

в черговий раз підтверджує важливість використання аналогій у фізиці. В цьому розділі ми вивчатимемо механічні коливання, але рівняння, які будуть тут розглянуті, з точністю до використаних позначок, описують, наприклад, і електричні коливання. Дамо визначення коливань: це – процес почергового зростання та зменшення величини певного параметра досліджуваної фізичної системи відносно його середнього значення. Механічні коливання відрізняються від інших типів руху тим, що їх, у цілому, можна охарактеризувати кількома параметрами (наприклад, частотою та амплітудою) за відносно довгий проміжок часу, тоді як для інших рухів слід знати положення системи у будь-який час для будь-якої точки простору. Крім того, при коливаннях у середньому не відбувається перенесення маси.

За кінематичним принципом коливання бувають таких типів: періодичні, неперіодичні, аперіодичні (лімітаційний рух), ангармонічні (нелінійні). Дамо визначення цим типам коливань.

1. **Періодичними коливаннями** фізичної величини $y(t)$ називають такі, для яких $y(t)=y(t+TN)$, де N – натуральне число. Проміжок часу, по закінченні якого рух повторюється, зветься **періодом руху**. Якщо T – це період руху, то про саму фізичну величину, а також і про її похідну за часом можна сказати, що в моменти часу t_0 і t_0+T вони набувають одного й того самого значення. Наприклад, коли йдеться про коливання координати, то по закінченні періоду сама координата $y(t)$, а також і швидкість $y'(t)$ повертаються до первісного значення, $y(t)=y(t_0+T)$ та $y'(t)=y'(t_0+T)$.

Найпростішим випадком періодичних коливань є **гармонічні коливання**, тобто такі, при яких величина, що коливається, наприклад, координата x змінюється з часом t за законом синуса чи косинуса,

$$x(t) = x_0 + a \cos(\omega t + \alpha). \quad (7.1)$$

Тут x_0 – це середнє значення координати, навколо якого відбуваються коливання. Як правило, це положення стійкої рівноваги тіла. Найбільше відхилення величини, що

коливається, від середнього значення називають **амплітудою** коливань. У наведеному випадку (7.1) амплітуду позначено літерою a . У загальному випадку амплітуда коливань може залежати від координати та часу. За розмірністю амплітуда є такою самою, як і величина, що коливається. В наведеному випадку $[a]=m$.

Кількість коливань, які відбуваються протягом одиниці часу, називають **частотою** коливань і позначають літерою $\nu=1/T$ або f . За розмірністю $[\nu]=1/c \equiv \text{Гц}$ (Герц¹).

Оскільки функція косинуса є періодичною з періодом 2π , поряд із частотою ν часто вживають поняття про кутову частоту ω , її ще називають циклічною частотою, $\omega=2\pi\nu=2\pi/T$. **Циклічна частота** – це кількість коливань, які відбуваються протягом 2π одиниць часу. За розмірністю циклічна частота формально співпадає з частотою, $[\omega]=\text{рад/с}$, проте її вимірюють саме в обернених секундах, але не в Герцах.

Аргумент косинуса φ називають **фазою** коливань. У найпростішому випадку гармонічних коливань, $\varphi=\omega t + \alpha$. Вимірюється фаза в радіанах. Гармонічні коливання однакової амплітуди і частоти можуть розрізнятися фазою, в цьому випадку кажуть про зсув фаз, $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2$. Доданок α в (7.1) зветься **початковою фазою**, $\varphi(t=0)=\alpha$.

За теоремою Фур'є² довільний періодичний рух із

¹ Герц (Hertz) Генріх Рудольф (1857-1894) – німецький вчений. Перший отримав електромагнітні хвилі, існування яких теоретично передбачено Максвеллом. Дослідження властивостей електромагнітних хвиль, проведені Герцом, показали, що ці хвилі підлягають тим самим законам, що й світлові. Цим відкриттям підтверджено електромагнітну теорію світла. Герц описав важливе явище, відкрите ним, яке отримало згодом назву фотоелектричного ефекту.

² Фур'є (Fourier) Жан Батист Жозеф (1768-1830) – французький математик і фізик. Відомий тим, що започаткував використання рядів Фур'є для розв'язування задач математичної фізики. На честь Фур'є названі перетворення Фур'є та основне рівняння теплопровідності – закон Фур'є.

періодом T можна представити у вигляді суми, взагалі кажучи, нескінченної кількості гармонічних коливань:

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \alpha_n\right). \quad (7.2)$$

Це є ще однією підставою вивчати гармонічні коливання, а також способи їхнього додавання. Разом із тим теорема Фур'є усуває обмеження на застосування теорії гармонічних коливань.

Гармонічні коливання описують, зокрема, малі коливання консервативних автономних систем.

2. **Неперіодичними коливаннями** називають такі, для яких $y = y_0(t) \sin(\omega t + \varphi(t))$. Для них значення $y(t_0)$ не повторюється через якийсь час T , як це було для періодичних коливань, а існує кілька масштабів часу, що характеризують їхню повторюваність. До неперіодичних належать, наприклад, загасаючі коливання: $y = y_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi_0)$ ($\beta \ll \omega$); суперпозиція двох періодичних коливань з різними амплітудами, частотами та початковими фазами).

3. Окремим типом коливань можна вважати **лімітаційний рух** (аперіодичні коливання). Формально цей рух взагалі не відповідає даному визначенню, його можна і не вважати за коливання. Справа у тому, що перші два з названих типів коливань є часто близькими до гармонічних коливань (хоча б на малому проміжку часу). А лімітаційний рух уже по формі дуже відрізняється від гармонічних коливань. У випадку аперіодичних коливань коливальна система, яку вивели з стану рівноваги та залишили у спокої, почне рухатися до стану рівноваги, не виконуючи навіть одного повного коливання. До аперіодичних належать, наприклад, сильно загасаючі коливання, декремент загасання яких є більшим за частоту: $\beta > \omega$.

4. Існує величезний клас коливань, які називаються **ангармонічними**. Вони описуються нелінійними диференціальними рівняннями, їх амплітуда (на відміну від гармонічних коливань) не є малою, часто навіть є дуже великою. Про нелінійні коливання важко зробити загальний висновок. Їхні амплітуда та частота визначається не лише параметрами

системи, їхні величини змінюються з часом, відбувається генерація вищих гармонік основної частоти.

В залежності від характеру збудження коливання можна поділити на такі типи.

1. **Власні коливання** виникають в ізольованій від зовнішніх сил системах після тимчасового зовнішнього збурення. Їхній характер визначається практично лише внутрішніми силами, фізичною побудовою системи. Енергію до такої систем вкладають один раз, під час первісного тимчасового зовнішнього збурення.

2. **Вимушені коливання** відбуваються внаслідок дії зовнішніх сил, які діють незалежно від коливань самої системи. Характер вимушених коливань визначається не лише внутрішніми властивостями системи, але істотно залежить від зовнішньої сили. Найчастіше саме вона визначає характер цих коливань. Енергія до системи надходить внаслідок дії зовнішньої сили.

3. Особливий тип вимушених коливань, який відрізняється від решти тим, що зовнішня сила періодично змінює який-небудь фізичний параметр системи (наприклад, масу маятника, довжину його підвісу, таке інше), називають **параметричними коливаннями**. У цьому випадку енергія надходить до системи через зовнішню силу; але в залежності від фазових співвідношень зовнішня сила або виконує додатну роботу, тоді амплітуда коливань зростає, або від'ємну роботу, тоді амплітуда зменшується. На лінійній стадії параметричні коливання є або параметрично нестійкими (реалізується режим параметричного збудження), або параметрично стійкими, тоді реалізується режим загасання. На нелінійній стадії параметричної нестійкості відбувається її насичення через нелінійний зсув фази коливань відносно фази зовнішньої сили.

4. **Нелінійний квазіперіодичний рух**, що виникає у системі внаслідок самозбудження, за умов відсутності зовнішньої сили, називають автоколиваннями. Їхній характер визначається структурою коливальної системи, яка умовно складається з коливального контуру, внутрішнього джерела енергії та ланки зворотного зв'язку. Ці коливання не загасають

з часом, хоч у системі є суттєві втрати енергії, оскільки до системи порціями надходить енергія від внутрішнього джерела.

Можна виділити десять *типів коливальних систем*. Запишемо їх так, щоб їхні властивості були попарно взаємно протилежними.

- **Автономні та неавтономні системи.** Залежно від того, входить чи не входить час явним чином до диференціального рівняння, що описує коливальну систему, системи поділяються на автономні та неавтономні. Автономні системи виконують вільні коливання та автоколивання, їхня частота визначається лише структурою системи. Неавтономні системи виконують параметричні та вимушені коливання. Частота таких систем дуже залежить від частоти зовнішньої сили, співвідношення власної частоти коливальної системи та частоти зовнішньої сили.
- **Стаціонарні та нестаціонарні системи.** Якщо параметри системи не залежать від часу, то це стаціонарна система, а у протилежному випадку – це нестаціонарна коливальна система. Для нестаціонарних систем коефіцієнти у диференціальних рівняннях руху залежать від часу.
- **Консервативні та неконсервативні системи.** Якщо енергія не надходить до системи та не зникає з неї, то це консервативна система. В такій системі діють тільки потенціальні та/або гіроскопічні сили. Звичайно, це ідеалізована модель. Неконсервативні системи поділяються на дисипативні системи, в яких повна енергія з часом зменшується, та автоколивальні системи.
- **Лінійні та нелінійні системи.** З вигляду диференціальних рівнянь, що описують коливальну систему, можна визначити, чи це лінійна, чи це нелінійна система. Для лінійних систем працює принцип суперпозиції розв'язків. Амплітуди лінійних коливань є малими порівняно з характерними масштабами задачі, а амплітуди нелінійних коливань, як правило, є дуже великими.
- **Системи зі скінченною кількістю ступенів волі та континуальні системи.** Коливальні системи бувають з однією, двома та багатьма ступенями вільності. Їхнє число залежить від

вибору моделі коливальної системи та системи узагальнених координат. Для континуальних систем характерним є неперервний розподіл параметрів системи, рівняння їхнього руху описується за допомогою функції кількох змінних у частинних похідних. Наведемо для прикладу моделі континуальних систем: одновимірні (стрижні, для цього випадку є тільки дві змінні – одна координата та час); двовимірні (оболонки); тривимірні (пружні тіла, газ, рідина).

Цей Розділ складається з основної частини та Додатка, який можна при першому читанні пропустити і, взагалі, повернутися до нього при вивченні курсу теоретичної механіки. Також він може стати в нагоді для студентів магістерської підготовки в разі вивчення певних спецкурсів, зокрема, з фізики плазми.

7.1. Малі коливання

Розглянемо механічну систему, стан якої можна задати за допомогою однієї узагальненої координати, яку ми позначимо x . Про такі коливальні системи кажуть, що вони мають одну ступінь вільності. Потенціальна енергія такої системи є функцією однієї змінної x : $U=U(x)$. Нехай система має положення стійкої рівноваги. У цьому положенні $U(x)$ має мінімум. Будемо рахувати координату x і потенціальну енергію U від положення рівноваги, тоді $U(0)=0$.

Розкладемо $U(x)$ в ряд по ступенях x , причому обмежимося малими коливаннями, так що більш високими ступенями x можна знехтувати:

$$U(x)=U(0)+\frac{dU}{dx}\Big|_{x=0}x+\frac{1}{2}\frac{d^2U}{dx^2}\Big|_{x=0}x^2+\frac{1}{6}\frac{d^3U}{dx^3}\Big|_{x=0}x^3+\dots \quad (7.3)$$

Оскільки при $x=0$ потенціальна енергія сягає мінімуму, то її перша похідна в цій точці дорівнює нулю, $U'(0)=0$, а друга похідна є додатною, $U''>0$. Позначимо другу похідну: $U''(0)=k$ ($k>0$), тоді потенціальна енергія (7.3) набуває простого вигляду:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2. \quad (7.4)$$

Цей вираз є застосовним, якщо коливання є малими, тобто, якщо відхилення системи від положення рівноваги є малим. Коливальну систему, в якій потенціальна енергія залежить від координати квадратично, називають **гармонічним осцилятором**. Наскільки малим має бути відхилення x , аби вираз (7.4) був справедливим? Для цього треба, аби четвертий доданок в (7.3), $\frac{1}{6} \frac{d^3 U}{dx^3} \Big|_{x=0} x^3$, яким знехтовано, був малим порівняно з третім доданком, $kx^2/2$, який залишено:

$$|x| \ll 3k \left| \frac{d^3 U}{dx^3} \Big|_{x=0} \right|^{-1}. \quad (7.5)$$

Цей вираз (7.4) співпадає з виразом для потенціальної енергії деформованої пружини, чію повертаючу силу пораховано за законом Гука:

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} = -kx. \quad (7.6)$$

Надамо частинці зміщення $x=a$, після чого залишимо систему саму по собі. Під дією сили F_x частинка рухатиметься відповідно до другого закону Ньютона:

$$m \ddot{x} = -kx. \quad (7.7)$$

Введемо позначення

$$\omega_0^2 = k/m. \quad (7.8)$$

Оскільки $k > 0$, то ω_0 – це дійсна величина:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.9)$$

В рівнянні (7.7) враховано лише повертаючу силу і знехтовано дисипацією, зокрема, силою тертя. Коливання, які виникають в системі за цих умов, називають **власними**. Власні коливання виникають в ізольованих від зовнішніх сил системах зі слабким загасанням після тимчасового зовнішнього збурення. Їхній характер визначається практично тільки внутрішніми силами, фізичною побудовою системи. Енергію в таку систему вкладають один раз, під час тимчасового зовнішнього збурення.

