Це можна зробити в два способи: скориставшись законом збереження механічної енергії (це найпростіший спосіб) або застосувавши другий закон Ньютона (це потребуватиме обчислення двох інтегралів, що корисніше для практики з використання методів математичного аналізу).

Оскільки ми нехтуємо взаємодією матеріальної точки з повітрям, єдина сила, що на неї діє, – це потенціальна сила тяжіння, отже, виконуються умови збереження повної механічної енергії. Віднормуємо потенціальну енергію в такий спосіб, що вона дорівнюватиме нулю в точці, з якої тіло почало падати, тобто, в точці де його кінетична енергія була нульовою, тоді повна механічна енергія дорівнюватиме $E_0=K+U=0$. В точці торкання матеріальною точкою поверхні кінетична енергія дорівнюватиме $0.5m\upsilon_0^2$, а потенціальна енергія зменшиться на mgh. Тоді за законом збереження механічної енергії $E_0=0.5m\upsilon_0^2 - mgh=0$. Отже, $\upsilon_0=\sqrt{2gh}$ – це є абсолютне значення тієї швидкості, з якою матеріальна точка впала на похилу площину.

Продемонструємо еквівалентність обох підходів. Запишемо проекцію другого закону Ньютона на вісь ординат:

$$m d\upsilon/dt = -gm. \qquad (2.5)$$

Помножимо це рівняння на dt і про інтегруємо від початку руху ($t=0$, $\upsilon=0$) до довільного моменту часу $t<\tau$ (де τ – це час падіння матеріальної точки), коли швидкість має відповідне значення $\upsilon(t)$:

$$\int_0^{\upsilon} d\upsilon' = -\int_0^{t} g dt'. \qquad (2.6)$$

Внаслідок інтегрування маємо: $\upsilon=-gt$. Зокрема, у момент падіння $\upsilon=-\upsilon_0=-g\tau$.

Зміна вертикальної координати описується рівнянням: $dy/dt=\upsilon=-gt$. Після обчислення інтеграла: $\int_h^0 dy = -\int_0^{\tau} gtdt$

отримаємо: $-h=-g\tau^2/2$. Ураховуючи, що тривалість падіння $\tau=\upsilon_0/g$, дістаємо: $\upsilon_0=\sqrt{2gh}$. Тобто, незалежно від обраного методу, здобуто один і той самий результат: початкова швидкість польоту матеріальної точки після її відбиття від пружної похилої площини дорівнює за абсолютним значенням $\upsilon_0=\sqrt{2gh}$.

Після відбиття рух матеріальної точки так само описується другим законом Ньютона: $m\vec{a}=\vec{F}_{рез}$, при цьому результуюча сила є так само силою тяжіння: $\vec{F}_{рез}=-\vec{e}_y mg$. Спроектуємо рівняння руху на осі обраної системи координат:

$$\begin{cases} вісь\ \ \vec{x}: & ma_x=0, \\ вісь\ \ \vec{y}: & ma_y=-mg. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Як видно з (2.7), рух у горизонтальному напрямку є рівномірним. Отже, проекція швидкості на горизонтальну вісь координат дорівнює початковому (після відбиття від поверхні) значенню проекції швидкості на вісь $\vec{X}$: $\upsilon_x=\upsilon_{0x}=\upsilon_0 cos\gamma$.

Інтегрування другого рівняння (2.7) дає $\upsilon_y=\upsilon_{0y}-gt=$ $=\upsilon_0 sin\gamma - gt$.

