завжди направлена вздовж найкоротшої лінії, що з'єднує вісь обертання та положення матеріальної точки. Сила Коріоліса в загальному випадку залежить не лише від швидкості руху матеріальної точки відносно неінерціальної системи відліку та кутової швидкості обертання неінерціальної системи відліку, але й від взаємної орієнтації цих векторів.

5.1. Теорема Коріоліса

У загальному випадку рух неінерціальної системи можна описати в наступний спосіб. Центр неінерціальної системи відліку рухається довільно відносно інерціальної системи відліку, його положення відносно центру інерціальної системи відліку задаватимемо радіус-вектором $\vec{R}(t)$. Тоді положення матеріальної точки відносно інерціальної системі відліку $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_n$.

Крім того, неінерціальна система відліку обертається з довільною кутовою швидкістю $\vec{\Omega}(t)$, яка в загальному випадку змінюється як за абсолютною величиною, так і напрямком.

³ Коріоліс (Coriolis) Гаспар-Гюстав (1792-1843) – французький математик, інженер і вчений.

Оберемо в неінерціальній системі відліку орти декартової системи координат $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ для опису положення матеріальної точки, тоді її радіус-вектор відносно неінерціальної системи відліку задається в такий спосіб: $\vec{r}_n = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Звернемо увагу на те, що хоча орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ й лишаються згідно з визначенням незмінними за довжиною, однак через обертання неінерціальної системи відліку ці вектори змінюються за напрямком відносно інерціальної системи відліку. Швидкість зміни ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ з часом було визначено в параграфі 1.5:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{k}. \quad (5.4)$$

Тому похідна від радіус-вектора \vec{r}_n за часом не дорівнює швидкості матеріальної точки відносно неінерціальної системи відліку \vec{v}_n , а визначається так:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}_n}{dt} &= \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt} = \\
&= \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + x \frac{d\vec{i}}{dt} \right) + \left(\frac{dy}{dt} \vec{j} + y \frac{d\vec{j}}{dt} \right) + \left(\frac{dz}{dt} \vec{k} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \right) = \\
&= \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right) + \left(x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt} \right). \quad (5.5)
\end{aligned}$$

Спостерігач у неінерціальній системі відліку вважає орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ незмінними в часі за довжиною і напрямком, він спостерігає лише зміну координат $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$ з часом, тому $\left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right) = \vec{v}_n$:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}_n}{dt} &= \vec{v}_n + x[\vec{\Omega}, \vec{i}] + y[\vec{\Omega}, \vec{j}] + z[\vec{\Omega}, \vec{k}] = \\ &= \vec{v}_n + [\vec{\Omega}, (\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + \vec{z}\vec{k})] = \vec{v}_n + [\vec{\Omega}, \vec{r}_n].\end{aligned}\quad (5.6)$$

Позначимо швидкість руху центру неінерціальної системи відліку відносно інерціальної системи відліку: $d\vec{R}/dt \equiv \vec{V}$. Тоді швидкість руху матеріальної точки відносно інерціальної системи відліку $\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt$ визначається таким співвідношенням:

$$\vec{v}_i = d\vec{R}/dt + d\vec{r}_n/dt = \vec{V} + \vec{v}_n + [\vec{\Omega}, \vec{r}_n]. \quad (5.7)$$

Переносною швидкістю автори деяких підручників із фізики називають суму:

$$\vec{v}_{пер} = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}_n]. \quad (5.8)$$

Її роль полягає в тому, що вона немовби «переносить» спостерігача з неінерціальної системи відліку до інерціальної: кажуть, що абсолютна швидкість \vec{v}_i дорівнює сумі відносної швидкості \vec{v}_n та переносної $\vec{v}_{пер}$, $\vec{v}_i = \vec{v}_n + \vec{v}_{пер}$.

Використовуючи результат (5.7), порахуємо тепер прискорення \vec{a}_i матеріальної точки відносно інерціальної системи відліку:

$$\vec{a}_i = d\vec{v}_i/dt = d\vec{V}/dt + d\vec{v}_n/dt + [d\vec{\Omega}/dt, \vec{r}_n] + [\vec{\Omega}, d\vec{r}_n/dt]. \quad (5.9)$$

Перший доданок у правій частині рівняння (5.9) $d\vec{V}/dt \equiv \vec{A}$ – це прискорення, з яким центр неінерціальної системи відліку рухається відносно інерціальної. Другий доданок у правій частині (5.9) можна порахувати аналогічно до викладки (5.6): $\frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{a}_n + [\vec{\Omega}, \vec{v}_n]$; тут \vec{a}_n – це прискорення матеріальної точки, яким його бачить спостерігач із неінерціальної системи відліку. У третьому доданку в правій частині (5.9) похідна від кутової

швидкості $d\vec{\Omega}/dt \equiv \vec{\epsilon}$ – це кутове прискорення, з яким обертається неінерціальна система відліку. До четвертого доданку в правій частині (5.9) ми підставимо вираз для похідної $d\vec{r}_n/dt$ з викладки (5.6): $[\vec{\Omega}, d\vec{r}_n/dt] = [\vec{\Omega}, \vec{v}_n] + \vec{\Omega} \times [\vec{\Omega}, \vec{r}_n]$. Після зведення подібних отримуємо остаточно:

$$\vec{a}_i = \vec{A} + \vec{a}_n + 2[\vec{\Omega}, \vec{v}_n] + [\vec{\epsilon}, \vec{r}_n] + \vec{\Omega} \times [\vec{\Omega}, \vec{r}_n]. \quad (5.10)$$

Таким чином, ми довели теорему Коріоліса. Сформулюємо її: «При переході від неінерціальної системи відліку до інерціальної системи відліку матеріальна точка набуває додатково ще прискорення Коріоліса $\vec{a}_{кор}$ та переносне прискорення $\vec{a}_{пер}$ ». Або у формі математичного виразу теорема Коріоліса має вигляд:

$$\vec{a}_i = \vec{a}_n + \vec{a}_{кор} + \vec{a}_{пер}. \quad (5.11)$$

Знаючи прискорення тіла відносно неінерціальної системи відліку \vec{a}_n , можна здобути його прискорення відносно інерціальної системи відліку \vec{a}_i , якщо додати до \vec{a}_n ще переносне прискорення $\vec{a}_{пер}$ (воно нібито «переносить» спостерігача з неінерціальної системи відліку до інерціальної):

$$\vec{a}_{пер} = \vec{A} + [\vec{\epsilon}, \vec{r}_n] + \vec{\Omega} \times [\vec{\Omega}, \vec{r}_n], \quad (5.12)$$

та прискорення Коріоліса $\vec{a}_{кор}$:

$$\vec{a}_{кор} = 2[\vec{\Omega}, \vec{v}_n]. \quad (5.13)$$

Прискорення Коріоліса виділено окремо, бо воно виникає лише в разі, коли тіло рухається відносно неінерціальної системи відліку, що обертається, $\vec{\Omega} \neq 0$, $\vec{v}_n \neq 0$. Зазначимо також, що переносне прискорення не дорівнює похідній від переносної швидкості за часом: $\vec{a}_{пер} \neq d\vec{v}_{пер}/dt$.

До переносного прискорення входить подвійний векторний добуток, який можна переписати в простіший спосіб. Цей доданок називають **доцентровим прискоренням**, бо його орієнтовано перпендикулярно до осі, навколо якої обертається матеріальна точка:

$$\vec{a}_{доц} = [\vec{\Omega}, [\vec{\Omega}, \vec{r}]] = \vec{\Omega} (\vec{\Omega}, \vec{r}) - \vec{r} \Omega^2 = -\vec{r}_{\perp} \Omega^2. \quad (5.14)$$

Тут \vec{r}_{\perp} – це вектор, який проведено від осі обертання до матеріальної точки.

Здобудемо рівняння, яке описує динаміку руху матеріальної точки у неінерціальних системах відліку, помноживши рівняння (5.11) на масу і врахувавши, що за другим законом Ньютона $m \vec{a}_i = \sum \vec{F}_{зовн}$:

$$m \vec{a}_n = \sum \vec{F}_{зовн} + \vec{F}_{пер} + \vec{F}_{кор}. \quad (5.15)$$

Отже, динаміку руху матеріальної точки в неінерціальних системах відліку визначають не лише реальні (фізичні) сили, але й додаткові, тобто такі, що пов'язані з неінерціальністю системи відліку. А саме, виникають сила Коріоліса

$$\vec{F}_{кор} = -m \vec{a}_{кор} = 2m [\vec{v}_n, \vec{\Omega}], \quad (5.16)$$

та переносна сила інерції, $\vec{F}_{пер}$, що складається з трьох доданків:

$$\vec{F}_{пер} = -m \vec{A} - m [\vec{\varepsilon}, \vec{r}_n] + \vec{r}_{\perp} m \Omega^2. \quad (5.17)$$

До складу переносної сили інерції входять дві сили інерції, які найчастіше зустрічаються в нашому побуті. Вони мають окремі назви: поступальна сила інерції

$$\vec{F}_{пост} = -m \vec{A}, \quad (5.18)$$

та відцентрова сила інерції

$$\vec{F}_{відц} = \vec{r}_{\perp} m \Omega^2. \quad (5.19)$$

Зокрема, в неінерціальній системі відліку, яка обертається із кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$ відносно інерціальної системи відліку, на матеріальну точку, яка міститься в точці \vec{r} , відцентрова сила $\vec{F}_{відц} = \vec{r}_{\perp} m \Omega^2$ діє в напрямку від осі обертання, тобто в напрямку вектора \vec{r}_{\perp} (рис. 5.1).

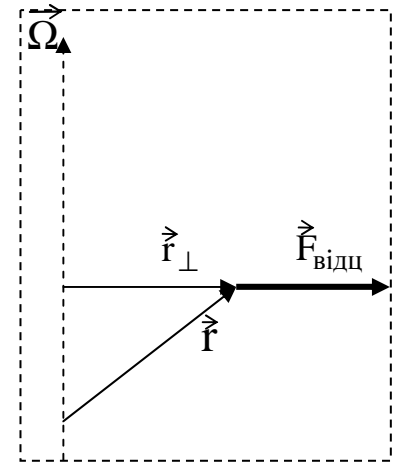


Рис. 5.1.

Розглянемо неінерціальну систему відліку, яка пов'язана з Землею, тобто яка обертається із кутовою швидкістю $\vec{\Omega}$ відносно інерціальної системи відліку (рис. 5.2). В цій неінерціальній системі відліку на матеріальну точку 1, яка рухається у північній півкулі зі швидкістю \vec{v}_{i1} вздовж меридіана на південь, сила Коріоліса $\vec{F}_{кор1}$ діє вздовж паралелі на захід, тобто перпендикулярно до площини рисунка у напрямку до читача. Якщо ж матеріальна точка 2 рухається зі швидкістю \vec{v}_{i2}

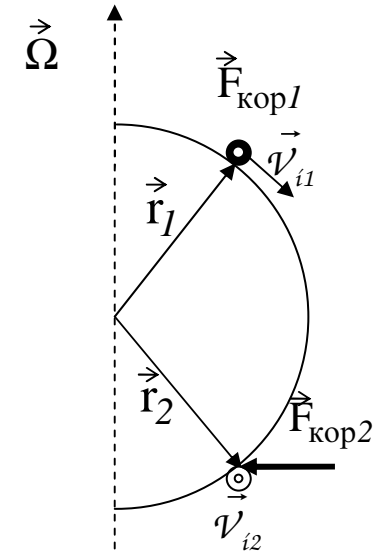


Рис. 5.2.