Розв'язком рівнянь (7.7) і (7.9) є синус або косинус, наприклад, його можна записати у вигляді (7.1). При цьому амплітуда a та початкова фаза α відіграють роль двох констант інтегрування диференціального рівняння другого порядку.

Виходячи з періодичності тригонометричної функції косинуса та визначення періоду, фази коливань в момент часу t , $\varphi(t)$, та через період, $\varphi(t+T)$, розрізняються на 2π :

$$[\omega_0(t+T) + \alpha] - [\omega_0 t + \alpha] = 2\pi \quad (7.10)$$

Отже $T = 2\pi/\omega_0$ – це період власних коливань, які описуються рівнянням (7.7).

За відомим зміщенням $x(t)$ (7.1) порахуємо швидкість руху $v(t)$ як похідну за часом:

$$v(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (7.11)$$

Знайдемо зв'язок констант інтегрування a і α із початковими умовами. Припустимо, що відомі координата x_0 , в якій перебувало тіло в початковий момент, $x(0) = x_0$, а також швидкість руху тіла в цей момент, $v(0) = v_0$:

$$x_0 = a \cos(\alpha), \quad v_0 = -a\omega_0 \sin(\alpha). \quad (7.12)$$

Для знаходження амплітуди коливань a отримаємо з (7.12) $\sin \alpha$ та $\cos \alpha$, а також скористаємося основною тригонометричною тотожністю:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}. \quad (7.13)$$

Поділивши синус початкової фази на косинус, здобуті з (7.12), позбудемося амплітуди та здобудемо тангенс початкової фази:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}. \quad (7.14)$$

Наприклад, якщо тіло вивели з положення рівноваги в координату x_0 і відпустили без початкової швидкості, $v_0=0$, то з (7.13) дістаємо, що амплітуда $a = |x_0|$, і з (7.14) – що початкова фаза $\alpha=0$.

Порахуємо повну механічну енергію коливань E_0 (суму кінетичної, $0.5mv^2$, та потенціальної, $0.5kx^2$, енергій):

$$E_0 = 0.5mv^2 + 0.5kx^2 = 0.5ma^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0t + \alpha) + 0.5ka^2\cos^2(\omega_0t + \alpha). \quad (7.15)$$

Скористаємося тим, що, за визначенням (7.8), $\omega_0^2 = k/m$:

$$E_0 = 0.5ka^2 = 0.5ma^2\omega_0^2 = 0.5kx_0^2 + 0.5mv_0^2. \quad (7.16)$$

Підкреслимо, що енергія коливань є пропорційною до квадрату амплітуди, $E_0 \propto a^2$.

Прямим розрахунком покажемо, що середня за часом (за період) кінетична енергія коливань, $\langle K \rangle$, дорівнює середній за період потенціальній енергії, $\langle U \rangle$. За визначенням середнього

$$\begin{aligned} \langle K \rangle = \langle 0.5mv^2 \rangle &= \frac{\int_0^T 0.5mv^2 dt}{\int_0^T dt} = \frac{m}{2T} \int_0^T v^2 dt = \\ &= \frac{ma^2\omega_0^2}{2T} \int_0^T \sin^2(\omega_0t + \alpha) dt, \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \langle U \rangle = \langle 0.5kx^2 \rangle &= \frac{\int_0^T 0.5kx^2 dt}{\int_0^T dt} = \frac{k}{2T} \int_0^T x^2 dt = \\ &= \frac{ka^2}{2T} \int_0^T \cos^2(\omega_0t + \alpha) dt. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Середні за період значення квадрату синуса та косинуса дорівнюють 0.5:

$$\begin{aligned} \langle \sin^2(\omega_0t + \alpha) \rangle &= \langle \cos^2(\omega_0t + \alpha) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega_0t + \alpha) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega_0t + 2\alpha)}{2} dt = \frac{1}{2T} \int_0^T dt - \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(2\omega_0t + 2\alpha) dt = \\ &= 0.5 - \frac{1}{4\omega_0T} \sin(2\omega_0t + 2\alpha) \Big|_0^T = 0.5. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Тут верхній знак відповідає середньому значенню квадрата синуса, нижній – косинуса. Підставивши середні значення квадратів синуса та косинуса до рівнянь (7.17) та (7.18), дістаємо:

$$\langle K \rangle = \frac{m\omega_0^2 a^2}{4}, \quad \langle U \rangle = \frac{ka^2}{4}. \quad (7.20)$$

З урахуванням визначення (7.8) квадрата власної частоти вирази (7.20) є тотожними: $\langle K \rangle = 0.25m\omega_0^2 a^2 \equiv \langle U \rangle = 0.25ka^2$. Тим самим доведено, що середнє за часом значення кінетичної енергії гармонічного осцилятора дорівнює середньому за часом значенню потенціальної енергії. Тобто повна механічна енергія гармонічного осцилятора $E_0 = 0.5ka^2$, яку здобуто в (7.16), в середньому порівну розподіляється між кінетичною та потенціальною.

7.2. Додавання коливань, які відбуваються в одному напрямку

Один із методів додавання коливань, які відбуваються в одному напрямку, ґрунтується на векторних діаграмах. Векторна діаграма – це схема, що графічно зображує коливання, що додаються, а також результуюче коливання у вигляді векторів на площині. Техніка векторних діаграм полягає в наступному.

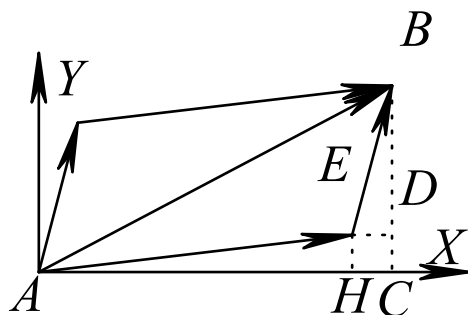


Рис. 7.1. Векторна діаграма

Візьмемо вісь, позначимо її x (рис. 7.1). Якщо вектор довжини a обернути з кутовою швидкістю ω , то проекція кінця вектора пересувається вздовж осі x від $-a$ до a , причому координата змінюється за гармонічним законом: $x = a \cos(\omega t + \alpha)$.

Покажемо, як додаються два гармонічні коливання ($x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$ та $x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$) однакового напрямку та довільних амплітуд (a_1 та a_2) і частот (ω_1 і ω_2). Результуючий рух тіла, що бере участь водночас у цих двох коливальних рухах, є сумою зміщень x_1 та x_2 . Ці коливання зображуватимемо за допомогою векторів \vec{a}_1 і \vec{a}_2 . Результуючий рух описується проекцією суми векторів \vec{a}_1 і \vec{a}_2 на напрямок осі x : $x_0 = x_1 + x_2$. Довжину вектора $\vec{a}_0 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ визначають за теоремою косинусів (або, що те саме, порахувавши скалярний добуток (\vec{a}_0, \vec{a}_0)):

$$a_0^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)) = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (7.21)$$

Тут $\varphi_1 = \omega_1 t + \alpha_1$ – фаза коливань x_1 , $\varphi_2 = \omega_2 t + \alpha_2$ – фаза коливань x_2 . Тангенс кута φ_0 між вектором \vec{a}_0 і напрямком осі x визначаємо з прямокутного трикутника ABC як частку протилежного катета BC ($|BC| = |BD| + |DC| = |BD| + |HE| = |BE| \sin \varphi_1 + |AE| \sin \varphi_2 = a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2$) до прилежного AC

$$(|AC| = |AH| + |HC| = |AH| + |ED| = |AE| \cos \varphi_2 + |EB| \cos \varphi_1 = a_2 \cos \varphi_2 + a_1 \cos \varphi_1):$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}. \quad (7.22)$$

Таким чином, додавання коливань можна звести до додавання векторів. Зауважимо також, що метод векторних діаграм не обмежується додаванням двох коливань, а може бути узагальнений на випадок довільної кількості коливань. Головне, йдеться про коливання, які відбуваються в одному напрямку.

7.3. Биття

Розглянемо важливий з точки зору практичних застосувань особливий випадок додавання двох гармонічних коливань однакового напрямку, які мало відрізняються за частотою. Результат такого додавання прийнято називати биттям. Биття можна розглядати як гармонічне коливання, амплітуда якого повільно змінюється з часом за гармонічним законом.

Для спрощення тригонометричних формул розглянемо детально граничний випадок додавання двох коливань, які відбуваються в одному напрямку з однаковими початковими фазами та амплітудами,

$$x_1 = a \cos \omega t, \quad x_2 = a \cos(\omega + \Delta \omega)t, \quad \Delta \omega \ll \omega \quad (7.23)$$

Це спрощення дає можливість при обчисленні результуючого коливання $x = x_1 + x_2$ винести спільну амплітуду за дужки і скористатись відомим з тригонометрії виразом для суми косинусів, $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2}$:

$$x = x_1 + x_2 = \left[2a \cos \frac{\Delta \omega t}{2} \right] \cos \left(\omega t + \frac{\Delta \omega t}{2} \right). \quad (7.24)$$

Завдяки умові $\Delta\omega \ll \omega$, за час, за який множник $\cos\omega t$ робить одне повне коливання, множник у квадратних дужках в (7.24) майже не змінюється. Цей множник, $[2a\cos\frac{\Delta\omega t}{2}]$,

називають амплітудою биттів або огибаючою (рис. 7.2). Огибаючу показано на рис. 7.2 штриховою лінією. Період результуючих коливань приблизно збігається з періодом коливань (7.23), що

додаються, $T=2\pi/(\omega+\frac{\Delta\omega}{2})\approx$

$\approx 2\pi/\omega$. Період биттів T_B визначають як найкоротший проміжок часу між моментом t , коли результуюче коливання $x(t)$ досягає максимальної амплітуди, та наступним моментом $t+T_B$, коли амплітуда $x(t)$

знову стане максимальною. За цей час фаза $\frac{\Delta\omega t}{2}$ амплітуди

биттів змінюється на $\frac{\Delta\omega T_B}{2}=\pi$. Отже, якщо додаються два коливання з циклічними частотами ω_1 і ω_2 , то період биттів $T_B=\frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}$.

Амплітуди a_1 і a_2 коливань, що додаються, можуть не співпадати, $x_1=a_1\cos\omega t$, $x_2=a_2\cos(\omega+\Delta\omega)t$. Тоді (рис. 7.3) мінімальне значення огибаючої, $|a_1-a_2|$, отримуємо з (7.21) за

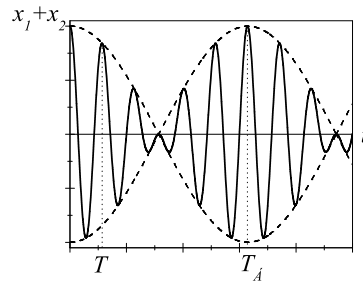


Рис. 7.2. Биття в раз додавання коливань із однаковими амплітудами

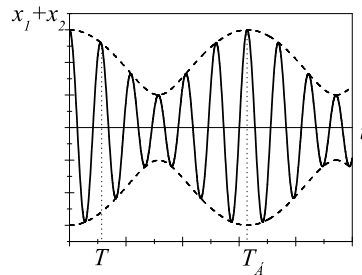


Рис. 7.3. Биття в разі додавання коливань із різними амплітудами

умови, що коливання відбуваються в протифазі, $\alpha_2=\alpha_1+\pi$; а максимальне, (a_1+a_2) , – коли коливання x_1 і x_2 відбуваються у фазі, $\alpha_2=\alpha_1$. Явний вираз для огибаючих, які зображено на рис. 7.3 штриховими лініями, здобуваємо з рівняння (7.21): $\pm\sqrt{a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos(\Delta\omega t)}$. Період результуючих коливань, як і період биттів, у цьому загальному випадку визначається так само, як і в частинному випадку, $a_1=a_2$, розглянутому вище.