Проінтегруємо знайдені вирази для проекцій швидкостей та знайдемо залежність відповідних координат матеріальної точки від часу:

$$\begin{cases} \upsilon_y=dy/dt; \\ \upsilon_x=dx/dt; \end{cases} \begin{cases} \int dy=\int \upsilon_y dt; \\ \int dx=\int \upsilon_x dt; \end{cases} \begin{cases} y=y_0+\upsilon_{0y}t-gt^2/2; \\ x=x_0+\upsilon_{0x}t. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Обираємо початок координат у точці відбиття матеріальної точки від поверхні: $x_0=y_0=0$ (хоча це й не впливає принципово на кінцевий результат, проте спрощує математичні викладки). Тоді з другого рівняння (2.7) виражаємо час польоту після відбиття: $t=x/(\upsilon_0 cos\gamma)=x/(\sqrt{2gh} cos\gamma)$. Підставивши цей вираз до першого рівняння (2.7), дістаємо рівняння траєкторії руху матеріальної точки після відбиття:

$$y = x \cdot tg\gamma - x^2 /(4h\cos^2 \gamma). \qquad (2.9)$$

Отже, вертикальна координата y є поліномом другого порядку від горизонтальної координати x. Тобто, це є парабола. Її гілки орієнтовано донизу, бо коефіцієнт перед x^2 є від'ємним.

У граничному випадку, коли $\alpha \to 0$, маємо $x \to 0$, а рівняння $y=y(t)$ збігається з відомим виразом для зміни вертикальної координати матеріальної точки, яка рухається вертикально у полі тяжіння. Зростання величини кута похилої площини до значення $\alpha = \pi / 4$ призводить до зменшення величини кута γ до нуля, що означає зменшення висоти підйому матеріальної точки при відбитті над рівнем точки падіння. Якщо $\alpha = \pi / 4$, то початкова швидкість після відбиття має тільки горизонтальну складову, що означає: координата x зростає при цьому найшвидше, координата y одразу після відбиття зменшує своє значення.

Відповідь: $y = x \cdot tg\gamma - x^2 /(4h\cos^2 \gamma)$.

Задача 3

Дано: Вздовж мотузки без тертя падає муфта маси m. Довжина мотузки без деформації l, коефіцієнт жорсткості k. Муфта падає на невагомий фіксатор, який знаходиться на кінці мотузки.
Знайти: максимальну довжину деформації мотузки.
Розв`язання:

Це – одновимірна задача, тому не будемо малювати рисунок. Зорієнтуємо вісь $\vec{X}$ вертикально вниз уздовж мотузки; початок системи координат розташуємо в кінці мотузки, яка ще не деформована, де перед падінням муфти перебував фіксатор.

У векторному вигляді рух муфти, яка, тиснучи на фіксатор, деформує мотузку, описується другим законом Ньютона, при цьому результуюча сила складається з сили

тяжіння та сили пружної деформації (яку описуватимемо за законом Гука[1]). У даному випадку цей закон має вигляд:

$$md^2\vec{x} / dt^2 = \vec{F}_{рез} = m\vec{g} - \vec{e}_x kx . \qquad (2.10)$$

Перепишемо його у вигляді проекції на вісь $\vec{X}$:

$$d^2 x / dt^2 = g - kx / m . \qquad (2.11)$$

Оскільки це є диференціальне рівняння другого порядку, в якому немає першої похідної dx / dt, то для знаходження його розв'язку скористаємося одним з найпоширеніших методів – методом заміни змінної. Зробимо наступну заміну змінної: $\xi = x - mg / k$, тоді:

$$d^2\xi / dt^2 = d^2 x / dt^2 = -k(x - mg / k) / m = -k\xi / m . \qquad (2.12)$$

Загальним розв`язком рівнянь типу $z'' = -\alpha z$ є будь-яка гармонічна функція, наприклад, синус. Значить, для ξ можна записати такий розв'язок: $\xi = A_0 \sin(\sqrt{k / m}t + \varphi)$, до якого входять дві константи: A_0 і φ. Це константи інтегрування диференціального рівняння другого порядку. Перепишемо здобутий розв'язок для змінної $x=x(t)$:

$$x = mg / k + A_0 \sin(\sqrt{k / m}t + \varphi) . \qquad (2.13)$$

Для визначення констант інтегрування застосуємо початкові умови: в початковий момент часу муфта перебувала в

[1] Гук (Hooke) Роберт (1635-1703) – англійський фізик, член і секретар Лондонського королівського товариства, професор Лондонського університету. За його словами, відрив 500 «законів» природи! Лише один – закон пружності носить його ім'я. 1678 року в листі до Ньютона Гук писав: «…я стверджую, що сила, з якою притягуються дві маси, зв'язана із відстанню між ними, як $1/r^2$…». 1681 року Ньютон дав розгорнутий математичний опис цього закону.