вздовж паралелі на захід, то сила Коріоліса $\vec{F}_{кор2}$ діє на цю точку у напрямку до осі обертання.

Застосуємо тепер теорему Коріоліса (5.11) для опису того простого випадку, що його розглядали на початку Розділу 5. Оскільки центр диску (тобто центр неінерціальної системи відліку) є нерухомим, $\vec{A}=0$, і диск обертається зі сталою кутовою швидкістю, $\vec{\varepsilon}=0$, то $\vec{a}_{пер} = \vec{a}_{доц} = -\vec{r}_{\perp} \Omega^2$. Отже, рівняння (5.11) набуває наступного вигляду: $\vec{a}_i = \vec{a}_n + 2[\vec{\Omega}, \vec{v}_n] - \vec{r}_{\perp} \Omega^2$, який повністю узгоджується з (5.1). В цьому й полягає сенс методу загальної фізики: спочатку ми розглянули просту задачу, тоді – складну (повну). Розв'язання простої задачі допомагає зрозуміти фізичну картину, а також дає можливість перевірити складний розв'язок складної (повної) задачі.

5.2. Прояви сил інерції на Землі

Коли авто мчить із Харкова (у північній півкулі) на південь (до Криму), то силу Коріоліса $\vec{F}_{кор1}$, яка діє на нього, орієнтовано на захід, вона тисне авто в правий бік. Коли авто мчить з Харкова на захід (до Києва), то $\vec{F}_{кор2}$ притискає авто до осі обертання Землі, тобто додає до сили тяжіння (вниз до Землі), а також тисне авто в правий бік. Куди б та з якою швидкістю не їхало авто, але $\vec{F}_{відц}$ завжди зменшує його вагу, $\vec{F}_{відц} \parallel \vec{r}_{\perp}$ (цю силу інерції направлено від осі обертання Землі); а також тисне на авто в бік півдня (півночі) у північній (південній) півкулі.

Інший приклад: у Дніпра, що тече в північній півкулі на південь, правий (західний) берег є крутим. Це обумовлено дією сили Коріоліса, яка притискає течію до правого берега, внаслідок чого цей берег виявляється підмитим. Цей приклад є добре відомим з історії Другої світової війни: через крутизну правого берега Дніпра радянським військам було набагато важче форсувати Дніпро 1943 року, ніж нацистським – 1941 року. І у

Райна, що тече також у північній півкулі, але на північ, крутим є також правий (відносно течії) берег, але тепер це вже – східний берег.

Цікавими проявами дії сили Коріоліса є відхилення падаючого тіла від напрямку виска та маятник Фуко⁴. Обертання площини, в якій відбуваються коливання маятника Фуко, навколо вертикальної осі є прямим підтвердженням добового обертання Землі. Розглянемо ці два явища нижче більш детально.

5.3. Відхилення тіл, що падають, від напрямку виска

Дослідимо, як неінерціальність системи відліку, яку пов'язано з Землею, що обумовлена її добовим обертанням, впливає на траєкторію тіл, що вільно падають у полі тяжіння поблизу поверхні Землі. Порівняємо рівняння, що описують висок:

$$0 = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{A} + \vec{r}_{\perp} m\Omega^2, \quad (5.20)$$

та падаюче тіло:

$$m\vec{a}_n = m\vec{g} - m\vec{A} + \vec{r}_{\perp} m\Omega^2 + 2m[\vec{v}_n, \vec{\Omega}]. \quad (5.21)$$

Ліва частина рівняння (5.20) дорівнює нулю, бо висок є нерухомим відносно Землі. Зовнішні сили, які діють на висок, – це сила тяжіння $m\vec{g}$ та сила \vec{T} натягу мотузки, на якій підвішено висок. Оскільки Земля обертається практично

⁴ Фуко (Foucault) Жан Бернар Леон (1819-1868) – член Паризької, Берлінської, Петербурзької АН, Лондонського королівського товариства; визначив швидкість світла з високою точністю $c=(298000\pm500)$ км/с; експериментально довів маятником обертання Землі навколо осі. Він винайшов гіроскоп, відкрив електричні струми Фуко.

рівномірно, її кутове прискорення і відповідна сила інерції дорівнюють нулю в обох рівняннях: (5.20) та (5.21), $\vec{\varepsilon}=0$ і $-m[\vec{\varepsilon}, \vec{r}_H]=0$. Оскільки висок не рухається відносно Землі, $\vec{v}_H=0$, то в правій частині рівняння (5.20) відсутня сила Коріоліса, $2m[\vec{v}_H, \vec{\Omega}]=0$.

Права частина рівняння (5.21) не містить сили \vec{T} натягу мотузки, бо воно описує тіло, що падає. Натомість, оскільки в падаючого тіла швидкість відносно Землі є ненульовою, $\vec{v}_H \neq 0$, в правій частині рівняння (5.21) враховано силу Коріоліса.

Отже, напрямок виска $-\vec{T} = m\vec{g} - m\vec{A} + \vec{r}_\perp m\Omega^2$, який визначає рівняння (5.20), відрізняється від напрямку $m\vec{a}_H$, в якому падає тіло в полі тяжіння і який визначається рівнянням (5.21), доданком $2m[\vec{v}_H, \vec{\Omega}]$, тобто дією сили Коріоліса. Напрямок виска, як відомо з повсякденного досвіду, можна вважати вертикальним. Це пов'язано з тим, що прискорення центру Землі та доцентрове прискорення є малими порівняно з прискоренням вільного падіння. Тому надалі позначатимемо суму $m\vec{g} - m\vec{A} + \vec{r}_\perp m\Omega^2 \equiv m\vec{G}$, вважаючи її майже вертикальною, але такою, що трохи відрізняється від \vec{g} :

$$m\vec{a}_H = m\vec{G} + 2m[\vec{v}_H, \vec{\Omega}]. \quad (5.22)$$

Оскільки в нашій задачі не фігурують прискорення \vec{a}_i та швидкість \vec{v}_i тіла відносно інерціальної системи відліку, то індекси «н» в рівнянні (5.22) надалі опустимо. Скоротимо також рівняння (5.22) на масу тіла m :

$$\vec{a} = \vec{G} + 2[\vec{v}, \vec{\Omega}]. \quad (5.23)$$

Застосуємо для розв'язання рівняння (5.23) метод послідовних наближень, оскільки очікуваний вплив сили Коріоліса на траєкторію тіла є незначним і його можна врахувати як малу поправку до сили тяжіння, $|2[\vec{v}, \vec{\Omega}]| \ll |\vec{G}|$.

Оцінимо, наскільки є справедливою ця сильна нерівність. Скажімо, за десять секунд тіло, яке падає без початкової швидкості, пролетить у полі тяжіння $0.5Gt^2 \approx 500$ метрів, досягши швидкості $v \approx 100$ метрів за секунду. Беручи до уваги, що кутова

швидкість добового обертання Землі $\Omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \approx 7.3 \times 10^{-5}$

радіанів за секунду, і синус кута між векторами \vec{v} та $\vec{\Omega}$ для Харкова (50° північної широти) становить 0.64, порахуємо прискорення Коріоліса за модулем $a_{кор} \approx 2 \times 100 \times 7.3 \times 10^{-5} \times 0.64 \sim 10^{-2} \ll 1$.

Тому у нульовому наближенні ми знехтуємо дією сили Коріоліса в рівнянні (5.23):

$$\begin{aligned} \vec{a}^{(0)} &= \vec{G}, \quad \vec{v}^{(0)} = \vec{v}^{(0)}(0) + \int_0^t \vec{G} dt = \vec{G}t, \\ \vec{r}^{(0)} &= \vec{r}^{(0)}(0) + \int_0^t \vec{G} t dt = \frac{\vec{G}t^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Тут верхній індекс «(0)» вказує на те, що відповідні величини визначено в нульовому наближенні. Тут і надалі, вважаємо, що початок координат розташовано в точці, з якої кинули тіло. Результат (5.24) добре узгоджується з тим, що є добре відомим з розв'язання задачі про рух тіла, яке кинули під кутом до горизонту, у параграфі 1.7. У нульовому наближенні прискорення, швидкість та переміщення тіла, яке падає без початкової швидкості, співпадають за напрямком із виском, $\vec{a}^{(0)} \parallel \vec{v}^{(0)} \parallel \vec{r}^{(0)} \parallel \vec{G}$.

У першому наближенні врахуємо слабку силу Коріоліса у вигляді малої поправки до вже здобутого нульового наближення. У цьому наближенні шукаємо прискорення, швидкість і переміщення у вигляді двох доданків: нульового наближення та першої поправки:

$$\vec{a} = \vec{a}^{(0)} + \vec{a}^{(1)}, \quad \vec{v} = \vec{v}^{(0)} + \vec{v}^{(1)}, \quad \vec{r} = \vec{r}^{(0)} + \vec{r}^{(1)}, \quad (5.25)$$

яку вважаємо малою, $|\vec{a}^{(1)}| \ll |\vec{a}^{(0)}|$, $|\vec{v}^{(1)}| \ll |\vec{v}^{(0)}|$, $|\vec{r}^{(1)}| \ll |\vec{r}^{(0)}|$. Підставимо прискорення у вигляді (5.25) до розв'язуваного рівняння (5.23):

$$\vec{a}^{(0)} + \vec{a}^{(1)} = \vec{G} + 2[\vec{v}^{(0)}, \vec{\Omega}]. \quad (5.26)$$

Тут ми підставили швидкість у вигляді лише одного доданку, $\vec{v} = \vec{v}^{(0)}$, бо більше з розв'язку, що здобуто у нульовому наближенні, нам нічого не відомо. Враховуючи перше з рівнянь (5.24), знаходимо з (5.26) першу поправку до прискорення:

$$\vec{a}^{(1)} = 2[\vec{G}t, \vec{\Omega}]. \quad (5.27)$$

Здобудемо швидкість інтегруванням прискорення:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}^{(0)} + \vec{v}^{(1)} = \vec{v}^{(0)}(0) + \int_0^t (\vec{a}^{(0)} + \vec{a}^{(1)}) dt = \\ &= \vec{G}t + \int_0^t (2[\vec{G}t, \vec{\Omega}]) dt. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Враховуючи, що з нульового наближення (формула (5.24)) нам відома швидкість у цьому наближенні, $\vec{v}^{(0)} = \vec{G}t$, з (5.28) дістаємо першу поправку до швидкості, обумовлену дією сили Коріоліса:

$$\vec{v}^{(1)} = t^2[\vec{G}, \vec{\Omega}]. \quad (5.29)$$

Тепер можемо визначити першу поправку до переміщення, обумовлену дією сили Коріоліса:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}^{(0)} + \vec{r}^{(1)} = \\ &= \vec{r}^{(0)}(0) + \int_0^t (\vec{v}^{(0)} + \vec{v}^{(1)}) dt = \frac{\vec{G}t^2}{2} + \int_0^t (t^2[\vec{G}, \vec{\Omega}]) dt. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Беручи до уваги відоме з нульового наближення (формули (5.24)) значення переміщення, $\vec{r}^{(0)} = 0.5\vec{G}t^2$, остаточно маємо з (5.30):

$$\vec{r}^{(1)} = [\vec{G}, \vec{\Omega}] \frac{t^3}{3}. \quad (5.31)$$

Отже, врахування неінерціальності системи відліку, яку пов'язано з добовим обертанням Землі, у першому наближенні призводить до малого відхилення падаючого тіла від напрямку виска в бік векторного добутку $[\vec{G}, \vec{\Omega}]$, тобто на схід.