7.4. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Нехай матеріальна точка бере участь у коливальному русі вздовж осі x і одночасно – у коливальному русі уздовж осі y (перпендикулярної до осі x). Визначимо траєкторію руху матеріальної точки в цьому випадку. Почнемо з найпростішого випадку, коли обидва коливання відбуваються з тією самою частотою:

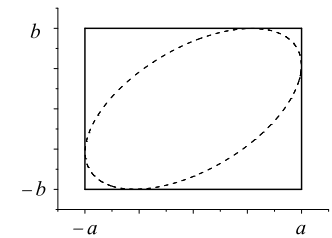


Рис. 7.4. Прямокутник, усередині якого міститься траєкторія руху, яка виникає внаслідок додавання двох перпендикулярних коливань

$$x=a\cos\omega_1 t, y=b\cos(\omega_2 t+\alpha), \omega_1=\omega_2. \quad (7.25)$$

В (7.25) час t рахується так, аби початкова фаза першого коливання дорівнювала нулю в початковий момент. З загальних міркувань, враховуючи обмеженість функції косинуса, можна одразу сказати, що траєкторія (7.25) лежить всередині прямокутника зі сторонами $2a$ на $2b$ (рис. 7.4).

Для знаходження траєкторії руху матеріальної точки слід виключити час із рівнянь (7.25). З рівняння (7.25) для координати x маємо:

$$\cos \omega t = \frac{x}{a}; \quad (7.26) \quad \sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (7.26)$$

Скористаємося тригонометричною формулою для косинуса суми в другому рівнянні (7.25):

$$\frac{y}{b} = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha. \quad (7.27)$$

Підставимо вирази для $\cos \omega t$ і $\sin \omega t$ з (7.26) до (7.27):

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \alpha \mp \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \alpha. \quad (7.28)$$

Аби позбутися двозначності в рівнянні (7.28), перенесемо перший доданок з правої частини до лівої та піднесемо рівняння в квадрат:

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos \alpha \right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \sin^2 \alpha. \quad (7.29)$$

Здобуте рівняння (7.29) траєкторії руху матеріальної точки, яка бере участь водночас у двох взаємно перпендикулярних коливаннях з однаковими частотами, – це рівняння еліпса, вісі якого довільно орієнтовані відносно координатних осей x та y .

Розглянемо частинні випадки траєкторії, які втілюють з (7.29). Перший частинний випадок отримаємо з (7.29), якщо розглядатимемо синфазні коливання, $\alpha = 0$:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0. \quad (7.30)$$

Рівняння траєкторії (7.30) – це є рівняння прямої, яка проходить крізь початок координат:

$$y = \frac{b}{a} x. \quad (7.31)$$

Тобто, точка, що коливається, зміщується по цій прямій, віддаляючись від початку координат на відстань $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, яка періодично змінюється з часом,

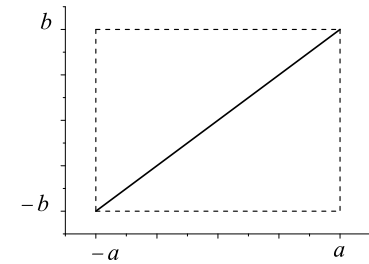


Рис. 7.5. Можлива траєкторія руху матеріальної точки, яка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях з однаковою частотою

$$r = \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t} = \sqrt{a^2 + b^2} |\cos \omega t|. \quad (7.32)$$

Через обмеженість функції косинуса траєкторія точки, що коливається, являє собою не пряму, а відрізок цієї прямої (рис. 7.5).

Другий частинний випадок траєкторії руху здобудемо з загального рівняння (7.29), якщо розглядати коливання в протифазі, $\alpha = \pm \pi$:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = 0. \quad (7.33)$$

В цьому випадку матеріальна точка рухається вздовж відрізка прямої

$$y = -\frac{b}{a} x, \quad (7.34)$$

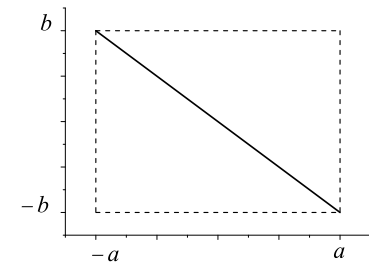


Рис. 7.6. Варіант траєкторії руху матеріальної точки, яка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях з однаковою частотою

тобто, рухається вздовж другої діагоналі прямокутника (рис. 7.6), віддаляючись із часом від початку координат на відстань (7.32).

Третій простий частинний випадок отримаємо, якщо

розглянемо зсув фаз коливань $\alpha = \pm\pi/2$. У цьому випадку загальне рівняння траєкторії (7.29) набуває вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7.35)$$

Рівняння (7.35) – це рівняння еліпса зі сторонами a і b . Випадки, що відповідають різним знакам зсуву фаз $\alpha = +\pi/2$ і $\alpha = -\pi/2$ відрізняються напрямком руху частинки по еліпсу. У разі $\alpha = +\pi/2$ спостерігається рух за стрілкою годинника; якщо $\alpha = -\pi/2$ – рух проти стрілки годинника.

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань є близькими, $\omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega$, то їх можна розглядати як коливання однакової частоти, але з повільно змінною різницею фаз, $\alpha(t) = \alpha_0 + \Delta\alpha t$. Тоді результуючий рух відбувається по кривій, яка послідовно набуває форм, що відповідають всім значенням різниці фаз від $-\pi$ до $+\pi$.

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань відносяться як натуральні числа, то траєкторії результуючого руху є замкненими і мають вигляд досить складних фігур, які називають **фігурами Ліссажу**³. На рис. 7.7 наведено фігури Ліссажу для випадку $\omega_1/\omega_2 = n/m = 3/2$. Вкажемо спільні властивості фігур Ліссажу. По-перше, як уже було зазначено вище, ці фігури містяться всередині прямокутників зі сторонами, що є паралельними до координатних осей, довжиною $2a$ (уздовж осі абсцис) на $2b$ (уздовж осі ординат). Геометричний центр цих прямокутників співпадає з початком координат. По-друге, оскільки $n/m = 3/2 > 1$, то матеріальна точка швидше рухається вздовж осі x і частіше торкається сторін, паралельних осі ординат: на рис. 7.7 у загальному випадку траєкторії тричі торкаються вертикальних сторін і двічі – горизонтальних. Виняток складають випадки, коли зсув фаз дорівнює нулю (рис. 7.7 а)) та $\pi/2$ (рис. 7.7 г)), тоді відбувається виродження (корені співпадають).

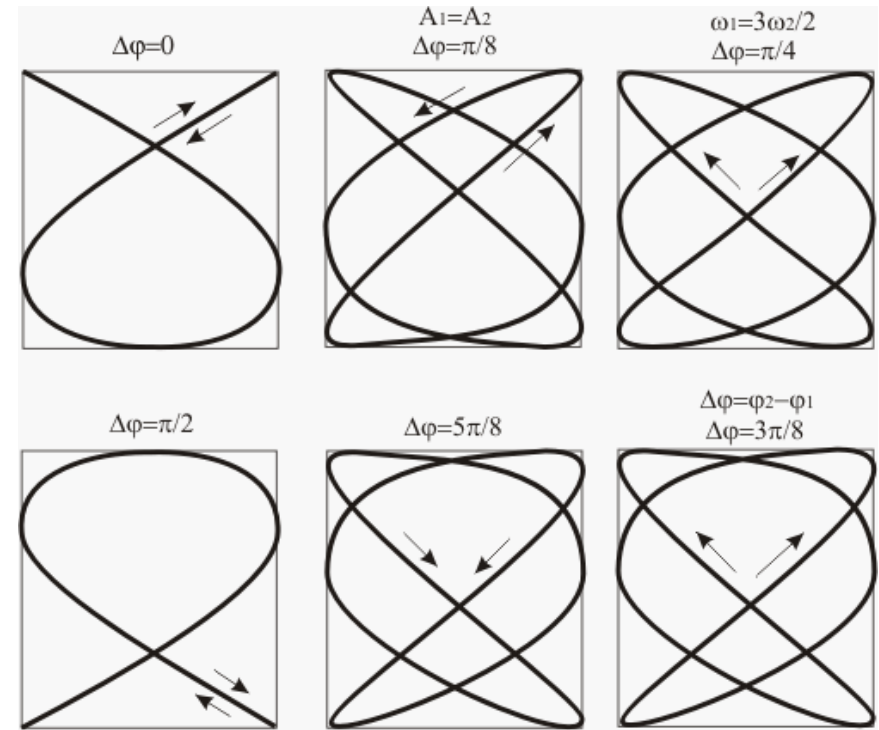


Рис. 7.7. Фігури Ліссажу у випадку $\omega_1/\omega_2 = 3/2$ для різних зсувів фаз

7.5. Загасання коливань за рахунок внутрішнього тертя

Розглянемо в цьому підрозділі загасання коливань за рахунок внутрішнього тертя, яке супроводжує, зокрема, рух математичного маятника крізь повітря. У найпростішому випадку сила внутрішнього тертя є пропорційною до швидкості:

$$F_m = -r \dot{x}, \quad (7.36)$$

де $r > 0$ – стала, яку називають коефіцієнтом опору. За розмірністю $[r] = \text{кг/с}$. Вираз (7.36) можна пояснити, виходячи з

³ Ліссажу (Lissajons) Жюль Антуан (1822-1880), член-кореспондент Паризької АН. Відомий також своїми роботами з акустики та оптики.

простих якісних фізичних міркувань. З досвіду відомо, що сила внутрішнього тертя залежить від швидкості, з якою тіло рухається крізь середовище, $F_m = F_m(\dot{x})$. Якщо швидкість руху є достатньо малою, цю залежність можна розкласти в ряд і відкинути доданки більш високого порядку малості:

$$F_m(\dot{x}) = F_m(0) + \left. \frac{dF_m}{d\dot{x}} \right|_{\dot{x}=0} \dot{x} + \dots \quad (7.37)$$

Перший доданок в ряду (7.37) дорівнює нулю, бо сила внутрішнього тертя відсутня, $F_m(\dot{x})=0$, якщо тіло не рухається відносно середовища, $\dot{x}=0$. Множник $\left. \frac{dF_m}{d\dot{x}} \right|_{\dot{x}=0} = -r$ при другому

доданку в (7.37) має бути від'ємним, бо силу внутрішнього тертя завжди направлено протилежно до швидкості тіла. Аби розкладання в ряд (7.37) було справедливим, швидкість має бути малою порівняно з якоюсь характерною швидкістю. Без доведення вкажемо, що цією характерною швидкістю має бути швидкість звука.

За наявності сили внутрішнього тертя другий закон Ньютона набуває вигляду:

$$m \ddot{x} = -kx - r \dot{x}. \quad (7.38)$$

З точки зору теорії диференціальних рівнянь це рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, розв'язок якого зовсім не важко знайти, скориставшись стандартною підстановкою Ейлера: $x(t) = a \exp(\lambda t)$. Покажемо, як можна дійти цього ж таки висновку, спираючись на фізичні міркування. Для цього розглянемо два граничні випадки.

У першому випадку вважатимемо загасання малим – це дає можливість скористатися результатами параграфу 7.1, в якому досліджено малі коливання без загасання. Наявність загасання призводить до розсіювання енергії коливань (див. формулу (7.16)), отже, до зменшення амплітуди коливань. Як

амплітуда загасаючих коливань зменшується з часом? Відповідь на це питання можна здобути, спираючись на закон збереження кінетичної енергії (див. параграф 3.3, формулу (3.21)). Протягом одного періоду енергія коливань, $0.5m v_{max}^2$, слабко зменшується за рахунок роботи сили тертя:

$$0.5m[v_{max}^2(T) - v_{max}^2(0)] = \int_0^T F_m dx. \quad (7.39)$$

Оскільки йдеться про слабке загасання, $v_{max}^2(T) \approx v_{max}^2(0)$, ліву частину рівняння (7.39) можна приблизно переписати в такий спосіб:

$$\begin{aligned} 0.5m[v_{max}^2(T) - v_{max}^2(0)] &= 0.5m[v_{max}(T) - v_{max}(0)][v_{max}(T) + v_{max}(0)] \\ &= m v_{max} \Delta v_{max}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Тут Δv_{max} – це мала зміна амплітудного значення швидкості протягом періоду, $\Delta v_{max} = v_{max}(T) - v_{max}(0)$.