початку координат: $x(t=0)=0$; при цьому його швидкість дорівнювала $\upsilon(t=0)=\upsilon_0$. Швидкість υ_0 визначається з закону збереження механічної енергії: $0.5m\upsilon_0^2 = mgl$, отже $\upsilon_0 = \sqrt{2gl}$.

Запишемо вираз для швидкості руху в довільний момент часу: $\upsilon(t)=dx/dt= A_0\sqrt{k/m}\,cos(\sqrt{k/m}t+\varphi)$. Скористаємось вказаними початковими умовами для визначення констант інтегрування:

$$\begin{cases} x(t=0)=0=mg/k+A_0\,sin(\varphi); \\ \upsilon(t=0)=\upsilon_0=A_0\sqrt{k/m}\,cos(\varphi). \end{cases} \tag{2.14}$$

Аби визначити амплітуду коливань, зручно піднести рівняння в квадрат:

$$\begin{cases} g^2m^2/k^2 = A_0^2\,sin^2\varphi; \\ \upsilon_0^2 m = A_0^2 k\,cos^2\varphi; \end{cases} \tag{2.15}$$

і скористатись основною тригонометричною тотожністю:

$$A_0^2 = g^2m^2/k^2 + m\upsilon_0^2/k = g^2m^2k^{-2}[1+2lk/(mg)]\ . \tag{2.16}$$

Початкову фазу можна визначити з (2.15), поділивши одне рівняння на інше, внаслідок чого виключається амплітуда:

$$tg\varphi = -\sqrt{\frac{mg}{2kl}}\ . \tag{2.17}$$

Тепер визначимо момент часу τ, коли кінчик мотузки припинить рух внаслідок її розтягування на максимальну величину. Фізично це означає, що швидкість муфти дорівнюватиме нулю: $\upsilon(t=\tau)=0$:

$$\upsilon(\tau)=0=A_0\sqrt{k/m}\,cos(\sqrt{k/m}\tau+\varphi). \tag{2.18}$$

Значить, аргумент косинуса має дорівнювати $\pi/2$: $\sqrt{k/m}\,\tau+\varphi=\pi/2$ або $\tau=\sqrt{m/k}(\pi/2-\varphi)$. Тому

координата, що визначає положення муфти в момент часу τ, має наступний аналітичний вираз:

$$x(\tau)=\frac{mg}{k}+A_0\,sin(\frac{\pi}{2})=\frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{2kl}{mg}}\right). \tag{2.19}$$

Максимальна деформація нитки настає, коли муфта зупиняється. Таким чином, здобуваємо відповідь:

$$max(x)=x(\tau)=\frac{gm}{k}\left[1+\sqrt{1+\frac{2kl}{mg}}\right]. \tag{2.20}$$

Цю відповідь можна здобути і у більш простий спосіб – скориставшись законом збереження механічної енергії. Прирівнявши потенціальну енергію муфти перед падінням до роботи, яку вона виконує проти сил пружності, розтягуючи нитку, можна отримати квадратне рівняння для видовження $x(\tau)$: $mg(l+x(\tau))=kx(\tau)^2/2$. Розв'язком цього рівняння є, природно, вищезазначений вираз (2.20). Тому ця задача є чудовою нагодою для практики в галузі застосування знань, що їх здобуто на лекціях з математичного аналізу.