Розв'язання задачі в другому наближенні нагадує третій виток спіралі. Шукатимемо розв'язок рівняння (5.23) у вигляді суми, до якої поряд із нульовим і першим порядком, які були враховані в (5.25), входять поправки другого порядку малості:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}^{(0)} + \vec{a}^{(1)} + \vec{a}^{(2)}, \quad \vec{v} = \vec{v}^{(0)} + \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}, \\ \vec{r} &= \vec{r}^{(0)} + \vec{r}^{(1)} + \vec{r}^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Підстановка виразів (5.32) до основного рівняння (5.23) дає результат, який лише на перший погляд може видатися громіздким:

$$\vec{a} = \vec{a}^{(0)} + \vec{a}^{(1)} + \vec{a}^{(2)} = \vec{G} + 2[\vec{v}^{(0)}, \vec{\Omega}] + 2[\vec{v}^{(1)}, \vec{\Omega}]. \quad (5.33)$$

Підкреслимо, що до рівняння (5.33) входить вираз для швидкості, відомий із попереднього (першого) наближення. З урахуванням відомих із попереднього розгляду (формули (5.24) і (5.26)) зв'язків: $\vec{a}^{(0)} = \vec{G}$ і $\vec{a}^{(1)} = 2[\vec{v}^{(0)}, \vec{\Omega}]$, – рівняння (5.33) помітно спрощується:

$$\vec{a}^{(2)} = 2[\vec{v}^{(1)}, \vec{\Omega}] = 2[t^2[\vec{G}, \vec{\Omega}], \vec{\Omega}]. \quad (5.34)$$

Тут ураховано явний вираз (5.29) для першої поправки до швидкості $\vec{v}^{(1)}$. Проінтегрувавши за часом другу поправку $\vec{a}^{(2)}$

до прискорення (5.34), здобудемо другу поправку $\vec{v}^{(2)}$ до швидкості, яку обумовлено дією сили Коріоліса:

$$\vec{v}^{(2)} = \int_0^t \vec{a}^{(2)} dt = 2 \left[[\vec{G}, \vec{\Omega}], \vec{\Omega} \right] \int_0^t t^2 dt = \frac{2t^3}{3} \left[[\vec{G}, \vec{\Omega}], \vec{\Omega} \right]. \quad (5.35)$$

Наступне інтегрування – швидкості за часом – дає другу поправку до переміщення, обумовлену врахуванням неінерціальності системи відліку:

$$\vec{r}^{(2)} = \int_0^t \vec{v}^{(2)} dt = \frac{2}{3} \left[[\vec{G}, \vec{\Omega}], \vec{\Omega} \right] \int_0^t t^3 dt = \frac{t^4}{6} \left[[\vec{G}, \vec{\Omega}], \vec{\Omega} \right]. \quad (5.36)$$

Урахування неінерціальності систем відліку, обумовленої добовим обертанням Землі, у другому порядку малості дало поправки до прискорення, швидкості та переміщення, які спрямовано від осі обертання. У північній півкулі це означає, що тіло падає трохи повільніше, ніж передбачає нульове наближення; крім того, тіло трохи відхиляється на південь.

Об'єднаємо здобуті результати для переміщення (5.24), (5.31), (5.36) в одній формулі:

$$\vec{r} = \vec{r}^{(0)} + \vec{r}^{(1)} + \vec{r}^{(2)} = \frac{\vec{G}t^2}{2} + [\vec{G}, \vec{\Omega}] \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{6} \left[[\vec{G}, \vec{\Omega}], \vec{\Omega} \right]. \quad (5.37)$$

Проаналізуємо здобутий розв'язок. Перше, він має вигляд ряду за степенями $\vec{\Omega}$. Друге, цей ряд сходиться, якщо наступний доданок є меншим за попередній:

$$\left| [\vec{G}, \vec{\Omega}] \frac{t^3}{3} \right| \ll \left| \frac{\vec{G}t^2}{2} \right| \text{ або } \Omega t \ll 1. \quad (5.38)$$

Сильна нерівність (5.38) є умовою застосовності здобутого розв'язку (5.37) досліджуваної задачі. Вона означає, що методом послідовних наближень можна користуватись для визначення відхилення падаючого тіла від напрямку виска, якщо тіло падає

набагато менше за чотири години, тобто з висоти, набагато меншої від сімдесят двох кілометрів. Це – досить широкий діапазон застосування здобутого розв'язку.

Третє, чому ми увірвали тут процедуру розв'язання на другому порядку малості? З одного боку, оскільки ряд збігається, процедуру можна продовжувати за наведеною схемою, доки не буде досягнуто задану необхідну точність розрахунків. З іншого боку, тут представлено розв'язання з урахуванням нових фізичних результатів. Нагадаємо коротко: нульове наближення описує падіння тіла, перше наближення описує мале зміщення на схід, друге – ще менше відхилення тіла на південь. Це – три взаємно перпендикулярні напрямки, які є незалежними, отже, вони не зводяться один до одного. Неважко показати, що наступне, третє, наближення дасть поправку до переміщення, направлену на захід, яка за порядком величини в $(\Omega t)^2$ разів менша за відхилення тіла на схід. До того ж відхилення на схід і на захід – це відхилення вздовж однієї координати (паралелі). Отже, врахування наступного наближення лише дещо підправило би результат, відомий із першого наближення. Такий крок не має фізичного сенсу; він може обґрунтованим, якщо точність розрахунку відхилення вздовж паралелі, досягнута в першому наближенні, з якихось причин є незадовільною.

Порахуємо відхилення від напрямку виска для тіла, яке падає з висоти $h=100$ метрів. Для оцінки тривалості падіння t знехтуємо внеском поправки другого порядку, $t = \sqrt{2h/g} \approx \approx 4.5$ секунд. Величину відхилення x на схід порахуємо за формулою (5.31):

$$x = \frac{t^3}{3} g \Omega \cos \vartheta = \frac{2t^2}{3} \frac{gt^2}{2} \frac{2\pi}{T} \cos \vartheta = \frac{4\pi}{3} \frac{t}{T} h \cos \vartheta. \quad (5.39)$$

Тут T – період добового обертання Землі, ϑ – це географічна широта місця, $x=14$ мм. При цьому тіло відхиляється на південь (див. формулу (5.36)) на $y=1.8$ мікрон. Якщо тіло падає з висоти п'ятсот метрів, то відхилення на схід становить на широті Харкова 15.7 см.

Тобто, якщо гноми з казки Толкієна сидять на дереві сто метрів заввишки та кидають камінці у вовка, що чатує на них під деревом, то гномам можна напевне знехтувати силу Коріоліса, яка відхиляє «снаряд» на схід. При цьому ми вважаємо, що казковий вовк більший за розмірами, ніж $x=14$ мм.

До речі, умову (5.38) застосовності методу послідовних наближень можна отримати і з (5.39), якщо порівняти відхилення x із висотою падіння h : $\frac{x}{h} = \frac{4\pi}{3} \frac{t}{T} \cos \vartheta < 1$.

Попри невелику величину відхилення падаючого тіла від напрямку виска, це відхилення вдалось спостерігати у дослідах із падіння тіл у глибоких шахтах уже в середині XIX сторіччя.

5.4. Маятник Фуко

Розглянемо спочатку два граничні випадки. Спробуємо спостерегти коливання маятника на північному полюсі, вважаючи, що підвіс є незалежним від поверхні Землі. З точки зору спостерігача, який перебуває в інерціальній системі відліку площина a , в якій відбуваються коливання маятника, є нерухомою. При цьому Земля повертається під маятником з кутовою швидкістю $\Omega_0=1$ один оберт за добу проти стрілки годинника, коли дивитись згори. Відносно поверхні Землі площина a повертатиметься в протилежному напрямку – за стрілкою годинника. Це обертання обумовлено дією сили Коріоліса $2m[\vec{v}_n, \vec{\Omega}]$. На полюсі кутову швидкість обертання Землі $\vec{\Omega}$ спрямовано вертикально вгору. Швидкість маятника \vec{v}_n (при великій довжині підвісу) можна вважати горизонтальною, тобто перпендикулярною до земної осі: $\vec{v}_n \perp \vec{\Omega}$ і $F_{кор}=2m v_n \Omega$, – незалежно від того, уздовж якого меридіану коливається маятник.

На екваторі швидкість маятника може мати складові як уздовж меридіану \vec{v}_\parallel , так і вздовж екватору \vec{v}_\perp , $\vec{v}_n = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$. Розглянемо відповідні складові сили Коріоліса, $2m[\vec{v}_n, \vec{\Omega}] = 2m[\vec{v}_\parallel, \vec{\Omega}] + 2m[\vec{v}_\perp, \vec{\Omega}]$. Перша складова, $2m[\vec{v}_\parallel, \vec{\Omega}]$,

дорівнює нулю, бо на екваторі кутова швидкість обертання Землі є паралельною до меридіану, $\vec{v}_\parallel \parallel \vec{\Omega}$. Друга складова, $2m[\vec{v}_\perp, \vec{\Omega}]$, має вертикальний напрямок: вона трохи підсилює (послаблює) силу тяжіння, коли маятник рухається на захід (схід). Але ця складова ні в якому разі не тисне на маятник убік, не має жодної горизонтальної складової. Тому на екваторі площина a виявляється нерухомою, тобто її кутова швидкість дорівнює нулю.

Ці два граничні випадки підказують, що у загальному випадку, коли маятник розташований широті ϑ , слід розглянути окремо внесок до сили Коріоліса від горизонтальної $\vec{\Omega}_\parallel$ та вертикальної $\vec{\Omega}_\perp$ складових кутової швидкості, $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_\parallel + \vec{\Omega}_\perp$. Вплив складової сили Коріоліса, $2m[\vec{v}, \vec{\Omega}_\parallel]$, яку обумовлено наявністю горизонтальної складової кутової швидкості, $\vec{\Omega}_\parallel$, є аналогічним до впливу повної кутової швидкості $\vec{\Omega}$ на екваторі. Тобто ця складова сили Коріоліса не дає внеску в обертання площини a . Вплив складової сили Коріоліса, $2m[\vec{v}, \vec{\Omega}_\perp]$, яку обумовлено наявністю вертикальної складової кутової швидкості, $\vec{\Omega}_\perp$, є аналогічним до впливу повної кутової швидкості $\vec{\Omega}$ на полюсі: саме завдяки їй площина a обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю $\Omega_\perp = \Omega_0 \sin \vartheta$. Тобто у довільній точці на поверхні Землі вертикальна площина, в якій відбуваються коливання маятника, виконує повний оборот за час

$$t = \frac{2\pi}{\Omega_\perp} = \frac{\text{доба}}{\sin \vartheta}. \quad (5.40)$$

Цей результат повністю збігається із здобутим раніше у граничних випадках: на полюсі $\vartheta=90^\circ$ і період обертання площини коливання t дорівнює одній добі; на екваторі $\vartheta=0^\circ$ і величина періоду t прямує до нескінченності, тобто площина коливання не обертається.