Порахуємо роботу сил тертя:

$$\int_0^T F_m dx = \int_0^T (-r \dot{x}) dx = -r \int_0^T \dot{x} \frac{dx}{dt} dt. \quad (7.41)$$

Оскільки ми вважаємо вплив загасання на коливання протягом одного періоду малим, скористаємося в формулі (7.41) для залежності $\dot{x}(t)$ виразом (7.11):

$$\int_0^T F_m dx = -r \int_0^T a^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) dt. \quad (7.42)$$

Візьмемо до уваги, що квадрат амплітудного значення швидкості в (7.42) $a^2 \omega_0^2 = v_{max}^2$ і середнє значення квадрата синуса за період дорівнює 0.5 (див. (7.19)):

$$\int_0^T F_m dx = -rv_{max}^2 0.5T. \quad (7.43)$$

Візьмемо до уваги, що елементарний проміжок часу dt , протягом якого в коливальній системі відбулися малі зміни амплітуди коливань, – це період, $T \rightarrow dt$. Підставивши результати (7.40) і (7.43) до (7.39), здобуємо диференціальне рівняння для амплітуди швидкості v_{max} :

$$mv_{max}dv_{max} = -rv_{max}^2 0.5dt. \quad (7.44)$$

Введемо позначення

$$\beta = r/(2m), \quad (7.45)$$

яке стане в нагоді також і в подальшому. З урахуванням цього позначення рівняння (7.44) набуває такого вигляду:

$$\frac{dv_{max}}{v_{max}} = -\beta dt. \quad (7.46)$$

Розв'язком рівняння (7.46) слугує експонента:

$$v_{max}(t) = v_{max}(0) \exp(-\beta t). \quad (7.47)$$

Коефіцієнт загасання β за розмірністю $[\beta] = 1/c$. Його ще інколи називають декрементом (від англійського дієслова *to decrease*). Фізичний зміст декременту полягає в тому, що β^{-1} дорівнює часу, протягом якого амплітуда коливань зменшується від початкового значення до значення, меншого в e разів.

Виходячи з результату (7.47), який показує, що амплітуда коливань, які загасають через внутрішнє тертя, зменшується з часом за експонентою, шукатимемо розв'язок рівняння (7.38) у вигляді

$$x(t) = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (7.48)$$

Швидкість \dot{x} і прискорення \ddot{x} матеріальної точки, які входять до рівняння (7.38), дорівнюють:

$$\dot{x}(t) = -\gamma a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha) - \omega a_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha), \quad (7.49)$$

$$\ddot{x}(t) = \gamma^2 a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha) + 2\omega\gamma a_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha) - \omega^2 a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (7.50)$$

Якщо скористатись визначеннями власної частоти (7.8) і декременту (7.45), то рівняння (7.38) загасаючих коливань набуває наступного вигляду:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.51)$$

Підставимо до (7.51) явні вирази (7.49) і (7.50) для швидкості та прискорення; винесемо за дужки спільний множник $a_0 e^{-\gamma t}$, який дорівнює нулю лише за умови $t \rightarrow \infty$; та зберемо подібні:

$$a_0 e^{-\gamma t} \{ \cos(\omega t + \alpha) [\gamma^2 - \omega^2 - 2\beta\gamma + \omega_0^2] + \sin(\omega t + \alpha) [2\omega\gamma - 2\beta\omega] \} = 0. \quad (7.52)$$

Рівняння (7.51) можна задовольнити для довільного моменту часу, лише якщо вирази в квадратних дужках перед $\cos(\omega t + \alpha)$ і $\sin(\omega t + \alpha)$ водночас дорівнюють нулю:

$$\gamma = \beta, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (7.53)$$

Таким чином, якщо загасання через внутрішнє тертя є не надто сильним, $\beta < \omega_0$, то матеріальна точка коливается (рис. 7.8) за законом (7.48) і встигає зробити кілька коливань перед тим, як їхня амплітуда помітно зменшиться. При цьому частота коливань (7.53) є меншою за власну частоту, $\omega \approx \omega_0 - \beta^2/(2\omega_0) < \omega_0$, на величину, квадратичну за коефіцієнтом опору r . Амплітуда коливань, $a(t) = a_0 e^{-\beta t}$, експоненціально зменшується з часом,

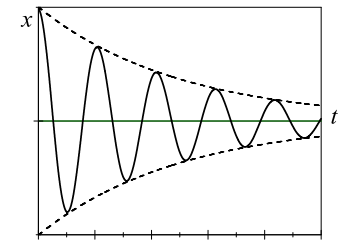


Рис. 7.8. Залежність координати від часу в разі загасання коливань через внутрішнє тертя

декремент (7.45) є лінійним за коефіцієнтом опору. На рис. 7.8 огинаючу показано штриховою лінією.

В експерименті зручно визначити частку амплітуд коливань в довільний момент часу і через період, $\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T}$.
Логарифм цієї частки називають **логарифмічним декрементом** (загасання):

$$\beta T = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} \equiv \Lambda. \quad (7.54)$$

В термінах логарифмічного декременту амплітуда коливань записується так: $a = a_0 \exp(-\Lambda t/T)$. Фізичний зміст поняття «логарифмічний декремент» полягає в наступному. Величина $1/\Lambda$ визначає, скільки коливань має відбутись, аби їх амплітуда зменшилась в e разів.

З логарифмічним декрементом пов'язана така характеристика коливальної системи, як її **добротність** Q . Вона визначається так: $Q \equiv \pi/\Lambda$. Аби прояснити фізичний зміст добротності, нагадаємо, що енергія загасаючих коливань зменшується з часом приблизно за експонентою:

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \approx \frac{ka_0^2}{2} e^{-2\beta t} \approx E_0 e^{-2\beta t}. \quad (7.55)$$

Звідси дістаємо, що швидкість зменшення енергії коливань, які загасають за механізмом внутрішнього тертя, приблизно дорівнює

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_0 e^{-2\beta t} = -2\beta E. \quad (7.56)$$

Іншими словами, якщо загасання є достатньо слабким, $\Lambda \ll 1$, зменшення енергії коливань за період є пропорційним до енергії коливань,

$$-\Delta E = 2\beta T E = 2\Lambda E = 2\pi E/Q \text{ або } \frac{E}{-\Delta E} = \frac{Q}{2\pi}. \quad (7.57)$$

Таким чином, при слабкому загасанні коливань, добротність із точністю до множника 2π дорівнює частці енергії, що накопичена в системі в даний момент, до її втрати за період.

При $\beta = \omega_0$ період коливань $T \rightarrow \infty$, тобто рух перестає бути періодичним (див. (7.53)).

Якщо внутрішнє тертя є немалим, $\beta > \omega_0$, вираз (7.53) для власної частоти втрачає сенс. У цьому разі слушно звернутись до граничного випадку, що є протилежним до розглянутого вище, а саме, до випадку сильного загасання: $\beta \gg \omega_0$. При цьому рівняння загасаючих коливань (7.51) спрощується:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} = 0. \quad (7.58)$$

Розв'язок рівняння (7.58) записується в термінах експоненти: $x(t) = ae^{-\beta t}$. Така залежність відхилення $x(t)$ матеріальної точки від положення рівноваги серед іншого збігається з повсякденним досвідом. Тому шукатимемо розв'язок повного рівняння (7.51) у вигляді $x(t) = a \exp(\lambda t)$, як того й вимагає теорія диференціальних рівнянь. Підставивши такий вигляд $x(t)$ до рівняння (7.51), дістаємо квадратне рівняння на λ :

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (7.59)$$

Рівняння (7.59) має два розв'язки:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (7.60)$$

Тут індекс «1» в кореня відповідає знаку «+» перед радикалом, $\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, та індекс «2» – знаку «-»: $\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Наявність саме двох розв'язків квадратного рівняння (7.59) відповідає положенню теорії диференціальних рівнянь про те, що лінійне диференціальне рівняння другого порядку, яким є рівняння (7.51), має два лінійно незалежні розв'язки:

$$x(t) = a_1 \exp(\lambda_1 t) + a_2 \exp(\lambda_2 t). \quad (7.61)$$

Зазначимо, що другий доданок в сумі (7.61) швидше за перший зменшується з часом, $\lambda_1 > \lambda_2$. Різниця між темпами зменшення цих доданків тим більше проявляється, чим більше загасання. В наближенні $\beta \gg \omega_0$ для декрементів $\lambda_{1,2}$ маємо наступні приблизні вирази:

$$\lambda_1 \approx -\omega_0^2/(2\beta), \quad \lambda_2 \approx -2\beta + \omega_0^2/(2\beta). \quad (7.62)$$

Якими б не були декременти, сума (7.61) позбавлена будь-яких ознак коливального характеру – їй у жодному разі не властивий ніякий період, тому такий рух називають **аперіодичним** (рис. 7.9).

Залежно від початкових умов можливі два принципово різні характери аперіодичного руху. Якщо, наприклад, вивести систему з сильним внутрішнім тертям з положення рівноваги та залишити у спокої (або несильно штовхнути), то вона повільно повертатиметься до рівноважного положення (суцільна крива на рис. 7.9). Якщо ж після виведення з положення рівноваги системі надати великого значення швидкості у напрямку до положення рівноваги, $|v_0| > |x_0|(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})$, то вона може один раз пройти положення рівноваги і повільно повертатиметься до нього (штрихова крива на рис. 7.9).

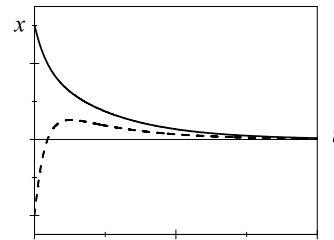


Рис. 7.9. Аперіодичний рух

7.6. Загасання коливень за рахунок тертя ковзання

Розглянемо загасання лінійних коливень за рахунок тертя ковзання, яке супроводжує, зокрема, рух тіла на

горизонтальній поверхні під дією сили пружної деформації пружини. В цьому випадку силу тертя ковзання, як завжди, спрямовано протилежно вектору швидкості:

$$m \ddot{x} = -kx - \mu mg \operatorname{sign}(\dot{x}). \quad (7.63)$$

Тут функція sign визначено так, що $\operatorname{sign}(\dot{x}) = +1$, якщо тіло на пружині рухається вздовж осі x ; і $\operatorname{sign}(\dot{x}) = -1$, якщо тіло рухається проти осі x .

Коли тіло рухається вздовж осі x , рівняння (7.63) набуває вигляду

$$m \ddot{x} = -kx - \mu mg. \quad (7.64)$$

Рівняння (7.64) зводиться до стандартного вигляду (7.7) заміною $q_1 = x + x_0$, де $x_0 = \mu mg/k$: $m \ddot{q}_1 = -kq_1$. Для нової змінної q_1 розв'язок: $q_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1)$, – є добре відомим. Отже, координата цього тіла змінюється з часом за законом:

$$x(t) = a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) - x_0. \quad (7.65)$$

Зазначимо, що наявність тертя ковзання не впливає на частоту коливень тіла на пружині, $\omega_0^2 = k/m$.

Розглянемо для визначеності задачу з наступними початковими умовами. Тіло було виведено з положення рівноваги і відпущено без надання йому початкової швидкості, $x(0) = -A$, $\dot{x}(0) = 0$. Аби

задовольнити обраним початковим умовам, константи інтегрування a_1 і α_1 слід обрати в наступний спосіб: $\alpha_1 = 0$, $a_1 = x_0 - A$ (рис. 7.10). Коли минає півперіоду, тіло зупиняється в точці $x(T/2) = A - 2x_0$. При цьому тіло віддалено від положення рівноваги $x=0$ на відстань, що є меншою, ніж

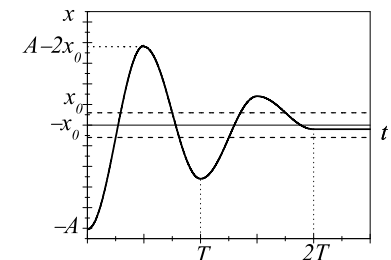


Рис. 7.10. Залежність координати від часу в разі загасання коливень за рахунок тертя ковзання

та, на якій воно перебувало на початку свого руху, а саме, на величину $2x_0$.