2.4. Перетворення Галілея

Перетворення Галілея показують, в який спосіб пов'язані між собою координати механічного об'єкта у різних інерціальних системах відліку. Питання про перетворення координат, наприклад, від декартової до циліндричної чи до сферичної, коли це перетворення відбувається в одній інерціальній системі відліку, є суто математичним і розв`язується методами аналітичної геометрії та математичного аналізу. Але питання про перетворення координат, що відносяться до різних інерціальних систем відліку, є питанням фізики. Воно може бути розв`язане тільки експериментальними засобами.

Найпростішим відносним рухом систем відліку є поступальний рівномірний рух. До того ж, якщо дві системи координат рухаються одна відносно іншої з прискоренням, то вони не можуть обидві бути інерціальними. З численних дослідів відомо: “В усіх системах координат, які рухаються поступально та рівномірно відносно сфери нерухомих зірок та відносно одна одної, усі механічні явища відбуваються однаково”. Це твердження є принципом відносності Галілея. У подальшому цей принцип був визнаний справедливим і для інших явищ, наприклад, електромагнітних. Цей принцип є постулатом, оскільки, по-перше, він не є перевіреним з достатньою точністю; по-друге, досі не всі явища природи є нам відомими.

Нехай система відліку K є нерухомою, а система відліку K_1 рухається відносно K зі швидкістю $\vec{U}$. Вважаємо для спрощення, що в момент часу $t=0$ системи відліку K та K_1 співпадали, тоді траєкторія руху матеріальної точки в системі K описується функцією $\vec{r}=\vec{r}(t)$, а в системі K_1, відповідно, $\vec{r}_1=\vec{r}-\vec{U}t$. Наступні формули називаються перетвореннями Галілея:

$$t_1=t, \quad \vec{r}_1=\vec{r}-\vec{U}t, \quad \vec{\upsilon}_1=\vec{\upsilon}-\vec{U}. \tag{2.21}$$

Перетворення Галілея показують:

- як за відомим часом t, що тече в нерухомій системі відліку K, знайти час t_1 в іншій системі відліку K_1, яка рухається відносно першої з невеликою швидкістю $\vec{U}$;
- як за відомим положенням $\vec{r}$ матеріальної точки відносно системи відліку K знайти положення $\vec{r}_1$ цієї точки відносно K_1;
- як за відомою швидкістю $\vec{\upsilon}$ матеріальної точки відносно системи відліку K знайти швидкість $\vec{\upsilon}_1$ цієї точки відносно K_1.

Перевіримо перетворення Галілея на предмет внутрішньої несуперечливості. Застосуємо ці перетвореннями до опису зворотного переходу: від системи відліку K_1 до системи K. Виходячи з принципу відносності руху, можна сказати, що система K рухається відносно системи K_1 зі швидкістю «$-\vec{U}$». Тому перехід від системи відліку K_1 до системи K описується формулами (2.21), в яких слід замінити: $t_1 \leftrightarrow t$, $r_1 \leftrightarrow r$, $\vec{\upsilon} \leftrightarrow \vec{\upsilon}_1$, $\vec{U} \rightarrow -\vec{U}$:

$$t=t_1, \quad \vec{r}=\vec{r}_1+\vec{U}t_1, \quad \vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_1+\vec{U}. \tag{2.22}$$

Такий самий результат можна здобути з арифметичних міркувань внаслідок розв’язання системи рівнянь (2.21) відносно t, $\vec{r}$ і $\vec{\upsilon}$, що підтверджує, що побудована Галілеєм теорія є внутрішньо несуперечливою, самоузгодженою.

Зверніть увагу на те, що принцип відносності Галілея використовує припущення про те, що час змінюється однаково в різних системах відліку. Це є справедливим тільки для повільних рухів зі швидкістю $\upsilon \ll c$, що є значно меншою швидкості світла, які досліджує класична механіка. Для систем відліку, які рухаються з релятивістськими швидкостями, це не так: в них час змінюється повільніше, ніж у нерухомих системах відліку.