Реальний дослід, що провів власне Фуко 1850 року, відбувся у Паризькій обсерваторії, довжина підвісу складала $l=67$ метрів, маса кулі становила $m=28$ кг, період обертання площини коливань маятника склав $t=32$ години (широта Парижу $\vartheta=48^\circ 51'$). За годину площина коливань повернулась більше, ніж на 11° .

Маятник Фуко у штаб-квартирі Організації Об'єднаних Націй у Нью-Йорку має масу кулі $m=91$ кг і обертається за $t=32$ години 45 хвилин.

5.5. Еквівалентність гравітаційної та інертної мас

Термін маса було введено до числа характеристик руху механічних об'єктів, спираючись на закон збереження імпульсу. В основі цього терміна лежать інертні властивості механічних об'єктів, тому таку масу називають інертною, m_i . Але механічні об'єкти здатні також збуджувати навколо себе гравітаційні поля. Сила гравітаційного тяжіння пропорційна гравітаційній масі тіл, m_g . Від самого початку дослідження цього питання немає підстав вважати маси, що фігурують у цих законах, однакови.

Закон всесвітнього тяжіння, що його встановив Ньютон, вказує на те, що сила гравітаційної взаємодії тіл є пропорційною m_i . Тому інертна маса є пропорційною до гравітаційної маси, $m_i \propto m_g$. Одиниці цих мас (або константу гравітаційної взаємодії γ) можна вибрати так, щоб вони були не лише пропорційними, але й дорівнювали одна одній за числовим значенням. Цей фундаментальний закон механіки зветься законом еквівалентності інертної та гравітаційної мас.

Для доведення цього закону розглянемо вільне падіння тіл різної природи у полі тяжіння Землі. З одного боку, за законом Ньютона, $m_i \vec{a} = \vec{F}_g$, з іншого боку, $\vec{F}_g = m_g \vec{g}$, отже,

$\vec{a} = \vec{g} m_g / m_i$. Оскільки з експериментів відомо, що всі тіла (за умов вільного падіння) падають з однаковим прискоренням, то виходить, що $m_i = m_g$. Першим це довів експериментально Галілей (з невисокою точністю).

Далі висновок про еквівалентність гравітаційної та інертної мас підтвердили Ньютон та Бессель⁵, які експериментально встановили для коливань математичного маятника, що період його вільних коливань не залежить від матеріалу, з якого виготовлено маятник.

Рекордно точними були вимірювання (відносна похибка 5×10^{-8}) угорського фізика Л. Етвеша⁶. Таку точність Етвешу та його колегам удалось досягти завдяки застосуванню крутильних терезів та гравітаційних варіометрів. Опишемо схематично дослід Етвеша (рис. 5.3). На довгій тонкій нитці підвішено горизонтально довгий стрижень довжиною l , до кінців якого можна було прикріплювати тягарці 1 та 2, виготовлені з різних матеріалів, наприклад, платини та міді. Стрижень установлювали перпендикулярно до меридіану місця (рис. 5.3 а). Етвеш узяв до уваги, що вага тіла на поверхні Землі складається, головне, з двох різних доданків: сили гравітаційного тяжіння, $m_g \vec{g}$, яка є пропорційною до гравітаційної маси, та відцентрової сили інерції, $m_i \Omega^2 \vec{r}_\perp$, яка є пропорційною до інертної маси (рис. 5.3 б). Відцентрова сила має вертикальну складову $m_i \Omega^2 r_\perp \cos \vartheta$

⁵ Бессель (Bessel) Фрідріх Вільгельм (1784-1846) – німецький астроном, математик і геодезист, член Берлінської АН (1812), іноземний почесний член Петербурзької АН (1814). 1810 року його було запрошено до Кенігсберга для організації нової обсерваторії, директором якої він працював до останніх років свого життя. Бессель є одним з основоположників астрометрії. Він розробив теорію похибок інструменту і послідовно провадив в життя ідею про необхідність вносити відповідні поправки до результатів спостережень. У математиці ім'ям Бесселя названо сімейство функцій, що виникає під час розв'язання рівнянь Лапласа та Гельмгольца (у циліндричних або сферичних координатах), а також нерівність у теорії рядів Фур'є.

⁶ Етвеш (Eötvös) Лоранд (1848-1919) – угорський фізик. Створив гравітаційний варіометр. Встановив рівність гравітаційної й інертної мас. Дослідив залежність поверхневого натягу від температури. Голова математичного і фізичного товариств. Низка учнів Етвеша стали лауреатами Нобелівської премії. Ім'я Етвеша носить одиниця вимірювання градієнту гравітаційного поля.

(ϑ – географічна широта). Оскільки стрижень має однакові плечі, то одна з умов рівноваги (у вертикальній площині) полягає в тому, що $F_{\text{верт}1} = F_{\text{верт}2}$:

$$m_{g1}g - m_{i1}\Omega^2 r_{\perp} \cos \vartheta = m_{g2}g - m_{i2}\Omega^2 r_{\perp} \cos \vartheta. \quad (5.41)$$

Введемо α_1 та α_2 – частки гравітаційних мас до інертних для тягарців 1 та 2: $\alpha_j = m_{gj}/m_{ij}$:

$$m_{i1}(\alpha_1 g - \Omega^2 r_{\perp} \cos \vartheta) = m_{i2}(\alpha_2 g - \Omega^2 r_{\perp} \cos \vartheta), \quad (5.42)$$

Якщо рівновагу (5.42) досягнуто для різних α_1 та α_2 , $\alpha_1 \neq \alpha_2$, тобто, якщо гравітаційна та інертна маси не є еквівалентними, то звідси мали б наслідок $m_{i1} \neq m_{i2}$. Тоді відцентрові сили, що діють на тягарці, а з ними і їхні горизонтальні складові, що мають напрямок на південь, не були б однакові, $F_{\text{гор}1} \neq F_{\text{гор}2}$. Тоді б з'явився обертальний момент сил

$M_I = 0.5l(m_{i1} - m_{i2})\Omega^2 r_{\perp} \sin \vartheta$, і вертикальна нитка, на якій підвішено крутильні терези, закрутилася б на кут $\varphi_1 = M_I/k$. Тут k – це модуль крутіння. Кут φ_1 вдається виміряти з високою точністю, бо на вертикальній нитці закріплено маленьке легеньке дзеркальце D . На це дзеркальце пускають промінь світла і слідкують за слідом відбитого

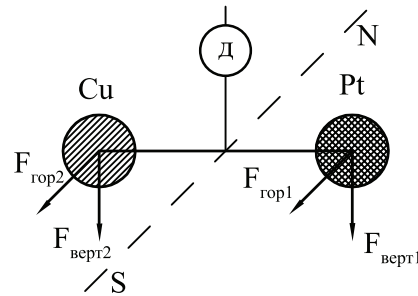


Рис. 5.3 а. Схема дослідження Етвеша

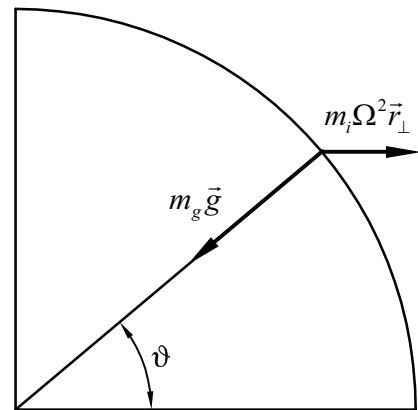


Рис. 5.3 б. Напрямки сил, які діють на важки в досліді Етвеша

променя на екрані. Що далі екран розташований від крутильних терезів, то меншому куту відповідає пересування зайчика на екрані на одну й ту саму відстань, то точніше можна виміряти кут φ_1 . Якщо тягарці 1 і 2 поміняти місцями, то обертальний момент сил і кут закручування змінюють знак, $M_2 = -M_1$, $\varphi_2 = -\varphi$. Етвеш показав, що $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -2 M_I/k = 0$ для будь-яких матеріалів, з яких виготовлено тягарці 1 і 2.

Так майстерне володіння прийомами експериментальної фізики, помножене на глибоке розуміння фізичної теорії, дало Етвешу можливість обґрунтувати один із найважливіших фізичних принципів.

Роберт Дікке⁷ (США) із співробітниками в 1961-64 роках підвищили точність дослідів Етвеша в понад сто разів. Дослід Дікке був повторений радянськими фізиками В. Б. Брагінським⁸ і В. І. Пановим у 1971 р., вони підвищили точність ще в 30 разів, досягши точності експерименту в 10^{-12} .

Зазначимо, що принцип еквівалентності інертної та гравітаційної мас прислужився при закладанні засад теорії гравітації (загальної теорії відносності).

⁷ Дікке (Dicke) Роберт Генрі (1916-1997) – американський фізик, член Національної академії наук США, відомий своїми роботами в галузі астрофізики, атомної фізики, космології та гравітації. Один із перших розробників теорії електричних ланцюгів із розподіленими параметрами. Нагороджений Національною науковою медаллю США, Премією Комстока Національної академії наук США, Премією Беатріс Тінслі Американського астрономічного товариства.

⁸ Брагінський Володимир Борисович (1931) – російський фізик-теоретик і експериментатор. Член-кореспондент РАН, член Європейської Академії, іноземний член Національної академії наук США. Професор кафедри «Фізики коливальних» фізичного факультету МДУ. Нагороджений Золотою медаллю ім. Лебедева (Президії АН СРСР), Медаллю Ф. Шиллера, Премією Фейрчальда, Премією Гумбольдта.

**Питання для самоконтролю до розділу
5. Механічний рух матеріальної точки у
неінерціальних системах відліку**

1. Дайте визначення сили Коріоліса.
2. Дайте визначення відцентрової сили.
3. В який бік спрямовано силу Коріоліса, що діє на автівку, яка їде на північ у північній півкулі?
4. В який бік спрямовано відцентрову силу, що діє на автівку, яка їде на північ у північній півкулі?
5. В який бік спрямовано силу Коріоліса, що діє на автівку, яка їде на схід у північній півкулі?
6. В який бік спрямовано відцентрову силу, що діє на автівку, яка їде на схід у північній півкулі?
7. Чи залежить напрямок сили Коріоліса від напрямку вектора кутової швидкості обертання неінерціальної системи відліку?
8. Чи залежить напрямок відцентрової сили від напрямку вектора кутової швидкості обертання неінерціальної системи відліку?
9. Що таке інертна маса?
10. Що таке гравітаційна маса?

**6. Обертальний рух
абсолютно твердого тіла**

Розглянемо спочатку обертальний рух абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі обертання. Це може бути фіксована матеріальна вісь, навколо якої обертається абсолютно тверде тіло, або такий його рух, при якому вісь є рухомою, але її орієнтація в просторі залишається незмінною. Для опису такого руху застосовують рівняння моментів.

Якщо навколо осі обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ одна матеріальна точка, то траєкторія її руху – це окружність, скажімо, радіуса r_{\perp} . Порахуємо момент імпульсу $\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}]$ цієї матеріальної точки відносно осі обертання, L_z . При русі матеріальної точки по окружності радіус-вектор є перпендикулярним до вектору швидкості, $\vec{r} \perp \vec{v}$, тому $L_z = r_{\perp} m v$. Як відомо, швидкість матеріальної точки в цьому випадку $v = \omega r_{\perp}$, отже, $L_z = r_{\perp}^2 m \omega$.