Після цього, $T/2 < t < T$, починається рух тіла назад, тобто проти осі x , $\text{sign}(\dot{x}) = -1$. При цьому рівняння (7.63) набуває вигляду

$$m\ddot{x} = -kx + \mu mg. \quad (7.66)$$

Рівняння (7.66) зводиться до стандартного вигляду (7.7) заміною $q_2 = x - x_0$. Для змінної q_2 розв'язок: $q_2 = a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2)$, є добре відомим. Координата матеріальної точки змінюється з часом у другий півперіод за законом:

$$x(t) = a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2) + x_0. \quad (7.67)$$

Аби задовольнити обраним початковим умовам, константи інтегрування слід обрати так: $\alpha_2 = 0$, $a_2 = 3x_0 - A$. По закінченні періоду тіло опиняється в точці $x(T) = 4x_0 - A$ і зупиняється. Зазначимо, що відстань до рівноважного положення за період зменшується на $4x_0$.

Наступні півперіоду, $T < t < 3T/2$, дане тіло рухається за законом, подібним до (7.65): $x(t) = (5x_0 - A) \cos(\omega_0 t) - x_0$. Далі, $3T/2 < t < 2T$, – за законом, схожим на (7.67): $x(t) = (7x_0 - A) \cos(\omega_0 t) + x_0$. Рух зупиняється, коли досліджуване тіло зупиняється всередині смуги застою, $-x_0 < x < x_0$, її показано на рис. 7.10 горизонтальними штриховими лініями. Для випадку, який показано на рис. 7.10, зупинка відбувається після двох періодів, $t = 2T$. Матеріальна точка не може зрушити далі з місця, бо сила пружної деформації пружини виявляється меншою за силу тертя ковзання, $|kx| < \mu mg$, і компенсується силою тертя спокою.

Отже, коливання, що загасають за механізмом тертя ковзання, відбуваються з тією самою частотою, що і власні коливання, їхня амплітуда зменшується з часом не за експонентою, а за лінійним законом: протягом кожного півперіоду амплітуда коливань зменшується на $2\mu mg/k$.

7.7. Вимушені коливання за умови загасання за рахунок внутрішнього тертя

Розглянемо тепер коливання, які відбуваються під дією зовнішньої періодичної сили. Для спрощення вважатимемо, що ця сила змінюється за гармонічним законом, $F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \alpha)$. Урахувавши в законі динаміки наявність цієї сили, то замість (7.51) дістаємо:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t + \alpha). \quad (7.68)$$

Тут константа $f = F_0/m$ за розмірністю є прискоренням.

В теорії диференціальних рівнянь рівняння (7.68) – це лінійне (невідома функція $x(t)$ та її похідні входять до цього рівняння лише у вигляді доданків, пропорційних першому ступеню цієї функції або її похідних), неоднорідне (до цього рівняння поряд із доданками, що містять невідому функцію $x(t)$ та її похідні, входить неоднорідність – доданок $f \cos(\Omega t + \alpha)$) диференціальне рівняння другого порядку (до цього рівняння входять похідні від $x(t)$ порядку, не вище другого). З теорії розв'язання диференціальних рівнянь відомо, що загальним розв'язком такого рівняння є сума загального розв'язку (тобто розв'язку (7.48)) відповідного однорідного рівняння (тобто, рівняння (7.51)) та будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння (7.68).

Перекладемо зміст попереднього абзацу на мову загальної фізики. Для цього розглянемо рух маятника в лабораторії (фізичного або математичного – це не принципово), до якого прикладено зовнішню періодичну силу. Ми побачимо, що власні коливання маятника («загальний розв'язок однорідного рівняння»), якщо вони існували перед застосуванням зовнішньої періодичної сили, з часом загасають, натомість коливання під дією зовнішньої періодичної сили тривають. Ці вимушені коливання відбуваються з частотою Ω зовнішньої сили, вони відстають за фазою від зовнішньої сили через наявність інертності коливальної системи.

Відповідно до цього шукатимемо частинний

(вимушений) розв'язок рівняння (7.68) у вигляді гармонічних коливань із частотою зовнішньої сили,

$$x(t) = A \cos(\Omega t). \quad (7.69)$$

При цьому α набуває змісту зсуву фаз між зовнішньою силою та вимушеними коливаннями, спричиненими цією силою. Підставимо вирази для швидкості матеріальної точки, $v(t) = -\Omega A \sin(\Omega t)$, і її прискорення $a(t) = -\Omega^2 A \cos(\Omega t)$, до рівняння руху (7.68):

$$\cos(\Omega t)[- \Omega^2 A + \omega_0^2 A - f \cos \alpha] + \sin(\Omega t)[-2\beta \Omega + f \sin \alpha] = 0. \quad (7.70)$$

Рівняння (7.70) має виконуватися будь-якого моменту часу, тому обидві суми в ньому в квадратних дужках перед синусом і косинусом мають тотожно дорівнювати нулю:

$$- \Omega^2 A + \omega_0^2 A - f \cos \alpha = 0, \quad -2\beta \Omega + f \sin \alpha = 0. \quad (7.71)$$

Розв'язання системи рівнянь (7.71) дає вираз для зсуву фаз α між зовнішньою силою та вимушеними коливаннями та амплітуди коливань A :

$$\tan \alpha = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad A^2 = \frac{f^2}{4\beta^2 \Omega^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}. \quad (7.72)$$

Зсув фаз α монотонно зростає від нуля до $\pi/2$ із збільшенням частоти зовнішньої сили Ω від нуля до ω_0 . Подальше збільшення частоти Ω від ω_0 до нескінченності супроводжується монотонним зростанням зсуву фаз

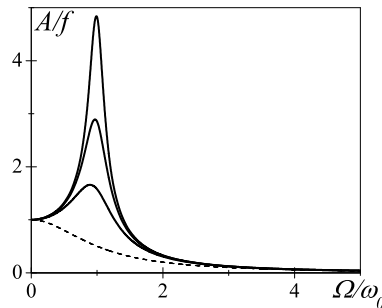


Рис. 7.11. Амплітудно-частотна характеристика загасаючих коливань

від $-\pi/2$ до нуля.

Амплітудно-частотну характеристику загасаючих коливань (залежність амплітуди коливань A , нормованої на f , від частоти, нормованої на власну частоту вільних коливань, Ω/ω_0) наведено на рис. 7.11 суцільним лініями. При побудові цих графіків вважалося, що $\beta < \omega_0$, а саме: $\beta^2/\omega_0^2 = 0.1, 0.03, 0.01$.

Проаналізуємо залежність амплітуди коливань від частоти зовнішньої сили Ω . Якщо частота $\Omega = 0$, то амплітуда набуває значення, яке не залежить від декременту, $A = f/\omega_0^2$. За малих значень Ω , $\Omega \ll \omega_0$, амплітуда зростає від $A = f/\omega_0^2$ за квадратичним законом, $A \approx f(1 + \Omega^2/\omega_0^2)/\omega_0^2$. За великих значень частоти Ω , $\Omega \gg \omega_0$, амплітуда зменшується обернено пропорційно до квадрату Ω , $A \approx f(1 + \omega_0^2/\Omega^2)/\Omega^2$. Коли частота Ω є близькою до власної частоти ω_0 , амплітуда досягає максимуму. Значення частоти зовнішньої сили, за якого досягається найбільша амплітуда вимушених коливань, називають **резонансним**. Резонансну частоту, $\Omega_{рез}$, і відповідне максимальне значення амплітуди, $\max(A)$, можна визначити, взявши похідну від амплітуди за частотою і прирівнявши цю похідну нулю:

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad \max(A) = \frac{f}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (7.73)$$

Формули (7.73) підтверджують залежність характеру кривих на рис. 7.11 від величини декременту: що меншим є декремент, $\beta \rightarrow 0$, то більшою є максимальна досяжна амплітуда, $\max(A) \rightarrow \infty$; то ближчою є резонансна частота до власної частоти, $\Omega_{рез} \rightarrow \omega_0$. Малий декремент β відіграє роль півширини резонансу: при відхиленні частоти Ω від власної частоти ω_0 на величину β , $\Omega = \omega_0 - \beta$, квадрат амплітуди набуває значення, вдвічі меншого за (7.73).

Резонансом (від латинського *resono* – відгукуватись) називають різке збільшення амплітуди коливань, яке спостерігається за певних умов. У випадку вимушених коливань ці умови полягають в наближенні частоти зовнішнього

періодичного впливу до власної частоти коливної системи. З енергетичних міркувань резонанс пояснюється тим, що при наближенні частоти Ω до ω_0 поліпшується фазове співвідношення між зовнішньою силою і швидкістю матеріальної точки, внаслідок чого зростає енергія коливань, а отже, і їхня амплітуда. Подальше зростання амплітуди (понад значення $\max(A)$) не відбувається, бо втрати енергії на від'ємну роботу сили внутрішнього тертя починають компенсувати надходження енергії за рахунок роботи зовнішньої періодичної сили. Резонанс може бути як корисним, наприклад, при розгойдуванні дитини на гойдалці, так і шкідливим, наприклад, коли він призводить до руйнування механічної системи (наприклад, мостів і турбін). Зазначимо, що резонанс може статись і з інших причин, про які йтиметься далі. Резонанс спостерігається як у часі: при досягненні резонансних умов мала спостережувана початкова амплітуда коливань стрімко зростає з часом (протягом інтервалу порядку $1/\beta$); так і у вимірі частот: про амплітудно-частотну характеристику кажуть, що вона носить резонансний характер, коли максимальне значення амплітуди значно перевищує ті значення, яких набуває амплітуда поза цими умовами. Наприклад, на рис. 7.11 верхні криві, що відповідають достатньо слабкому загасанню ($\beta^2 = 0.03, 0.01$), носять яскраво виражений резонансний характер; тоді як на нижній кривій, що відповідає випадку $\beta^2 = 0.1$, резонанс майже не помітний.

Сума частинного розв'язку (7.69) та загального розв'язку (7.48) відповідного однорідного рівняння (7.38) дає загальний розв'язок неоднорідного рівняння (7.68), який описує поведінку системи при вимушених коливаннях. Роль загального розв'язку (7.48) є помітною лише спочатку. З плином часу через множник $\exp(-\beta t)$ роль цього члена все більше зменшується, і ним можна нехтувати. Таким чином, частинний розв'язок (7.69) описує вимушені коливання, що встановились. Якщо вільних коливань від початку не було, то час встановлення вимушених коливань все одно дорівнює $1/\beta$.

Асимптотики амплітудно-частотної характеристики можна здобути з рівняння руху (7.68), уникнувши прямого

обчислення формули (7.72). Розглянемо два граничні випадки.

1) Коли зовнішня періодична змушуюча сила є повільною, $\Omega \ll \omega_0$, перший доданок у лівій частині (7.68) за порядком величини є набагато меншим за третій: $\ddot{x} \sim \Omega^2 x \ll \omega_0^2 x$, тобто прискорення є малим, тому цим першим доданком можна знехтувати. Другий доданок за порядком величини також є малим порівняно з третім: $2\beta \dot{x} \sim 2\beta \Omega x \ll \omega_0^2 x$, тому цим другим доданком також можна знехтувати:

$$\omega_0^2 x = f \cos(\Omega t + \alpha). \quad (7.74)$$

З приблизного рівняння (7.74) дістаємо амплітуду вимушених коливань у випадку низьких частот зовнішнього впливу: $A \approx f/\omega_0^2$, що в точності збігається з проведенням вище аналізом формули (7.72). У цьому випадку зовнішня сила діє, наче стала статична сила. Матеріальна точка рухається повільно, тому сила тертя є нехтовно малою, і пружна сила майже врівноважує змушуючу.

2) Якщо ж зовнішня сила є достатньо швидкою, $\Omega \gg \omega_0$, то перший доданок у лівій частині (7.68) за порядком величини є набагато більшим за третій: $\ddot{x} \sim \Omega^2 x \gg \omega_0^2 x$, тобто прискорення є великим, тому пружною силою можна знехтувати. Другий доданок за порядком величини також є малим порівняно з першим: $2\beta \dot{x} \sim 2\beta \Omega x \ll \Omega^2 x$, тому цим другим доданком також можна знехтувати:

$$\ddot{x} = f \cos(\Omega t + \alpha). \quad (7.75)$$

З приблизного рівняння (7.75) дістаємо амплітуду вимушених коливань у цьому граничному випадку: $A \approx f/\Omega^2$, що також узгоджується з аналізом точної формули (7.72), який проведено вище. За високих частот зовнішньої сили пружна сила і сила тертя є замалими порівняно з зовнішньою.