2.5. Інваріанти перетворень Галілея

Коли певна фізична величина не змінює свого числового значення при перетворенні координат, то це означає, що вона має об`єктивне значення, яке не залежить від обраної системи відліку. Такі фізичні величини відображають властивості самих явищ, що вивчаються, а не їхнє співвідношення з обраною системою відліку. Величини, числові значення яких не змінюються при переході з однієї системи відліку до іншої системи відліку, називаються інваріантами перетворень.

До інваріантів перетворень Галілея належать: лінійні розміри механічного об`єкта, інтервал часу, прискорення механічного об`єкта. У цьому легко пересвідчитися:

1). $$l^{(1)}=\sqrt{(x_2^{(1)}-x_1^{(1)})^2+(y_2^{(1)}-y_1^{(1)})^2+(z_2^{(1)}-z_1^{(1)})^2}= \tag{2.23}$$
$$=l^{(2)}=\sqrt{(x_2^{(2)}+x_1^{(2)})^2+(y_2^{(2)}-y_1^{(2)})^2+(z_2^{(2)}-z_1^{(2)})^2},$$

де $l^{(1,2)}$ – довжини, що виміряні у системах відліку K_1 та K_2, відповідно, перша з яких, наприклад, є нерухомою, а друга – рухається рівномірно та прямолінійно зі швидкістю $\vec{U}$.

2). $\Delta t^{(1)} = t_2^{(1)} - t_1^{(1)} = \Delta t^{(2)} = t_2^{(2)} - t_1^{(2)}$; (2.24)

3). $d^2\vec{r}^{(1)} / dt^2 = d^2\vec{r}^{(2)} / dt^2$, (2.25)

де $\vec{r}^{(1,2)}$ – це радіуси-вектори матеріальної точки у системах відліку K_1 та K_2, відповідно. Нехай система відліку K_1 рухається прямолінійно та рівномірно відносно K_2 зі швидкістю $\vec{U}$. Тоді, якщо обчислити похідні від $\vec{r}^{(1,2)}$ (див. для порівняння формули системи (2.21)) за часом, можна отримати зв'язок між швидкостями матеріальної точки, які обчислено в різних (K_1 та K_2, відповідно) системах відліку:

$$\vec{v}^{(1)} = \vec{v}^{(2)} - \vec{U} . \tag{2.26}$$

Експериментальна перевірка саме формули (2.26) і вказала на приблизний характер перетворень Галілея. Зазначимо, що відхилення експериментальних результатів від теоретичних, що визначаються за допомогою (2.26), є тим більшими, чим більшими є швидкості руху механічних об`єктів. Таким чином, це – ще одне свідчення існування релятивістських обмежень на коло тих механічних явищ, які досліджує класична механіка.

2.6. Закон збереження імпульсу

Виходячи з другого та третього законів Ньютона, можна здобути закони збереження імпульсу та енергії. Цікаво, що існує також можливість пройти й зворотнім шляхом, тобто вивести закони Ньютона із законів збереження. За великим рахунком, це справа смаку: що обрати за аксіому, а які закони механіки виводити. Даний курс викладання механіки є традиційним, тобто відповідає історичній послідовності розвитку фізики.

Насправді, використовуючи більш складний математичний апарат, можна вивести і закони Ньютона, і закони збереження, виходячи з однорідності простору та часу. Однорідність простору означає, що закони фізики однакові в усьому просторі. А однорідність часу означає, що закони фізики не змінюються з часом. Експериментальним підтвердженням однорідності часу є існування універсальних фізичних констант.

Закон збереження імпульсу свідчить, що повний імпульс замкненої системи матеріальних точок залишається незмінним з часом. Повний імпульс – це є векторна сума імпульсів усіх частинок у замкненій системі.