Якщо навколо нерухомої осі обертається система матеріальних точок з однакою кутовою швидкістю ω , що має місце, зокрема, для абсолютно твердого тіла, то проекція моменту імпульсу такої системи матеріальних точок на вісь обертання є проекцій моментів імпульсів окремих точок:

$$L_z = \sum_{i=1}^N m_i \omega r_{\perp i}^2 = \omega \sum_{i=1}^N m_i r_{\perp i}^2 = \omega I. \quad (6.1)$$

Тут m_i – це елементарна маса i -ї складової частини абсолютно твердого тіла, $r_{\perp i}$ – це найкоротша відстань від i -ї елементарної частинки абсолютно твердого тіла до осі обертання,

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_{\perp i}^2 \quad (6.2)$$

– це **момент інерції** абсолютно твердого тіла відносно даної осі обертання. У випадку неперервного просторового розподілу

маси тіла момент інерції визначають не сумою, а інтегралом, $I = \int_V r_{\perp}^2 dm$, де інтегрування ведеться по всьому об'єму тіла V .

V. Момент інерції характеризує інертні властивості абсолютно твердого тіла відносно обертального руху. За розмірністю момент інерції $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$. Маса само по собі не є однозначною характеристикою інертних властивостей абсолютно твердого тіла відносно обертального руху: з двох матеріальних точок однакої маси більший момент імпульсу та більшу кінетичну енергію має та, яка обертається з заданою кутовою швидкістю по окружності більшого радіусу. Узагальнюючи на абсолютно тверде тіло, слід сказати: що більший момент інерції такого тіла, то більший момент сил потрібен для його розкручування до заданої кутової швидкості.

Отже, рівняння моментів для абсолютно твердого тіла, що обертається навколо закріпленої осі, має вигляд:

$$m_z = I \frac{d\omega}{dt}, \quad (6.3)$$

де m_z – проекція результуючого моменту зовнішніх сил на дану вісь обертання, що її позначено як вісь \vec{z} , $m_z = \vec{e}_z \cdot \sum [\vec{r}, \vec{F}_{\text{зовн}}]$.

Робота, яку виконують зовнішні сили при обертальному русі навколо нерухомої осі, дорівнює:

$$\delta A = F dS = Fr d\gamma = m_z d\gamma, \quad (6.4)$$

де γ – це кут обертання, $\omega = d\gamma/dt$.

Кінетична енергія обертального руху абсолютно твердого тіла навколо закріпленої осі дорівнює:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_{\perp i}^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_{\perp i}^2 = \frac{\omega^2 I}{2} = \frac{L_z^2}{2I}. \quad (6.5)$$

Проаналізувавши (6.5), можна дійти висновку, що форма запису

для роботи та кінетичної енергії в даному випадку є аналогічною до випадку прямолінійного руху: момент інерції I є аналогом маси m , момент імпульсу L_z – аналогом імпульсу p , і момент сили m_z – аналогом сили F .

Більше того, імпульс не може слугувати характеристикою кількості обертального руху. Покажемо це на простому прикладі обертального руху двох матеріальних точок однакої маси m , які обертаються по окружності довільного радіусу a з кутовою швидкістю ω і розташовані на кінцях одного діаметру цієї окружності. Швидкості цих двох точок є однаковими за модулем, $v = \omega a$, але протилежні за напрямком, тому сумарний імпульс такої системи матеріальних точок дорівнює нулю. А от момент імпульсу такої системи не є нульовим, його направлено вздовж осі обертання, і його модуль $L_z = 2ma^2\omega$ є пропорційним до кутової швидкості ω . Саме він характеризує кількість обертального руху так, як імпульс характеризує кількість поступального руху. Такий самий результат можна отримати, якщо замість руху двох симетричних матеріальних точок розглядати рух будь-якого аксіально симетричного абсолютно твердого тіла, або як ще кажуть, фігури обертання, – у цьому випадку сумарний імпульс так само дорівнює нулю, а момент імпульсу $L_z = I\omega$ відіграє роль характеристики кількості обертального руху.

6.1. Теорема Гюйгенса⁹ –Штейнера¹⁰

Величина моменту інерції одного й того самого абсолютно твердого тіла залежить від того, відносно якої осі

⁹ Гюйгенс (Huygens) Християн (1629-1695) – нідерландський фізик, механік, математик і астроном, винахідник маятникового годинника з анкерним обмежувачем, автор хвильової теорії світла, праць з оптики і теорії імовірності, відкривач кільця Сатурна і його супутника. Член Французької Академії наук, її перший президент.

¹⁰ Штейнер (Steiner) Якоб (1796-1863) – швейцарський математик, засновник синтетичної геометрії кривих ліній і поверхонь другого і вищих порядків. Член Берлінської академії.

обертається це тіло. Цим момент інерції поступається масі – її величина не залежить від руху, в якому тіло бере участь. Покажемо, як можна визначити момент інерції тіла відносно довільної осі, якщо відомий момент інерції цього тіла відносно паралельної осі, яка проходить крізь центр мас цього тіла. Цей зв'язок установлюється теоремою Гюйгенса-Штейнера.

Порахуємо моменти інерції абсолютно твердого тіла відносно двох різних паралельних осей. Нехай ці осі проходять крізь точки O та A (рис. 6.1), тоді за теоремою косинусів квадрат відстані між точкою A та i -ю складовою абсолютно твердого тіла (на рис. 6.1 її позначено як MT_i) дорівнює:

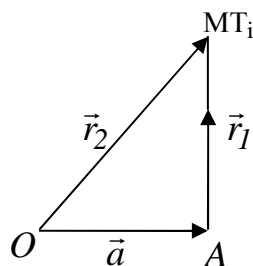


Рис. 6.1

надає можливість обчислити момент інерції даного абсолютно твердого тіла відносно осі, що проходить крізь точку A перпендикулярно до площини рисунку:

$$\sum_i m_i r_{li}^2 = \sum_i m_i (r_{2i}^2 + a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{r}_{2i}). \quad (6.6)$$

Перепишемо це так:

$$I_A = I_O + ma^2 - 2m\vec{a} \cdot \vec{R}_C, \quad (6.7)$$

де $\vec{R}_C = \sum \vec{r}_{2i} m_i / m$ – це радіус-вектор центру мас відносно точки O . Якщо вісь « O » проходить крізь центр мас, то $\vec{R}_C = 0$, і попередня формула (6.7) спрощується:

$$I_A = I_O + ma^2. \quad (6.8)$$

Це співвідношення становить зміст **теорему Гюйгенса-Штейнера**: «Момент інерції даного абсолютно твердого тіла відносно довільної осі a дорівнює сумі його моменту інерції відносно іншої осі, що є паралельною до a та

проходить крізь центр мас цього абсолютно твердого тіла, та добутку маси даного абсолютно твердого тіла на квадрат відстані між зазначеними осями».

6.2. Розрахунок моментів інерції симетричних абсолютно твердих тіл

У загальному випадку момент інерції можна порахувати числовими методами на основі визначення (6.2). Якщо абсолютно тверде тіло є невеликим, то його момент інерції можна виміряти в лабораторії експериментально, наприклад, за допомогою крутильного маятника або маятника Масквела¹¹.

Якщо абсолютно тверде тіло має певну симетрію, його момент інерції можна порахувати із застосуванням нескладних математичних прийомів. Нижче наведено декілька прикладів розрахунку моментів інерції симетричних абсолютно твердих тіл. В кожному випадку пороховано три моменти інерції відносно трьох взаємно перпендикулярних осей, що проходять крізь центр мас тіла. При цьому розрахунки обмежено випадком однорідної густини.

1). Покажемо, як порахувати моменти інерції **стрижня** довжиною l та масою m (рис. 6.2) з урахуванням адитивності моменту інерції – як суми моментів інерції окремих матеріальних точок, які складають стрижень. Реальний стрижень має ненульові поперечні розміри, які, однак, є набагато меншими від довжини.

Усі елементарні маси, що складають стрижень, лежать на осі z , тобто віддалені від неї на нульову відстань, тому момент інерції стрижня відносно осі z дорівнює нулю, $I_z = 0$.

¹¹ Максвелл (Maxwell) Джеймс Клерк (1831-1879) – шотландський вчений, який створив теорію електромагнітного поля. Ґрунтуючись на зв'язку електричних, магнітних та світлових явищ, Максвелл розробив теорію світла і тим об'єднав в одне ціле раніше розрізнені галузі електрики, магнетизму і оптики. Крім цього, Максвеллу належать, зокрема, відкриття в галузі молекулярно-кінетичної теорії газів.

Масу стрижня в однаковий спосіб розташовано відносно осей x і y , тому моменти інерції стрижня відносно цих осей дорівнюють один одному, $I_x = I_y$. Порахуємо момент інерції стрижня відносно осі x на основі визначення (6.2). У ньому для стрижня квадрат відстані від елементарної маси до осі $r_{\perp i}^2 = z^2$; маса окремого елементу є добутком густини стрижня $\rho = m/(Sl)$ (тут S – це площа поперечного перерізу стрижня) та об'єму $dV = Sdz$ цього елементу, $m_i = \rho dV = (m/l)dz$. Інтегрування ведеться по всьому об'єму стрижня від краю з координатою $(-l/2)$ до іншого краю з координатою $(l/2)$:

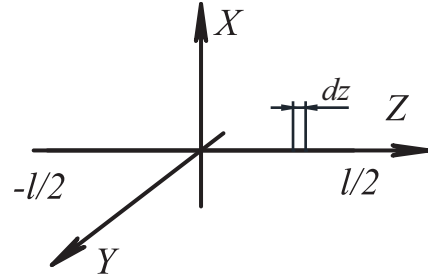


Рис. 6.2. До обчислення моменту інерції стрижня

$$I_x = \int_{-l/2}^{l/2} z^2 \frac{m}{l} dz = \frac{m}{l} \frac{z^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m}{3l} \left(\left(\frac{l}{2} \right)^3 - \left(-\frac{l}{2} \right)^3 \right) = \frac{ml^2}{12}. \quad (6.9)$$

Цей результат відповідає вимогам розмірності, $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

2). Порахуємо тепер моменти інерції однорідної прямокутної **пластини** масою m , довжиною a , шириною b та малою товщиною c , $c \ll a, b$, як суми моментів інерції окремих стрижнів, з яких складається пластина (рис. 6.3).