Амплітудно-частотна характеристика сильно загасаючих коливань, $\beta > \omega_0$, не перевищує рівня $A/f = 1$ у діапазоні $\Omega \leq \omega_0$ та швидко спадає до нуля при $\Omega > \omega_0$. Приклад амплітудно-частотної характеристики для випадку $\beta^2/\omega_0^2 = 1$ показано на рис.

7.11 штриховою лінією. Нерезонансні амплітудно-частотні характеристики, які відповідають сильно загасаючим коливанням, $\beta > \omega_0$, лежать нижче цієї штрихової лінії.

Якщо знехтувати загасанням, $\beta = 0$, то енергія осцилятора не витрачатиметься на подолання сили тертя. В цьому випадку осцилятор називають **консервативним**. Вимушені коливання консервативного осцилятора описує рівняння (7.68), в якому $\beta = 0$. Їхній аналіз має значення для дослідження коливань інших типів.

Розв'язок рівняння (7.68) у цьому випадку має вигляд суперпозиції, $x(t) = x^{(od)} + x^{(q)}$, загального розв'язку $x^{(od)} = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку $x^{(q)} = A \cos(\Omega t)$ (7.65) неоднорідного рівняння. Амплітуду частинного розв'язку знаходимо з рівняння (7.72): $A = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2}$. У випадку тривіальних початкових умов,

коли зсув та швидкість зсуву на початку спостережень відсутні, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, рівняння вимушених коливань мають наступний явний вигляд:

$$x(t) = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t)]. \quad (7.76)$$

Сам по собі вираз (7.76) не є нічим цікавим, він є просто граничним випадком виразу, що описує вимушені загасаючі коливання. Але важливим є аналіз виразу (7.76) у випадку співпадання власної частоти та частоти зовнішньої сили, $\omega_0 - \Omega \equiv 2\Delta\omega \ll \Omega$. Тоді з виразу (7.76) за допомогою тригонометричних співвідношень здобудемо:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2f \sin[(\Omega + \Delta\omega)t] \sin(\Delta\omega t)}{(\omega_0 + \Omega)(\omega_0 - \Omega)} \approx \\ &\approx \frac{f \sin(\Delta\omega t)}{2\omega_0 \Delta\omega} \sin[(\Omega + \Delta\omega)t]. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Отже, за обраної умови $\Omega \approx \omega_0$ вимушені коливання консервативного осцилятора виглядають як биття (див. параграф 7.3).

Розглянемо резонанс ($\Delta\omega \rightarrow 0$) лінійного консервативного осцилятора. У цьому випадку виразом (7.77) користуватися не можна, бо його чисельник та знаменник прямують до нуля. Позбутися цієї невизначеності можна у чисто математичний спосіб, застосувавши правило Лопітала. Тоді, обчисливши похідні від чисельника та знаменника виразу (7.73) за $\Delta\omega$, знаходимо:

$$x(t) \approx \frac{tf}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (7.78)$$

Отже, за умов резонансу в лінійних консервативних системах не реалізуються коливання, що є близькими до гармонічних. В режимі резонансу амплітуда (тобто, множник перед $\sin(\omega_0 t)$) коливань зростає лінійно. Такий тип розв'язків називають **секулярним** (від англійського secular, віковий). Зрозуміло, що якою б малою не була початкова амплітуда коливань, все одно через певний час вона стане такою великою, що перестане відповідати умовам застосовності моделі лінійного осцилятора. Тобто для подальшого аналітичного дослідження цього випадку слід враховувати нелінійні механізми. Як питання виникнення секулярних розв'язків вирішується у випадку нелінійних консервативних осциляторів, показано у кінці цього розділу.

7.8. Зв'язані коливання

Існують три принципово різні варіанти зв'язаних коливань. Продемонструємо їх на прикладі двох однакових фізичних маятників, які являють собою жорсткі однорідні стержні.

На рис. 7.12 а) показано коливання маятників, **зв'язаних прискоренням**. Один маятник закріплено одним кінцем до стелі; другий маятник закріплено на першому. Якщо перший

маятник спочатку був нерухомий, а другий виведено з положення рівноваги, то з часом другий маятник починає розгойдувати першого, втрачає на це свою енергію і перестав коливатись. Після цього другий маятник опиняється в положенні, коли його точка підвісу періодично рухається, внаслідок чого він починає розгойдуватися знову, відбираючи енергію від першого маятника. В цілому це виглядає так, немовби енергія періодично переливається від одного маятника до іншого. Відповідно до цього рух кожного маятника окремо виглядає як биття.

На рис. 7.12. б) показано два маятники, коливання яких **зв'язані силою**. Між маятниками натягнуто пружину, яка перебуває в недеформованому стані, коли маятники висять у положенні рівноваги. Якщо одному з маятників надати енергії, він почне коливатись, внаслідок чого пружина почне періодично

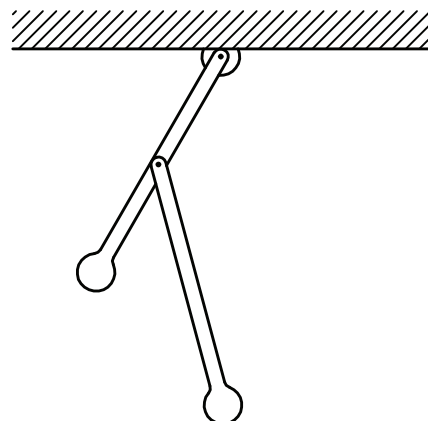


Рис. 7.12 а). Коливання, зв'язані прискоренням

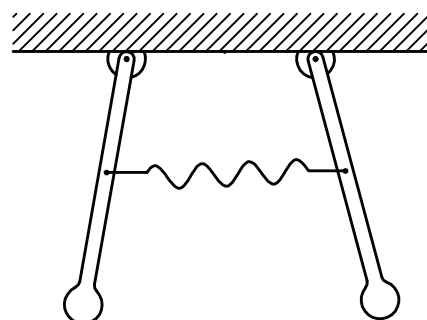


Рис. 7.12 б). Коливання, зв'язані силою

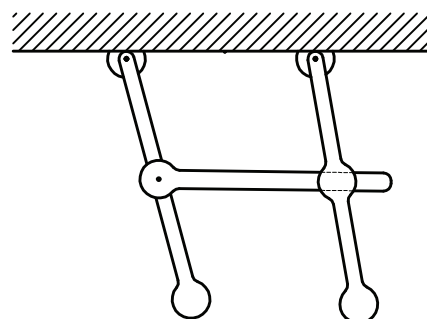


Рис. 7.12 в). Коливання, зв'язані тертям

стискатись і розтягуватись, розгойдуючи другий маятник. Цей другий маятник почне коливатись із усе більшою амплітудою аж до повної зупинки першого маятника. Коливання маятників, зв'язаних силою, також мають вигляд биттів.

На рис. 7.12. в) подано схему коливань двох маятників, **зв'язаних тертям**. Легкий стержень, шарнірно закріплений на першому маятнику, може ковзати з тертям у вушечку, закріпленому на другому маятнику. Через тертя енергія коливань зменшується, проте другий маятник починає коливатись синхронно із першим маятником. Результатом такої взаємодії є гармонічні коливання обох маятників з однаковими амплітудами та фазами.

Існує дуже вражаюча демонстрація коливань, зв'язаних прискоренням. Для цього обирають два математичні маятники однакової довжини і суттєво різної маси (рис. 7.12.г)). Другий (легкий, масою m) маятник кріплять прямо до першого (важкого, масою M). Спочатку перший маятник трохи виводять з положення рівноваги (на невеликий кут), а другий лишають нерухомим. Різниця в масах призводить до того, що коли перший маятник зупиняється, другий приймає на себе всю його енергію, що проявляється наочно у набагато більшій амплітуді коливань (амплітуда коливань легкого маятника більша за амплітуду коливань важкого в $\sqrt{M/m}$ разів).

Наведені міркування дають можливість розв'язувати задачі про зв'язані коливання. Наприклад, опишемо рух механічної коливальної системи, яка складається з тіла масою m_1 , яке прикріплено до стіни пружиною з жорсткістю k_1 . Друге тіло масою m_2 прикріплено до першого тіла пружиною з жорсткістю k_2 (рис. 7.13). Вважаємо для спрощення, що тіла

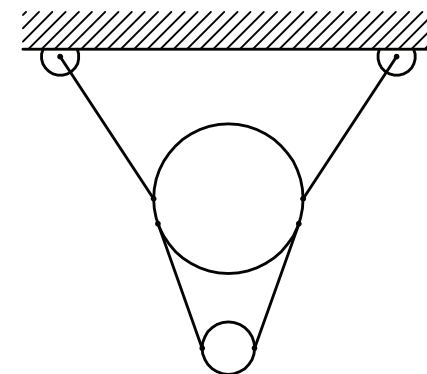


Рис. 7.12 г) Коливання математичних маятників, зв'язані прискоренням

ковзають по гладкій поверхні, тобто нехтуємо тертям.

В цій системі відбуваються коливання, зв'язані прискоренням. Позначимо відхилення першого тіла від рівноважного положення як x_1 , а другого як x_2 . Перше тіло в цій системі рухається під дією сил пружної деформації обох пружин. Сила пружної деформації, яка діє на друге тіло з боку другої пружини, визначається відхиленням обох тіл від положення рівноваги:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1). \end{cases} \quad (7.76)$$

Цю систему рівнянь можна трохи спростити, провівши заміну змінних: $x_1 = x$, $x_2 - x_1 = y$. Для цього в лівій і правій частинах другого рівняння системи (7.76) віднімемо $m_2 \ddot{x}_1$:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} + k_1 x - k_2 y = 0, \\ m_2 \ddot{y} + m_2 \ddot{x} + k_2 y = 0. \end{cases} \quad (7.77)$$

Введення згаданої заміни зменшило кількість доданків у першому з рівнянь розв'язуваної системи до трьох. Аби розв'язати цю систему рівнянь, тобто аби знайти залежність від часу координат x_1 та x_2 (або, що те саме, $x(t)$ та $y(t)$), скористаємося підказкою про те що коливання, зв'язані прискоренням, описуються як биття, тобто, як сума двох коливань з різними частотами. Саме тому шукатимемо розв'язок системи рівнянь (7.77) у вигляді:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \exp(-i\omega_1 t) + B \exp(-i\omega_2 t), \quad y(t) = \\ &= C \exp(-i\omega_1 t) + D \exp(-i\omega_2 t). \end{aligned} \quad (7.78)$$

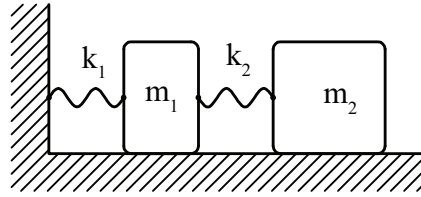


Рис. 7.13. До задачі про зв'язані коливання двох осциляторів, зв'язаних силою

Тобто шукатимемо кожен з координат як суму двох коливань, тут A , B , C та D – це комплексні константи інтегрування, яких у двох диференціальних рівнянь другого порядку й має бути чотири: $2 \times 2 = 4$. Таким чином, задачу зведено до пошуку двох частот коливань: ω_1 та ω_2 . Використання експонент у задачах про коливання є зручним, оскільки диференціювання за часом від експоненти є рівнозначним множенню на $-i\omega_{1,2}$. Підстановка координат у вигляді (7.78) до системи рівнянь (7.77) дає:

$$\begin{cases} -m_1 \omega_1^2 A e^{-i\omega_1 t} - m_1 \omega_2^2 B e^{-i\omega_2 t} + k_1 A e^{-i\omega_1 t} + \\ + k_1 B e^{-i\omega_2 t} - k_2 C e^{-i\omega_1 t} - k_2 D e^{-i\omega_2 t} = 0, \\ -m_2 \omega_1^2 C e^{-i\omega_1 t} - m_2 \omega_2^2 D e^{-i\omega_2 t} - m_2 \omega_1^2 A e^{-i\omega_1 t} - \\ - m_2 \omega_2^2 B e^{-i\omega_2 t} + k_2 C e^{-i\omega_1 t} + k_2 D e^{-i\omega_2 t} = 0. \end{cases} \quad (7.79)$$

Аби рівняння (7.79) виконувались для довільного моменту часу, мають тотожно дорівнювати нулю коефіцієнти при обох експонентах в обох рівняннях системи:

$$\begin{cases} -m_1 \omega_1^2 A + k_1 A - k_2 C = 0, \\ -m_1 \omega_2^2 B + k_1 B - k_2 D = 0, \\ -m_2 \omega_1^2 C - m_2 \omega_1^2 A + k_2 C = 0, \\ -m_2 \omega_2^2 D - m_2 \omega_2^2 B + k_2 D = 0. \end{cases} \quad (7.80)$$