Доведемо закон збереження імпульсу спочатку на прикладі замкненої системи з двох матеріальних точок. Динаміка цих двох точок визначається другим законом Ньютона: $d\vec{p}_1 / dt = \vec{F}_{21}$, $d\vec{p}_2 / dt = \vec{F}_{12}$. Оскільки точок у системі лише дві, то на першу точку діє сила з боку лише другої точки – сила $\vec{F}_{21}$, а на другу точку – лише з боку першої точки – сила $\vec{F}_{12}$. За третім законом Ньютона маємо наступне співвідношення для сил, з якими відбувається взаємодія між цими двома матеріальними точками: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Додамо ці рівняння одне до одного: $d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)/ dt = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}$. Застосування третього закону Ньютона дає, що $d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)/ dt = 0$. Звідси маємо закон збереження повного імпульсу замкненої системи двох матеріальних точок : $\vec{p}_n \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = Const$.

Якщо замкнена система складається з трьох матеріальних точок, то на кожну з них діють дві інші: $d\vec{p}_1 / dt = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$, $d\vec{p}_2 / dt = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}$, $d\vec{p}_3 / dt = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$. Додамо ці рівняння: $d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3\right)/ dt = \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}\right) + \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}\right) + \left(\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}\right)$. За третім законом Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}$, $\vec{F}_{32} = -\vec{F}_{23}$. Використання третього закону Ньютона дає, що $d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_2)/ dt = 0$. Звідси маємо закон збереження повного імпульсу замкненої системи, що складається з трьох матеріальних точок: $\vec{p}_n \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = Const.$

Те саме є справедливим для N матеріальних точок:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j = Const. \qquad (2.27)$$

Отже, при будь-яких змінах руху матеріальних точок в замкненій системі сумарний імпульс такої системи залишається сталою величиною.

Питання для самоконтролю до розділу 2. Динаміка матеріальної точки

1. Коли матеріальна точка називається вільною?
2. Що таке маса матеріальної точки?
3. Що таке імпульс матеріальної точки?
4. Яку механічну систему називають замкненою (ізольованою)?
5. Сформулюйте закон збереження імпульсу.
6. Які системи відліку називаються інерціальними?
7. Сформулюйте перший закон Ньютона.
8. Сформулюйте другий закон Ньютона.
9. Що означає „адитивність маси”?
10. Сформулюйте третій закон Ньютона.
11. Назвіть інваріанти перетворення Галілея.

3. Деякі наслідки та застосування законів Ньютона

Досі ми вивчали рух окремої матеріальної точки або абсолютно твердого тіла певної маси. У цьому розділі вводиться поняття про центр мас системи матеріальних точок і доводиться теорема про рух цього центру; досліджується рух тіл змінної маси; вводяться поняття механічної роботи та кінетичної енергії та досліджується особливий випадок взаємодії матеріальних точок – зіткнення.

3.1. Теорема про рух центру мас

Центром мас (або центром інерції) механічної системи (системи матеріальних точок) називають таку уявну точку, радіус-вектор якої визначається за наступною формулою:

$$\vec{R}_ц = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{N} m_i \; . \qquad (3.1)$$

У разі неперервного розподілу маси формула (3.1) має вигляд: $\vec{R}_ц = \int \vec{r}\, dm \,/ \int dm$. Тут інтегрування (і в чисельнику, і в знаменнику) проводять по всьому об’єму механічної системи. Центр мас механічної системи, що складається з двох матеріальних точок однакової маси, лежить як раз посередині між ними. Якщо маси двох тіл m_1 і m_2 є різними, то центр мас лежить на відрізку, що сполучає ці точки; він лежить ближче до важкого тіла і далі від легкого; відстані від центра мас до цих точок l_1 і l_2 згідно з визначенням (3.1) задовольняють умові: m_1l_1=m_2l_2. Центр мас однорідного стержня лежить посередині цього стержня. Центри інерції однорідних кільця, диска, кулі та сфери лежать у їхніх геометричних центрах. Центр мас однорідного паралелограма лежить у точці перетинання його діагоналей. Центр інерції однорідного трикутника лежить у точці перетинання його медіан…

Обчислимо похідну від радіус-вектора центра мас за часом:

$$\frac{d\vec{R}_ц}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)^{-1} (m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + ...) = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{N} m_i \ . \qquad (3.2)$$

Цю величину природно назвати швидкістю центру мас:

$$\vec{V}_ц = d\vec{R}_ц \ / \ dt = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{N} m_i \ . \qquad (3.3)$$

У разі неперервного розподілу маси: $\vec{V}_ц = \int \vec{\upsilon} \ dm \ / \int dm$.