Момент інерції окремого i -го стрижня I_{xi} відносно осі x дорівнює, як було показано вище, $I_{xi} = m_i b^2 / 12$. Момент інерції пластини I_{xi} відносно осі x дорівнює

$$I_x = \sum_i \frac{m_i b^2}{12} = \frac{b^2}{12} \sum_i m_i = \frac{mb^2}{12}. \quad (6.10)$$

Момент інерції i -го стрижня I_{yi} відносно осі y дорівнює добутку маси стрижня m_i на квадрат x^2 відстані від стрижня до осі y , $I_{yi} = m_i x^2$. Маса m_i i -го стрижня дорівнює добутку густини пластини $\rho = m/(abc)$ та об'єму $dV = bcdx$ i -го стрижня, $m_i = m/(a)dx$. Додавання моментів інерції окремих стрижнів відносно осі y полягає в інтегруванні за координатою x від лівого краю з координатою $x = -a/2$ до правого краю з координатою $x = a/2$:

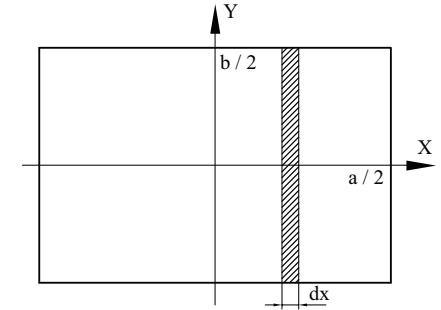


Рис. 6.3. До обчислення моменту інерції прямокутної пластини

$$I_y = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \frac{m}{a} dx = \frac{m}{a} \frac{x^3}{3} \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{m}{3a} \left(\left(\frac{a}{2} \right)^3 - \left(-\frac{a}{2} \right)^3 \right) = \frac{ma^2}{12}. \quad (6.11)$$

Звернемо увагу на загальну властивість моментів інерції. А саме, моменти інерції, зокрема, (6.10) і (6.11), не залежать від поздовжнього розміру. Наприклад, якщо взяти дві пластини однакової маси m і ширини b , але різної довжини a (цього можна досягнути, якщо взяти пластини з різного матеріалу), то їхні моменти інерції відносно осі x є однаковими. Зокрема, якщо довжина a є достатньо малою, $a \ll b$, то така пластина перетворюється на стрижень. У цьому випадку доречно згадати, що вирази (6.9) для моменту інерції стрижня і (6.10) для моменту інерції пластини є аналогічними: вони являють собою

добуток маси та квадрату поперечного розміру, а також мають однаковий числовий множник (1/12).

Момент інерції I_{zi} окремого i -го стрижня відносно осі z порахуємо за теоремою Гюйгенса-Штейнера (див. параграф 6.1): $I_{zi} = (m_i b^2 / 12) + m_i x^2$. Тоді момент інерції пластини відносно осі z дорівнює:

$$I_z = \int_{-a/2}^{a/2} \left(x^2 + \frac{b^2}{12} \right) \frac{m}{a} dx = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \frac{m}{a} dx + \int_{-a/2}^{a/2} \frac{b^2}{12} \frac{m}{a} dx = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}. \quad (6.12)$$

Якщо ширина b або довжина a пластини є достатньо малою, $b \ll a$ або $a \ll b$, то пластинка перетворюється на стрижень довжиною a або b . У цьому випадку вираз (6.12) асимптотично переходить у вираз (6.9) для моменту інерції стрижня (з урахуванням позначень довжини).

3). Порахуємо моменти інерції однорідного **прямокутного паралелепіпеда** масою m довжиною a , шириною b та висотою c (рис. 6.4) як суми моментів інерції окремих пластин, з яких складається паралелепіпед.

Момент інерції I_{xi} довільної i -ї пластини відносно осі x дорівнює, як це було показано вище, $I_{xi} = m_i(b^2 + c^2)/12$. Момент інерції I_x всього паралелепіпеда знайдемо як суму:

$$I_x = \sum_i \frac{m_i(b^2 + c^2)}{12} = \frac{(b^2 + c^2)}{12} \sum_i m_i = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}. \quad (6.13)$$

Цей результат є правильним за розмірністю, $[I_x] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$, він не залежить від поздовжнього розміру та у граничному випадку малої довжини, $a \ll b, c$, переходить у відомий вираз (6.12) для моменту інерції пластини (з урахуванням позначень поперечних лінійних розмірів).

Момент інерції i -ї пластини відносно осі y порахуємо за теоремою Гюйгенса-Штейнера, $I_{yi} = (m_i c^2 / 12) + m_i x^2$. Маса m_i i -ї

пластини дорівнює добутку густини паралелепіпеда $\rho = m/(abc)$ та об'єму $dV = bcdx$ i -ї пластини, $m_i = \rho bcdx$. Тоді момент інерції

паралелепіпеда відносно осі y у отримуємо інтегруванням за координатою x від крайньої пластини з координатою $x = -a/2$ до іншої грані з координатою $x = a/2$ так само, як це було зроблено в (6.12):

$$I_y = \int_{-a/2}^{a/2} \left(x^2 + \frac{c^2}{12} \right) \frac{m}{a} dx = \frac{m(a^2 + c^2)}{12}. \quad (6.14)$$

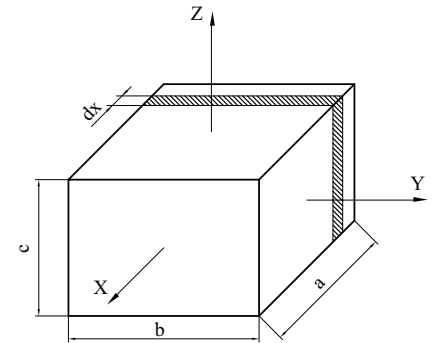


Рис. 6.4. До обчислення моменту інерції прямокутного паралелепіпеду

Досвід розрахунку моментів інерції I_x і I_y прямокутного паралелепіпеда відносно осей x і y показує, що момент інерції паралелепіпеда дорівнює добутку маси тіла на суму квадратів поперечних розмірів, а також на числовий множник (1/12). Враховуючи симетрію прямокутного паралелепіпеда, неважко передбачити, що його момент інерції I_z відносно осі z дорівнює

$$I_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}. \quad (6.15)$$

4). Моменти інерції попередніх трьох фігур: стрижня, пластини та прямокутного паралелепіпеда – було пораховано шляхом прямого інтегрування визначення (6.2). Існують інші прийоми для обчислення моментів інерції симетричних абсолютно твердих тіл.

Покажемо можливості одного з таких прийомів на прикладі знаходження моменту інерції I_z однорідної **трикутної пластини** масою m , усі сторони якої мають однакову довжину

a відносно осі z , що є перпендикулярною до площини трикутника та проходить крізь його центр мас C (див. рис. 6.5). Висота рівностороннього трикутника:

$OE = a \sin 60^\circ = \sqrt{3} a/2$. Центр мас трикутника C лежить на перетинанні трьох медіан, які у випадку рівнобічного трикутника співпадають із висотами та бісектрисами. Центр мас ділить висоту OE у відношенні 2:1, $OC = 2CE$.

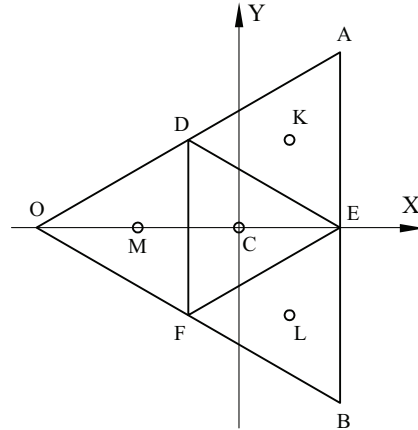


Рис. 6.5. До обчислення моменту інерції трикутника

Товщину пластини h вважаємо нехтовно малою, $h \ll a$. Розв'яжемо цю задачу, уникаючи процедури інтегрування, за допомогою теореми Гюйгенса–Штейнера.

Перше ключове положення пропонованого прийому полягає в тому, що згідно з визначенням момент інерції є пропорційним до маси та є квадратичною формою лінійних розмірів твердого тіла. Тому момент інерції рівностороннього трикутника можна записати у наступному вигляді: $I_z = \alpha m a^2$, де α – це певна константа, яку потрібно визначити.

Друге ключове положення цього прийому полягає у тому, що трикутник можна умовно розбити на чотири фігури з тією самою симетрією, тобто на чотири однакові трикутники: $\triangle DFO$, $\triangle ADE$, $\triangle BEF$, $\triangle DEF$. Момент інерції I_{zM} кожного з цих малих трикутників відносно осі, перпендикулярної до площини фігури та такої, що проходить крізь центр мас цього трикутника, так само є пропорційним до його маси $m_M = m/4$ і є такою самою квадратичною формою сторони $a_M = a/2$ цього малого трикутника, $I_{zM} = \alpha m_M a_M^2$, де α – та сама константа.

Оскільки момент інерції є адитивною величиною, то момент інерції великого трикутника дорівнює сумі моментів інерції чотирьох малих трикутників. При цьому слід узяти до уваги, що центр мас одного з малих трикутників, $\triangle DEF$,

співпадає з центром мас великого трикутника; а центри мас решти трьох малих трикутників віддалені від осі z на відстань $CM = CK = CL$ (див. рис. 6.5), що утричі менша за висоту великого трикутника: $CM = a/(2\sqrt{3})$. Тому моменти інерції кожного з цих трьох малих трикутників: $\triangle DFO$, $\triangle ADE$, $\triangle BEF$, – розраховують за теоремою Гюйгенса–Штейнера: $I_{zMj} = I_{zM} + m_M CM^2$. Отже, момент інерції великого трикутника дорівнює сумі моментів інерції малих: $I_z = \alpha m_M a_M^2 + 3I_{zMj} = \alpha m a^2/16 + 3(\alpha m a^2/16 + m CM^2/4)$. Враховуючи співвідношення між CM та a , що здобуто вище, можна переписати вираз для моменту інерції I_z в такий спосіб:

$$I_z = \alpha m a^2 = \alpha m a^2/4 + m a^2/16. \quad (6.16)$$

Звідси знаходимо значення константи: $\alpha = 1/12$. Отже, момент інерції пластини у формі рівнобічного трикутника, відносно осі, що є перпендикулярною до площини трикутника та проходить крізь його центр мас, дорівнює:

$$I_z = m a^2/12. \quad (6.17)$$

Застосуємо цей прийом для розрахунку моменту інерції I_x цієї ж трикутної пластини відносно осі x , яка проходить крізь центр мас трикутника C , лежить у площині пластини та співпадає з висотою трикутника. Будемо шукати цей момент інерції як добуток маси m , квадрату сторони a та безрозмірного множника β , величина якого визначається просторовим розподілом маси відносно осі x , $I_x = \beta m a^2$.

Розіб'ємо трикутник на ті самі чотири малі трикутники. Центри мас M та C малих трикутників $\triangle DFO$ та $\triangle DEF$ лежать на осі x , ці трикутники мають ту саму орієнтацію відносно осі x , що й великий трикутник $\triangle OAB$, тому момент інерції кожного з цих трикутників знайдемо у вигляді, аналогічному до вигляду моменту інерції великого трикутника, $I_{xM} = \beta m_M a_M^2$.

Центри мас K та L малих трикутників $\triangle ADE$, $\triangle BEF$ віддалені від осі x на відстань $KL/2 = CK \sin 60^\circ = CK \sqrt{3}/2 = a/4$, тому моменти інерції цих трикутників відносно осі x за

теоремою Гюйгенса-Штейнера дорівнюють, $I_{xM} = I_{xM} + m_m(a/4)^2$.