Як відомо з курсу лінійної алгебри, система однорідних лінійних рівнянь, якою є система (7.80), має нетривіальний розв'язок за умови, що детермінант, побудований із коефіцієнтів при невідомих величинах A , B , C і D , дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} k_1 - m_1 \omega_1^2 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_1 - m_1 \omega_2^2 & 0 & -k_2 \\ -m_2 \omega_1^2 & 0 & k_2 - m_2 \omega_1^2 & 0 \\ 0 & -m_2 \omega_2^2 & 0 & k_2 - m_2 \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7.81)$$

Як відомо, якщо поміняти місцями рядки або стовпчики в

детермінанті, він лишається рівним нулю. Цим правилом можна скористатись, аби надати детермінанту (7.81) блочного вигляду:

$$\begin{vmatrix} k_1 - m_1 \omega_1^2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -m_2 \omega_1^2 & k_2 - m_2 \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 - m_1 \omega_2^2 & -k_2 \\ 0 & 0 & -m_2 \omega_2^2 & k_2 - m_2 \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7.82)$$

Блочний детермінант (7.82) дорівнює добутку двох детермінантів, які співпадають із точністю до заміни $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$:

$$\begin{vmatrix} k_1 - m_1 \omega_1^2 & -k_2 \\ -m_2 \omega_1^2 & k_2 - m_2 \omega_1^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_1 - m_1 \omega_2^2 & -k_2 \\ -m_2 \omega_2^2 & k_2 - m_2 \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7.83)$$

Розкриття обох детермінантів дає одне й те саме бікватратне рівняння на $\omega_{1,2}^2$:

$$\omega_{1,2}^4 - \left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \frac{k_2}{m_1} \right) \omega_{1,2}^2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2 = 0. \quad (7.84)$$

Тут введено позначення: $\Omega_{1,2}^2 = k_{1,2}/m_{1,2}$. Отже, рух коливальної системи, що складається з двох тіл на пружинах, описується суперпозицією (7.78) двох гармонічних коливань з частотами

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \frac{k_2}{m_1} \pm \sqrt{\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \frac{k_2}{m_1} \right)^2 - 4\Omega_1^2 \Omega_2^2}}{2}}. \quad (7.85)$$

Проаналізуємо здобутий вираз (7.85). Він є вірним за розмірністю, $[\omega_{1,2}] = 1/\text{с}$. Він не обертається в нескінченність за жодних умов. З загальних міркувань зрозуміло, що якщо перше тіло є дуже важким, $m_1 \gg m_2$, то воно є майже нерухомим. Тоді в системі спостерігаються коливання, одна з частот яких має бути близькою до частоти коливань тіла маси m_2 , яке прикріплено

пружиною з жорсткістю k_2 до нерухомої стінки. Дійсно, в цьому разі формула (7.85) дає $\omega_{1,2} \approx \Omega_{1,2}$. Тобто в цьому випадку в коливній системі спостерігаються два коливання: «повільне» – з частотою $\omega_1 \approx \Omega_1$ і «швидке» – з частотою $\omega_2 \approx \Omega_2 \gg \omega_1$.

Розглянемо інший граничний випадок, коли друге тіло є достатньо важким, $m_2 \gg m_1$. Тоді це друге тіло можна приблизно розглядати як нерухоме, а перше тіло – як таке, що коливається між двома стінками, до яких кріпиться пружинами з жорсткістю k_1 і k_2 . Із розв'язання такої спрощеної задачі відомо, що перше тіло має коливатися з частотою $\sqrt{(k_1 + k_2)/m_1}$. Дійсно, в цьому граничному випадку формула (7.85) дає наступні розв'язки:

$$\omega_1 \approx \sqrt{(k_1 + k_2)/m_1} \gg \omega_2 \approx \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m_2 (k_1 + k_2)}}. \quad \text{Тобто, рух коливної}$$

системи є суперпозицією двох коливань: «швидкого» – з частотою ω_1 і «повільного» – з частотою ω_2 .

7.9. Автоколивання

При загасаючих коливаннях енергія системи втрачається на подолання опору середовища. Якщо цю втрату компенсувати, то коливання не будуть загасати. Можна зробити так, щоб коливальна система сама б керувала надходженням належної порції енергії з внутрішнього джерела у належний час. Така система зветься автоколивальною, а коливання – автоколиваннями.

Головна відмінність автоколивальних систем від тих, що виконують звичайні вимушені коливання, які реалізується під впливом зовнішньої періодичної сили, полягає в тому, що до них енергія ззовні не підводиться. Типовими прикладами автоколивальних систем є музичні інструменти, коливання в генераторах радіохвиль, коливання годинникового маятника, звучання людського голосу і багато іншого.

Корисно виділити у автоколивальних системах три основні елементи: 1) власне коливальний контур, який би в ізолюваному стані був здатний на загасаючі коливання; 2) ланку “зворотного зв'язку”, яка керує внутрішнім джерелом енергії та

зв'язує коливальну систему з джерелом енергії; 3) внутрішнє джерело енергії.

Говорячи про особливості автоколивального процесу, можна виділити три наступні деталі: 1) можливість самозбудження; 2) частота та амплітуда автоколивань визначається параметрами системи; 3) фаза автоколивань є довільною. Цікаво порівняти властивості автоколивань із властивостями інших коливань. Для власних коливань: 1. власна частота також визначається параметрами системи; 2. амплітуда та фаза визначаються початковими умовами. Для вимушених коливань про вище зазначені параметри можна сказати наступне: 1. їхня частота визначається зовнішніми силами; 2. їхня амплітуда та фаза визначаються як самою коливальною системою (меншою мірою), так і зовнішньою силою (більшою мірою). Отже, автоколивання мають такий характер, що робить їх схожими як на власні коливання (у плані визначення їхньої частоти) так і на вимушені коливання, бо амплітуда визначається, в основному, зовнішніми чинниками.

Самозбудження автоколивань описується нелінійним диференціальним рівнянням для зсуву параметра x (нехай це буде, наприклад, координата маятника) коливальної системи відносно рівноважного значення. Воно відрізняється від лінійного рівняння (7.47) наявністю нелінійного доданка: $\gamma \dot{x}^3$, який характеризує роботу ланки зворотного зв'язку:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \alpha \dot{x} + \gamma \dot{x}^3 = 0. \quad (7.82)$$

Це рівняння Ван-дер-Поля для автоколивань, які здатні до самозбудження. Два останні доданки у ньому описують силу внутрішнього тертя, яку розкладено в ряд Тейлора з урахуванням кубічного доданку. Ми не будемо розв'язувати це рівняння, але зазначимо, що за умов слабкості дисипативних процесів, тобто малості двох останніх доданків порівняно з першими двома, його наближений розв'язок слід шукати у вигляді:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t), \quad (7.83)$$

де амплітудний множник $A(t)$ є повільною функцією часу, що справедливо при виконанні нерівності $dA/dt \ll A\omega_0$. Тоді ця підстановка дозволяє здобути наближене рівняння для $A(t)$:

$$2dA/dt - \alpha A + 3\gamma\omega_0^2 A^3/4 = 0. \quad (7.84)$$

З аналізу рівняння (7.84) видно, що автоколивання, які характеризуються додатним значенням $\alpha > 0$ здатні до самозбудження. Отже, стартувавши з будь-якого скінченного початкового значення A_0 амплітудного множника, автоколивання починає зростати:

$$A(t) \propto [1 - (1 - 4\alpha/(3\gamma\omega_0^2 A_0^2)) \exp(-\alpha t)]^{-1/2}, \text{ а потім виходить на}$$

$$\text{квазістаціонарний стан: } A_{st} = \sqrt{4\alpha/(3\gamma\omega_0^2)}.$$

Зі скільного курсу термодинаміки відомо, що стан та рівноважні процеси термодинамічної системи зручно описувати за допомогою фазових діаграм, де по осям відкладають певні макропараметри досліджуваної системи, наприклад, тиск та об'єм. Стан термодинамічної системи у цьому випадку позначають точками на фазовій площині, а певні процеси – відповідними лініями. Аналогічні діаграми широко використовують і в теорії коливань, особливо нелінійних, коли не завжди вдається аналітично розв'язати відповідне нелінійне диференціальне рівняння. В теорії коливань ці діаграми називають фазовими портретами. Вони складаються з фазової площини, де в якості узагальнених координат обрано зсув досліджуваного параметра коливальної системи відносно його рівноважного значення та швидкість цього зсуву, фазових траєкторій (це лінії на фазовій площині, якими зображують рух системи), та окремих точок, які позначають стани рівноваги системи. При цьому хід точки, що ілюструє протікання коливального процесу, вздовж фазових траєкторій визначається однозначно: у верхній напівплощині ці точки рухаються праворуч по фазових траєкторіях, а у нижній – праворуч.

Отже, у режимі самозбудження автоколивання на фазовій площині представляються у вигляді замкненої кривої, до якої при великих значеннях часу прямують усі фазові траєкторії

(Рис. 7.14). Вона називається граничним циклом. Ілюструючи точка усередині циклу рухається по спіралі, що розкручується, і наближається до циклу, а з зовнішнього боку граничного циклу ця спіраль накручується на граничний цикл.

Покажемо, як знаходиться граничний цикл на фазовій площині. З рівняння (7.83) знайдемо вираз для похідної dA/dt . На граничному циклі $dA/dt=0$, отже маємо там стаціонарний режим автоколивань, якому може відповідати або стан рівноваги $x = dx/dt = 0$, а тому і амплітуда $A=0$, або стан генерації автоколивань з скінченною амплітудою $A=A_{st}$. Проаналізуємо граничний цикл на стійкість. Нехай амплітуда автоколивань змінюється на малу величину $|\delta A| \ll A_{st}$, тобто $A = A_{st} + \delta A$, тоді з рівняння (7.83) маємо:

$$\frac{d\delta A}{dt} = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial A} \left(A - \frac{3\gamma}{4\gamma} \omega^2 A^3 \right) \Big|_{A_{st}} \delta A = \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{9\gamma\omega^2}{4\alpha} A_{st}^2 \right) \delta A. \quad (7.85)$$

Стаціонарний стан є стійким, коли $d\delta A/dt < 0$, бо в протилежному випадку матимемо експоненціальне зростання амплітуди. Якщо підставити до виразу (7.84) нульове значення стаціонарної амплітуди $A_{st} = 0$, то отримаємо: $d\delta A/dt > 0$, значить, ця точка є особливою, це точка нестійкої рівноваги. Тобто достатньо будь-якого малого збурення даної автоколивальної системи, щоб вона із цього стану рівноваги перейшла до режиму квазіперіодичного руху поблизу граничного циклу. А в результаті підстановки значення амплітуди $A_{st} = \sqrt{4\alpha/(3\gamma\omega_0^2)}$ з рівняння (7.85) отримуємо: $d\delta A/dt = -\alpha\delta A < 0$. Значить, саме $\sqrt{4\alpha/(3\gamma\omega_0^2)}$ і є амплітудою стаціонарного граничного циклу даних автоколивань.

Отже, після перехідного режиму в автогенераторі, вільному від усяких зовнішніх впливів, виникає стійкий стаціонарний квазіперіодичний режим. Оскільки в автоколивальній системі на флуктуаційному рівні існує нескінченна кількість коливань з різними фазами, то хоч одна

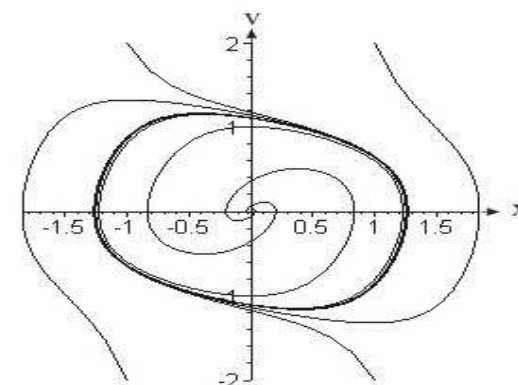


Рис. 7.14. Фазовий портрет осциляторних автоколивань, $\alpha = 0.2$, $\gamma = 3.0$, $\omega_0^2 = 1$, $v = dx/dt$.

з них відповідатиме резонансним умовам підводу енергії, тому при автоколивальному процесі фаза коливань може бути довільною.

В розглянутому випадку загасання в системі вважалися слабким, тому для них автоколивання виникають при будь-якому початковому збуренні. Такий режим автоколивань називають режимом “м’якого збудження, або режимом самозбудження коливань.