Імпульс центру мас визначається в такий спосіб:

$$\vec{P}_ц = \vec{V}_ц \sum_{i=1}^{N} m_i = \vec{V}_ц M \ , \qquad (3.4)$$

де $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – це повна маса системи.

Продиференціюємо рівняння (3.3) за часом і визначимо прискорення, з яким рухається центр мас:

$$\vec{A}_ц = \frac{d\vec{V}_ц}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \ / \ M = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \ / \ M \ . \qquad (3.5)$$

Оскільки сума внутрішніх сил, що діють між компонентами механічної системи за третім законом Ньютона дорівнює нулю, то у чисельнику виразу (3.5) лишається лише сума зовнішніх сил. Тим самим ми довели наступну теорему про рух центру мас (закон руху центру інерції).

<u>Теорема</u>**:** Центр мас системи матеріальних точок рухається як така матеріальна точка, маса якої дорівнює сумі мас усіх матеріальних точок, що є складовими частинами системи, під дією сили, яка є геометричною сумою усіх зовнішніх сил, що діють на систему, тобто:

$$\vec{A}_ц = \vec{F}_{рез}^{(зов)} \ / \ M . \qquad (3.6)$$

Якщо система є замкненою, тобто $\vec{F}_{рез}^{(зов)} = 0$, тоді $\vec{A}_ц = 0$ і $\vec{V}_ц = const$. Отже, центр мас замкненої системи матеріальних точок рухається рівномірно та прямолінійно.

Повний імпульс замкненої системи матеріальних точок, порахований відносно системи відліку, що рухається зі швидкістю центру мас, дорівнює нулю. Це твердження доволі просто перевірити. Швидкість *i*-ї матеріальної точки відносно лабораторної системи відліку $\vec{\upsilon}_i$ згідно перетворень Галілея пов’язана з її швидкістю відносно центру мас $\vec{\upsilon}_{ci}$ в наступний спосіб: $\vec{\upsilon}_i = \vec{V}_ц + \vec{\upsilon}_{ci}$. Тому сумарний імпульс механічної системи відносно центру мас $\vec{p}_c$ дорівнює:

$$\vec{p}_c = \sum m_i\vec{\upsilon}_{ci} = \sum m_i\left(\vec{\upsilon}_i - \vec{V}_ц\right) = \sum m_i\vec{\upsilon}_i - \sum m_i\vec{V}_ц \ . \qquad (3.7)$$

В другій сумі можна винести спільний множник $\vec{V}_ц$ і підставити його явний вираз (3.3):

$$\vec{p}_c = \sum m_i\vec{\upsilon}_i - \sum m_i \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{N} m_i = \sum m_i\vec{\upsilon}_i - \sum m_i\vec{\upsilon}_i = 0, \qquad (3.8)$$

що й слід було довести.

3.2. Рух тіл змінної маси

Термін “змінна маса” в класичній механіці має інше значення, ніж у теорії відносності. У рамках класичної механіки досліджується повільний рух об’єктів, чия маса змінюється через втрати або набуття певної кількості речовини. Наприклад, дощова крапля збільшує свою початкову масу під час падіння у повітрі, яке є перенасиченим водяною парою; маса реактивного літака зменшується за рахунок витікання газу, який утворюється у двигунах через згоряння палива. При цьому повільність руху означає тут, що досліджуються випадки швидкостей, що є значно меншими за швидкість світла.

Рівняння руху механічних об`єктів, що мають змінну масу, не містять у собі нічого принципово нового порівняно з другим законом Ньютона – вони є наслідками законів Ньютона. Ці рівняння становлять певний інтерес, головним чином, у зв`язку з розвитком ракетної техніки.