Момент інерції великого трикутника як цілого, з одного боку, та як набору чотирьох малих трикутників, з іншого, – це одне й те саме:

$$I_x = \beta m a^2 = 2\beta m_m a_m^2 + 2(\beta m_m a_m^2 + m_m(a/4)^2). \quad (6.18)$$

З (6.18) дістаємо, що коефіцієнт $\beta = 1/24$. Отже, момент інерції пластини у формі рівнобічного трикутника, відносно осі x , що містить одну з висот трикутника, дорівнює:

$$I_x = m a^2 / 24. \quad (6.19)$$

Пропонований прийом придатний і для розрахунку моменту інерції I_y цієї ж трикутної пластини відносно осі y , яка проходить крізь центр мас трикутника C , лежить у площині пластини та є паралельною до сторони трикутника (рис. 6.5). Будемо шукати цей момент інерції згідно положень цього прийому, викладених вище, як добуток маси m , квадрату сторони a та шуканого безрозмірного множника γ , величина якого визначається просторовим розподілом маси відносно осі y , $I_y = \gamma m a^2$. Розіб'ємо трикутник ΔOAB на такі самі чотири малі трикутники, як і в попередніх двох випадках. Завдяки адитивності моменту інерції знайдемо момент інерції великого трикутника як суму моментів інерції малих.

Центр мас малого трикутника ΔDEF співпадає з центром мас великого. Орієнтація ΔDEF відносно осі y є аналогічною до орієнтації ΔOAB : одна зі сторін ΔDEF , а саме DF , є паралельною до осі y . Тому момент інерції ΔDEF , I_{yM1} , шукатимемо у вигляді добутку його маси m_m , квадрату сторони a_m малого трикутника та того самого множника γ , $I_{yM1} = \gamma m_m a_m^2$.

Трикутник ΔDFO має таку саму орієнтацію відносно осі y , як і великий трикутник: його сторона є паралельною до осі y , але його центр мас віддалений від осі y на відстань $CM = a/(2\sqrt{3})$. Тому момент інерції ΔDFO , I_{yM2} , відносно осі y знайдемо за теоремою Гюйгенса-Штейнера, $I_{yM2} = I_{yM1} + m_m CM^2$.

Трикутники ΔADE і ΔBEF в однаковий спосіб орієнтовані відносно осі y : в них обох сторони AE і BE

є паралельними до осі y , тобто вони мають розподіл маси, аналогічний до того, який має великий трикутник. Центри мас трикутників ΔADE і ΔBEF віддалені від осі y на відстань, вдвічі меншу за CM . Момент інерції кожного з цих трикутників, I_{yM3} , відносно осі y знайдемо за теоремою Гюйгенса-Штейнера, $I_{yM3} = I_{yM1} + m_m CM^2/4$.

Прирівняємо вирази для моменту інерції великого трикутника як цілого та як набору чотирьох малих трикутників:

$$I_y = \gamma m a^2 = (\gamma m_m a_m^2) + (\gamma m_m a_m^2 + m_m CM^2) + 2(\gamma m_m a_m^2 + m_m CM^2/4). \quad (6.20)$$

Розв'язання рівняння (6.20) відносно γ дає: $\gamma = 1/24$. Отже, момент інерції однорідної пластини у формі рівнобічного трикутника відносно осі, що проходить крізь центр мас фігури паралельно до однієї зі сторін, дорівнює:

$$I_y = m a^2 / 24. \quad (6.21)$$

Тут обчислено момент інерції рівнобічного трикутника. Це обмеження (рівність сторін) не є принциповим, його було залучено для спрощення розрахунків. Запропонований тут прийом може бути успішно застосований для визначення моменту інерції будь-якої фігури, яку можна поділити на її подібні: трикутника, стрижня, паралелограма, прямокутного паралелепіпеда...

5). Перейдемо до визначення моментів інерції низки простих симетричних абсолютно твердих тіл циліндричної геометрії. Передовсім порахуємо момент інерції **кільця** масою m , тобто фігури, всі елементарні складові якої лежать на окружності радіусу R (рис. 6.6). Кільце має ненульові поперечні розміри, які ми вважаємо малими порівняно з радіусом кільця.

Масу кільця в однаковий спосіб розподілено в просторі відносно будь-якої осі, яка лежить у площині кільця та проходить крізь його центр мас, зокрема, відносно осей x та y . Тому моменти інерції кільця I_x та I_y відносно осей x та y є однаковими, $I_x = I_y$.

Елементарні маси, які утворюють кільце, розташовані на

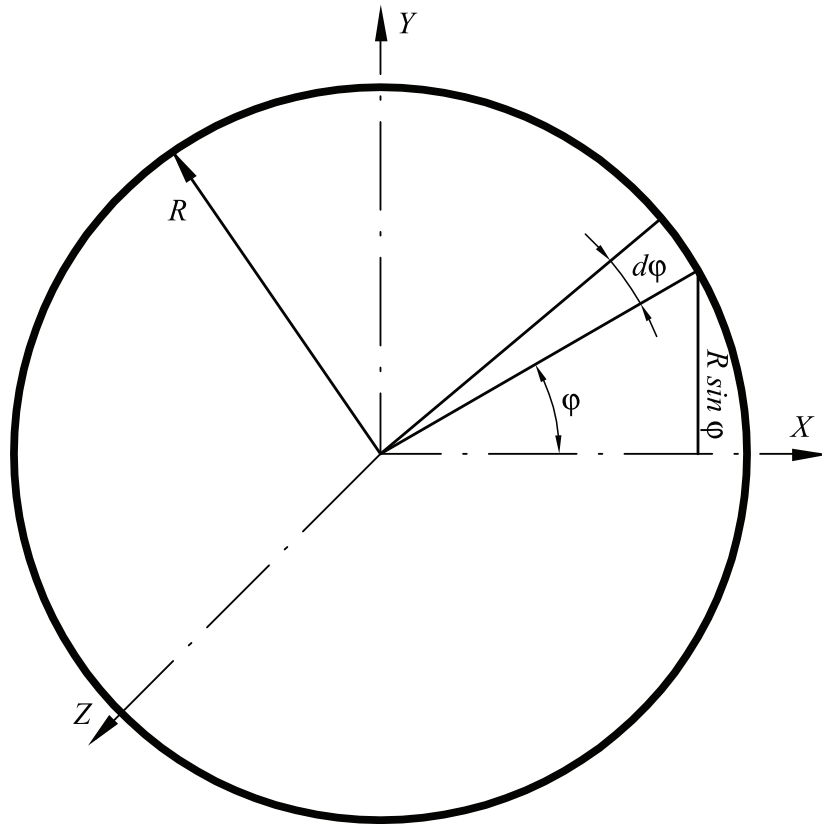


Рис. 6.6. До обчислення моменту інерції кільця

відстані $R/\sin\varphi$ від осі x . Маса окремого елемента dm дорівнює добутку густини кільця $\rho = m/(2\pi R\sigma)$ на об'єм елемента $dV = \sigma R d\varphi$, $dm = \rho dV$. Тут σ – це поперечний переріз кільця. Тоді порахуємо момент інерції кільця як інтеграл по всіх кутах від 0 до 2π :

$$I_x = \int_0^{2\pi} R^2 (\sin\varphi)^2 \frac{m}{2\pi} d\varphi = R^2 \frac{m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} d\varphi = \frac{mR^2}{2}. \quad (6.22)$$

Відносно осі z всі елементарні маси віддалені на однакову відстань R , тому згідно з визначенням (6.2) момент

інерції кільця I_z відносно осі z дорівнює

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i r_{\perp i}^2 = \sum_{i=1}^N m_i R^2 = R^2 \sum_{i=1}^N m_i = mR^2. \quad (6.23)$$

б). Визначимо моменти інерції однорідного **диску** маси m та радіусу R як суму моментів інерції кілець (на основі формул (6.22) та (6.23)), з яких він складається (рис. 6.7). Товщину диску a вважаємо малою, $a \ll R$.

Елементи маси диску в однаковий спосіб розподілено в просторі відносно осей x та y , тому моменти інерції диску I_x та I_y відносно цих осей є однаковими, $I_x = I_y$. Завдяки адитивності моменту інерції, порахуємо I_x як суму моментів інерції окремих кілець: $I_{x \text{ диск}} = \sum I_{x \text{ кільце}} = 0.5 \sum m_i R_i^2$.

Маса окремого кільця m_i дорівнює добутку густини диску $\rho = m/(\pi R^2 a)$ та об'єму кільця $V_i = 2\pi r dr$, $m_i = 2\pi r dr \rho$, тут r – поточний радіус довільного кільця. Момент інерції диску здобуваємо інтегруванням за радіальною координатою r від найменшого кільця радіусом 0 до найбільшого кільця радіусом R :

$$I_x = 0.5 \int_0^R r^2 dm = \frac{1}{2} \int_0^R r^2 \frac{2\pi r dr}{R^2} = \frac{mR^2}{4}. \quad (6.24)$$

Момент інерції диску I_z відносно осі z порахуємо шляхом додавання моментів інерції окремих кілець (на основі формули (6.23)):

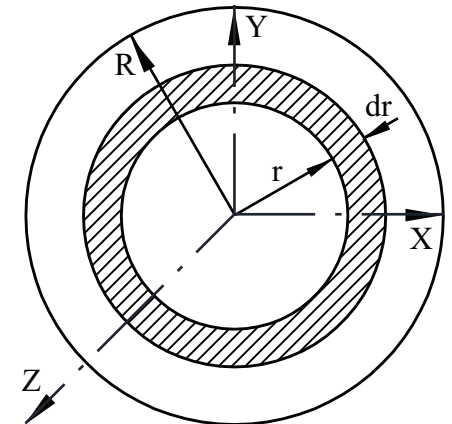


Рис. 6.7. До обчислення моменту інерції диску

$$I_{z \text{ диск}} = \sum I_{x \text{ кільце}} = \sum m_i R_i^2 = \frac{mR^2}{2}. \quad (6.25)$$

Ми не наводимо тут таких детальних викладок, як при отриманні виразу (6.24), бо ці викладки є аналогічними. Результати (6.24) та (6.25) є правильними за розмірністю. Момент інерції диску $I_{z \text{ диск}}$ відносно осі z є вдвічі більшим за його момент інерції $I_{x \text{ диск}}$ відносно осі x , $I_{z \text{ диск}} = 2I_{x \text{ диск}}$ – так само, як це було для кільця.

7.1). Порахуємо момент інерції циліндра маси m , радіусу R та висоти H у випадку однорідної густини матеріалу (див. рис. 6.8) як суму моментів інерції тонких дисків, з яких складається циліндр.

Спочатку порахуємо момент інерції циліндра I_z відносно його осі симетрії z :

$$I_{z \text{ циліндр}} = \sum I_{z \text{ диск}} = 0.5 \sum m_i R^2 = \frac{mR^2}{2}. \quad (6.26)$$

Зауважимо, що момент інерції циліндра I_z відносно осі z не залежить від поздовжнього розміру H . Тобто, інертні властивості двох циліндрів однакових маси та радіусу, але різної висоти (це можливо за умови різної густини матеріалу двох циліндрів) щодо обертання відносно осі z є однаковими.