Якщо загасання автоколивальної системи є достатньо сильним, так що для виходу системи на стаціонарний режим необхідно, аби початкове збурення перевищувало певне критичне (порогове) значення, то реалізується режим “жорстокого збудження. А ті коливання, які характеризуються малою початковою амплітудою, меншою за порогову, будуть загасати.

З приводу форми автоколивань можна сказати наступне. Якщо основна складова частина автоколивальної системи являє собою високо добротний коливальний контур, тоді автоколивання є близькими до гармонічного. Властивості ланки зворотного зв'язку лише незначною мірою впливають на форму

коливань – в основному, вона служить для поповнення енергії коливальної системи протягом виконання автоколивань. Такі системи одержали назву **осциляторних автоколивальних систем**. В них втрати енергії за період, а отже, і величина енергії, що додається з внутрішнього джерела, є значно меншими, ніж запас енергії, який накопичено в коливальному контурі. Осциляторні автоколивальні системи складаються з майже лінійного коливального контуру з великою добротністю, який без зворотного зв'язку може коливатися із слабким загасанням. При осциляторному типі автоколивань саме контур визначає частоту та форму коливань, а зворотній зв'язок забезпечує подачу енергії до системи у належний час та в потрібній кількості.

Якщо основна складова частина автоколивальної системи являє собою аперіодичний коливальний контур, то форма автоколивань істотно залежить від властивостей ланки зворотного зв'язку. Тоді за умов самозбудження форма автоколивань є далекою від гармонічної, а період коливань визначається часом релаксації системи. Такі автоколивальні системи називаються **релаксаційними**. В них відбувається майже повна втрата енергії (величина накопиченої енергії практично дорівнює величині енергії, що розсіюється) за характерний масштаб часу коливань, тому енергія має бути поповнена з внутрішнього джерела протягом кожного періоду автоколивань.

Релаксаційні коливання називають ще **розривними** коливаннями. Це такі автоколивання, при яких має місце стрімка зміна у часі певних величин, що характеризують коливальний процес. Якщо ставитися до них дуже прискіпливо, то можна говорити, що це і не коливання, взагалі, а почергові різкі зміни (стрибки у часі) певних параметрів системи. Але за великим рахунком це такі автоколивання, хоч і не осциляторні. У випадку релаксаційних автоколивань у коливальному контурі відбуваються сильно загасаючі (аперіодичні) коливання, тому ланка зворотного зв'язку грає визначальну роль в процесі генерації цього типу автоколивань.

Продемонструємо це на прикладі рівняння Ван-дер-Поля (7.82), де для спрощення його аналізу покладемо $\alpha = \gamma = \varepsilon$. При цьому в безрозміреному динамічному рівнянні, що описує релаксаційні коливання параметр нелінійності має бути великим: $\varepsilon \gg 1$. За цих умов рівняння (7.82) запишеться у наступному вигляді:

$$\ddot{z} + z = \varepsilon(1 - \dot{z})\dot{z}. \quad (7.86)$$

тут час t є безрозмірною величиною. На перший погляд може видатися, що ми не зможемо ні розв'язати це рівняння, ні навіть побудувати фазовий портрет релаксаційних коливань, бо в рівнянні (7.86) немає малого параметра. Але насправді, використовуючи метод заміни змінної це рівняння можна звести до такого, в якому буде малий параметр. Вводимо новий час τ : $t = \varepsilon\tau$, $\varepsilon d\tau = dt$; та нову змінну: $x = z/\varepsilon$ тоді рівняння (7.86) переписеться так:

$$\ddot{x}/\varepsilon + \varepsilon \cdot x = (1 - \dot{x}^2) \cdot \varepsilon \cdot \dot{x}. \quad (7.87)$$

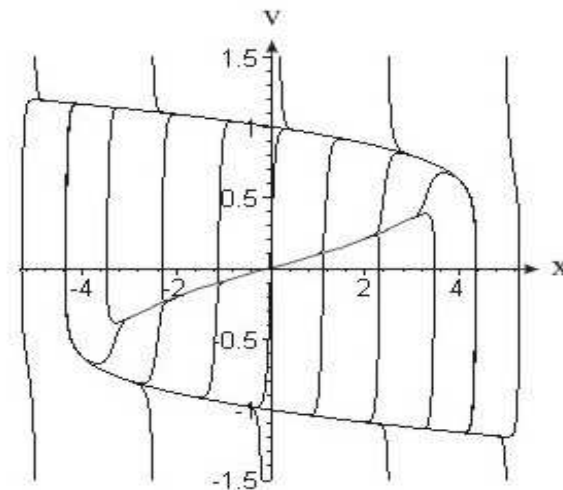


Рис. 7.15. Фазовий портрет релаксаційних коливань, $\varepsilon = 10$, $v = dx/dt$.

Тепер в ньому вже можна ввести малий параметр: $\beta = \varepsilon^{-2} \ll 1$. Фазовий портрет розривних коливань представлено на Рис.7.15. З аналізу фазових траєкторій (нагадаємо, що ілюструюча точка йде праворуч у верхній напівплощині та - ліворуч у нижній) видно, що початкові коливання, які існують в релаксаційних автоколивальних системах на флуктуаційному рівні (в середині граничного циклу, поблизу $v=x=0$), швидко збільшують свою амплітуду до граничного значення ($|x| \approx 4$ та $|v| \approx 1$). Відзначимо, що релаксаційні коливання виходять на граничний цикл незалежно від початкових умов. З Рис. 7.15 для даного випадку видно, якщо початковий зсув, чи його швидкість були значно більші за вище вказані значення для граничного циклу, то швидкість стрімко падає до значень $|v| \approx 1$, які відповідають значенням граничного циклу, а далі зсув поступово наближається до свого граничного значення $|x| \approx 4$. Для кожного окремого випадку параметри граничного циклу свої, вони задаються ланкою зворотного зв'язку та потужністю внутрішнього джерела енергії. Граничний цикл, як видно з Рис. 7.15, складається з двох ділянок: «повільного руху», який ілюструє повільну зміну значення зсуву навколо рівноважного положення, та «швидкого руху», який показує стрімку зміну швидкості зсуву.

В якості прикладу релаксаційних коливань наведемо приклад з гідромеханіки. Розглянемо резервуар з регульованим вмістом води. Вода крізь трубу малого діаметру повільно наповнює резервуар, об'єм води контролює пристрій, який за допомогою важеля відкриває (за умови, що резервуар наповнено потрібним об'ємом води) зливну трубу великого діаметра, крізь яку вода стрімко витікає з резервуару. Після того як майже вся вода вилітєть з резервуару, зливна труба закривається і процес набирання води повторюється.

7.10. Параметричні коливання

Існують такі коливальні системи, в яких вплив зовнішнього чинника на коливальну систему полягає в тому, що за певним законом змінюється один із параметрів системи з часом. Тут ідеться про ті параметри, які визначають власну частоту у відповідній системі без загасання зі сталими параметрами. Такі коливання називаються параметричними, вони можуть бути як наростаючими так і загасаючими в часі. Особливий інтерес представляють наростаючі коливання та умови їхнього виникнення. Якщо такі умови витримано, то в коливальній системі спостерігається параметричний резонанс (або параметрична нестійкість).

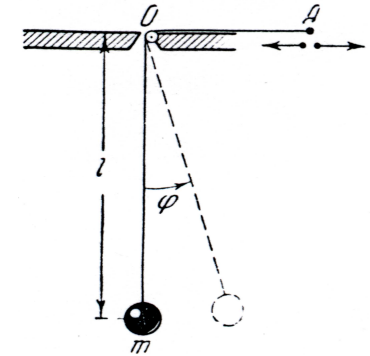


Рис. 7.16.

Досліджуючи коливальні системи з одним ступенем вільності, обмежимо задачу вивчення параметричного резонансу випадком періодичної модуляції певного параметра. Найпростішим прикладом параметричного резонансу є коливання математичного маятника з періодично змінною довжиною (дитяча “гойдалка”). Нехай довжина l гойдалки змінюється за гармонічним законом (Рис. 7.16), для цього точка A кріплення мотузки коливається з частотою ω та амплітудою a . У припущенні $a \ll l_0$ (l_0 – це середня довжина мотузки), тобто, зміна довжини маятника є малою порівняно з його середньою довжиною, та $\sin \varphi \approx \varphi$, тобто, амплітуда коливань маятника є малою, коливання описуються рівнянням Хілла.

Нехай частота зміни довжини маятника ω удвічі перевищує власну частоту математичного маятника $\omega_0 = \sqrt{g/l_0}$, а фаза зміни довжини маятника є такою, як це показано на Рис. 7.17. На ньому показано коливання точки підвісу $y(t)$ і коливання маятника $\varphi(t)$. Коли маятник рухається повільно (при

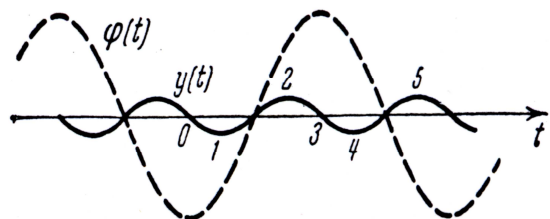


Рис. 7.17.

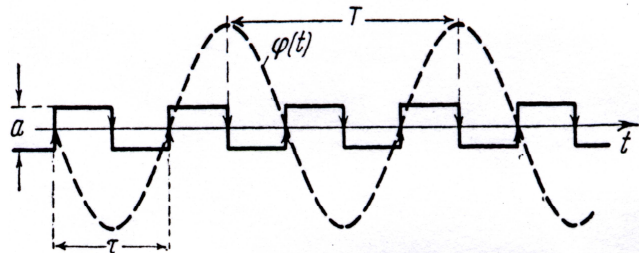


Рис. 7.18.

максимальному відхиленні маятника від положення рівноваги), підвіс подовжується, а коли маятник рухається швидко (побіля точки рівноваги), то підвіс укорочується. Сила пружного натягу мотузки при підніманні важку є більшою, ніж при опусканні. Отже, зовнішня система, що змінює довжину маятника, виконує додатну роботу, тобто передає енергію маятнику. При цьому амплітуда коливань маятника зростає, якщо тертя відсутнє. За наявності тертя в коливальній системі, якщо робота зовнішньої системи буде більшою за втрати енергії через тертя, то амплітуда коливань також буде зростати. Це явище називають параметричним резонансом.

Розглянемо найпростішу схему, у якій довжина маятника змінюється стрибком (Рис. 7.18.).

Елементарний розрахунок показує, що за період енергія коливань маятника збільшиться на величину $\Delta E \approx 6aE/l_0$, пропорційну повній енергії коливань. Втрати енергії за період внаслідок тертя при гармонічних коливаннях також пропорційні енергії коливань $\Delta E_{\text{los}} \approx 2\eta E$, де Λ - декремент (може, логарифмічний???) загасання цих коливань. Таким чином, критерієм розвитку параметричної нестійкості є умова:

$$3a/l_0 > \Lambda, \quad (7.87)$$

при виконанні якої амплітуда механічних коливань необмежено зростає навіть за наявності тертя в системі. Однак це є справедливим лише в лінійному наближенні. Зі збільшенням амплітуди параметричних коливань істотну роль починають грати нелінійні ефекти, завдяки чому амплітуда коливань насправді залишається обмеженою. Насичення параметричної нестійкості відбувається, зокрема, за рахунок нелінійного ефекту зсуву частоти цих коливань. Параметричні коливання є дуже чутливими до реалізації фазового синхронізму, тому при порушенні умов щодо резонансних співвідношень спостерігається обмеження явища зростання амплітуди параметричних коливань.

У розглянутому прикладі довжина маятника змінювався двічі за період збуджуваних коливань. Однак можна вносити енергію до коливальної системи не так часто, але так щоб виконувалася умова $\omega = 2\omega_0/n$, де n – ціле число. Звичайно, внесення енергії до коливальної системи за період буде тим меншим, чим більше n . Параметричний резонанс у неконсервативній системі має пороговий характер, через що існує обмежене число частотних інтервалів поблизу $\omega = 2\omega_0/n$, усередині яких має місце цей резонанс.

Слід зазначити, що в лінійних системах за умов параметричного резонансу відбувається необмежене зростання амплітуди збуджених коливань. Це зв'язано з тим, що втрати і внесок енергії є пропорційними до величини коливальної енергії системи. Нагадаємо, що вимушені коливання в лінійній системі мають скінченне значення амплітуди, оскільки вкладання енергії є пропорційним першому ступеню амплітуди коливань, а втрати, як і раніше, є пропорційними квадрату амплітуди.