Елементарні маси, з яких складається циліндр, в однаковий спосіб розташовані в просторі відносно осей x та y , тому моменти інерції I_x та I_y циліндра відносно осей x та y є однаковими, $I_x = I_y$. Момент інерції окремого диска, з яких складається циліндр, відносно осі x порахуємо за теоремою

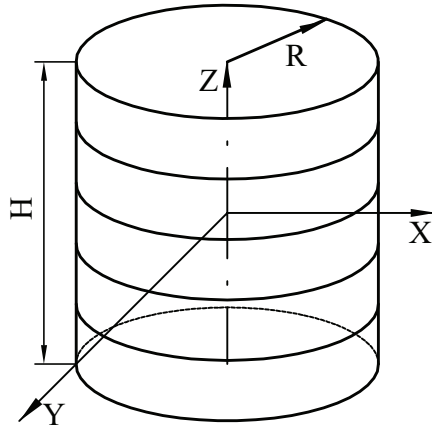


Рис. 6.8. До обчислення моменту інерції циліндра

Гюйгенса-Штейнера (формула (6.8)): $I_{x \text{ диск}} = I_{c \text{ диск}} + m_{\text{диск}} z^2$. Тут вісь c – це вісь, яка є паралельною до осі x та проходить крізь центр мас диска, що є віддаленим від початку координат на відстань $|z|$. Маса окремого диска $m_{\text{диск}}$ є добутком густини циліндра $\rho = m/(\pi R^2 H)$ та його об'єму $dV = \pi R^2 dz$, $m_{\text{диск}} = m dz/H$. Тоді момент інерції циліндра здобуємо інтегруванням по всіх дисках від найнижчого (з координатою $z = -0.5H$) до найвищого (з координатою $z = 0.5H$):

$$I_{x \text{ циліндр}} = \sum I_{x \text{ диск}} = \sum I_{c \text{ диск}} + \sum m_{\text{диск}} z^2 = 0.25 \sum m_{\text{диск}} R^2 + \int_{-0.5H}^{0.5H} z^2 \frac{m dz}{H} = \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{12}. \quad (6.27)$$

Відзначимо, що результат (6.27) є правильним за розмірністю. У граничному випадку тонких циліндрів, $R \ll H$, результат (6.27) переходить у момент інерції (6.9) (з урахуванням позначень), який було здобуто для стрижня. У граничному випадку низьких циліндрів, $H \ll R$, результат (6.27) переходить у момент інерції (6.24) диска. І радіус циліндра R , і його висота H є поперечними розмірами відносно осей x і y , тому обидва ці розміри увійшли до результату (6.27).

Відзначимо, що результати (6.26) та (6.27) можна було здобути внаслідок додавання моментів інерції (відносно відповідних осей) прямокутних пластин, на які також можна умовно розбити циліндр (рис. 6.9). При такому розбитті довжина викладки стає набагато довшою. Це свідчить на користь того, що доречним є таке розбиття, яке враховує симетрію задачі, скорочує

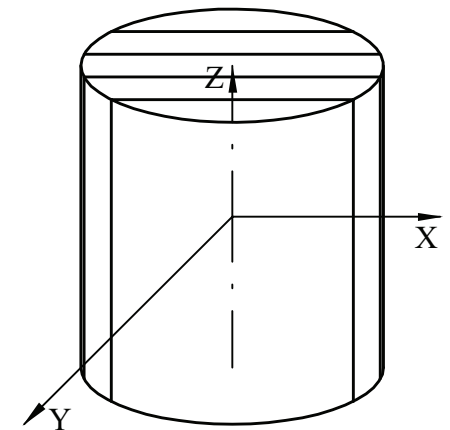


Рис. 6.9. Розбиття циліндру на прямокутні пластини

процедуру розрахунків, зокрема, моментів інерції. В нашому випадку використано розбиття циліндра саме на диски, яким властива циліндрична симетрія, а не на пластини – фігури декартової геометрії.

7.2). Розглянемо випадок порожнистого циліндра маси m , який має внутрішній радіус R_1 та зовнішній радіус R_2 . Тоді його густина $\rho = m / [\pi H (R_2^2 - R_1^2)]$. Момент інерції порожнистого циліндра можна порахувати як різницю моменту інерції суцільного циліндра радіусу R_2 і маси $m_2 = \rho \pi R_2^2 H$ та моменту інерції суцільного циліндра радіусу R_1 і маси $m_1 = \rho \pi R_1^2 H$.

Зокрема, момент інерції порожнистого циліндра I_z відносно осі z дорівнює:

$$\begin{aligned} I_z &= I_{z2} - I_{z1} = 0.5 m_2 R_2^2 - 0.5 m_1 R_1^2 = 0.5 \rho \pi R_2^2 H R_2^2 - 0.5 \rho \pi R_1^2 H R_1^2 = \\ &= 0.5 \rho \pi H (R_2^4 - R_1^4) = 0.5 \pi H (R_2^4 - R_1^4) m / [\pi H (R_2^2 - R_1^2)] = \\ &= 0.5 m (R_1^2 + R_2^2). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Зауважимо, що результат (6.28) є правильним за розмірністю. Наголосимо, що цей момент інерції є пропорційним до суми (а не різниці!) квадратів внутрішнього та зовнішнього радіусів. У граничному випадку $R_1 = 0$ вираз (6.28) переходить в (6.26) для моменту інерції суцільного циліндру. У граничному тонкого порожнистого циліндра, $R_1 = R_2$, з (6.28) дістаємо вираз (6.23) для моменту інерції тонкого кільця.

Момент інерції порожнистого циліндра I_x відносно осі x дорівнює:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x2} - I_{x1} = \left(\frac{m_2 R_2^2}{4} + \frac{m_2 H^2}{12} \right) - \left(\frac{m_1 R_1^2}{4} + \frac{m_1 H^2}{12} \right) = \\ &= 0.25 m (R_1^2 + R_2^2) + m H^2 / 12. \end{aligned} \quad (6.29)$$

8.1). Порахуємо тепер моменти інерції двох фігур сферичної симетрії: сфери та кулі. Завдяки сферичній симетрії елементарні маси, які складають ці фігури в однаковий спосіб розташовані в просторі відносно усіх осей, які проходять крізь центри мас фігур. Зокрема, для сфери та кулі $I_x = I_y = I_z \equiv I$.

Знайдемо момент інерції суцільної кулі однорідної густини, маси m та радіуса R відносно осі, що проходить крізь її центр мас, шляхом прямого інтегрування визначення (1.6.2). Для цього розіб'ємо кулю в сферичних координатах умовно на елементарні прямокутні паралелепіпеди об'ємом

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$$

(рис. 6.10). Маси цих елементарних об'ємів $dm = \rho dV$. Тут φ – це азимутальний кут, θ – полярний кут, $r_{\perp} = r \sin \theta$ – відстань від елементарної маси до осі обертання.

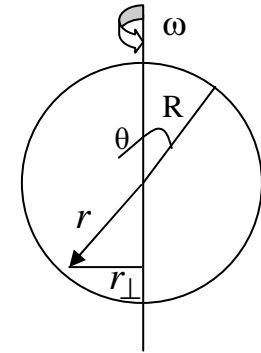


Рис. 6.10. До розрахунку моменту інерції кулі

Тоді момент інерції кулі набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} I &= \int_V r^2 (\sin \theta)^2 \rho dr r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin^3 \theta \int_0^R r^4 dr = \\ &= \frac{3m}{4\pi R^3} 2\pi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d(-\cos \theta) \int_0^R r^4 dr = \frac{-3m}{2R^3} \frac{R^5}{5} \int_1^{-1} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \\ &= \frac{-3mR^2}{10} \left[\cos \theta \Big|_0^{\pi} - \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{-3mR^2}{10} \left[-2 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) \right] = \\ &= \frac{3mR^2}{10} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{5} m R^2. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Ця задача є ілюстрацією того, як знання, які набуто в курсі математичного аналізу, стосовно якобіана J переходу від

однієї системи координат до іншої можна застосовувати у фізичних задачах: записати об'єм кулі у декартовій системі координат було б складніше: $dV=dx\,dy\,dz$. Разом із тим, зазначимо, що навіть у сферичній системі координат, яка є властивою цій задачі, взяття такого інтегралу (6.30) виходить за межі програми першого семестру з вищої математики фізико-математичних факультетів університетів. Тому для розрахунків моментів інерції абсолютно твердих тіл сферичної симетрії, а також плоских фігур застосовують наступний прийом. Він базується на понятті про **момент інерції** θ абсолютно твердого тіла **відносно точки** O – це є сума добутків мас матеріальних точок m_i , з яких складається абсолютно тверде тіло, на квадрати їхніх відстаней R_i до точки O :

$$\theta = \sum_i m_i R_i^2 = \int R^2 dm. \quad (6.31)$$

Момент інерції θ в простий спосіб пов'язаний із моментами інерції того самого тіла відносно декартових осей I_x , I_y і I_z . Для того, аби здобути цей зв'язок, розглянемо одну матеріальну точку з масою m_i та координатами X_i , Y_i , Z_i у декартовій системі координат. Моменти інерції цієї матеріальної точки відносно осей декартової системи координат (див. рис. 6.11) дорівнюють, відповідно:

$$I_x = m_i(Y_i^2 + Z_i^2), \quad I_y = m_i(X_i^2 + Z_i^2), \quad I_z = m_i(X_i^2 + Y_i^2). \quad (6.32)$$

Якщо їх скласти, то отримаємо: $I_x + I_y + I_z = 2m_i(X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2)$. Врахуємо, що квадрат відстані від матеріальної точки до точки O $R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2$:

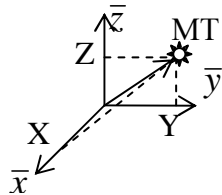


Рис. 6.11. До формули (6.31)

$$2\theta = I_x + I_y + I_z. \quad (6.33)$$

Оскільки момент інерції є адитивною величиною, то наведені міркування є вірними і для абсолютно твердого тіла, що складається з будь-якої

кількості матеріальних точок,

$$2\theta = I_x + I_y + I_z. \quad (6.34)$$

Для абсолютно твердого тіла, яке має форму плоскої фігури, одна з координат, що є перпендикулярною до фігури, наприклад, Z , дорівнює нулю, $Z=0$. Отже, у цьому випадку:

$$\theta_{\text{плоск}} = \sum_i m_i (Y_i^2 + X_i^2) = I_z. \quad (6.35)$$

Отже, для плоского абсолютно твердого тіла з однорідною густиною маємо важливе співвідношення між моментами інерції, обчисленими відносно осей, що збігаються з координатними осями:

$$I_x + I_y = I_z. \quad (6.36)$$

Ця обставина може полегшити розрахунок, наприклад, моменту інерції $I_z = m(a^2 + b^2)/12$ (6.12) прямокутної пластини відносно осі z , яка є перпендикулярною до цієї пластини, як суму моментів інерції $I_x = mb^2/12$ (6.10) та $I_y = ma^2/12$ (6.11) тієї самої пластини відносно двох інших осей, що лежать в площині пластини.

Цікаво перевірити формулу (6.36) на виразах (6.17), (6.19) та (6.21) для моментів інерції трикутника.

Можна також порахувати моменти інерції диска $I_x = I_y = 0.25mR^2$ (6.24) відносно осей x і y , які лежать в площині диска і проходять крізь центр мас, як половину моменту інерції $I_z = 0.5mR^2$ (6.25) того самого диска відносно осі, яка є перпендикулярною до диска.

8.2). Застосуємо здобуту формулу (6.34) для розрахунку моменту інерції кулі. Множина елементарних мас, які лежать на однаковій відстані $0 \leq r \leq R$ від центру мас, утворюють сферичний шар товщиною dr і масою $dm = \rho dV = \frac{m}{(4/3)\pi R^3} 4\pi r^2 dr$. Отже, момент інерції кулі відносно її центру мас можна порахувати як