Елементарну теорію реактивного руху ракет побудовано на тому, що газ, який утворюється при згорянні палива, вилітає з ракети з великою швидкістю, передаючи їй імпульс у напрямку, що є протилежним до напрямку витікання газу. Здобудемо рівняння, що описує рух тіл змінної маси. У якості наочного прикладу (що в жодному разі не обмежує загальності висновків, що буде здобуто) вважатимемо, що йдеться про політ ракети. Для цього скористаємося стандартним методом: розглянемо імпульс механічної системи «ракета плюс гази» у довільний момент часу t і у наступний, фізично безкінечно близький, момент часу $t+dt$, і знайдемо зміну імпульсу за цей проміжок часу.

Нехай у довільний момент часу ракета разом із паливом має масу $m(t)$ і рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}(t)$. При цьому її імпульс дорівнює $\vec{p}(t)=m(t)\vec{\upsilon}(t)$. За елементарний проміжок часу dt маса ракети та її швидкість отримали, відповідно, прирости dm та $d\vec{V}$: $m(t)\to m(t+dt)=m(t)+dm$, $\vec{\upsilon}(t)\to\vec{\upsilon}(t+dt)=\vec{\upsilon}(t)+d\vec{\upsilon}$. Тому імпульс ракети разом із паливом, що в ній залишиться, на цей час дорівнюватиме $\vec{p}(t)\to\vec{p}(t+dt)=(m(t)+dm)(\vec{\upsilon}(t)+d\vec{\upsilon})$. Крім того, на момент часу $t+dt$ в системі виникне ще один компонент даної механічної системи – це газ, який полишає ракету внаслідок згоряння палива. Маса новоутвореного газу dm_Γ, його швидкість відносно інерціальної системи відліку $\vec{\upsilon}_\Gamma$. Таким чином, повний імпульс системи «ракета плюс паливо» в момент часу $t+dt$ дорівнює:

$$\vec{p}(t+dt)=(m(t)+dm)(\vec{\upsilon}(t)+d\vec{\upsilon})+dm_\Gamma\vec{\upsilon}_\Gamma. \quad (3.9)$$

Обчислимо зміну імпульсу за проміжок часу dt:

$$\vec{p}(t+dt)-\vec{p}(t)=(m(t)+dm)(\vec{\upsilon}(t)+d\vec{\upsilon})+dm_\Gamma\vec{\upsilon}_\Gamma - m(t)\vec{\upsilon}(t). \quad (3.10)$$

Усі величини, що входять до правої частини, тепер мають однаковий аргумент, тому надалі не будемо його вказувати у наших розрахунках:

$$\vec{p}(t+dt)-\vec{p}(t)=m\vec{\upsilon}+dm\vec{\upsilon}+md\vec{\upsilon}+dmd\vec{\upsilon}+dm_\Gamma\vec{\upsilon}_\Gamma-m\vec{\upsilon}. \quad (3.11)$$

Візьмемо до уваги, що повна маса системи «ракета плюс паливо» з часом зберігається: $m(t)=m(t+dt)+dm_\Gamma$. Тому $dm_\Gamma=-dm$:

$$d\vec{p}=\vec{p}(t+dt)-\vec{p}(t)=dm\vec{\upsilon}+md\vec{\upsilon}+dmd\vec{\upsilon}-dm\vec{\upsilon}_\Gamma. \quad (3.12)$$

Добутком $dmd\vec{\upsilon}$ знехтуємо як величиною другого порядку малості:

$$\vec{p}(t+dt)-\vec{p}(t)=dm\vec{\upsilon}+md\vec{\upsilon}-dm\vec{\upsilon}_\Gamma = dm(\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_\Gamma)+md\vec{\upsilon}. \quad (3.13)$$

Позначимо швидкість витікання газу відносно ракети $\vec{\upsilon}_\Gamma-\vec{\upsilon}$ як $\vec{\upsilon}_{від}$: $\vec{\upsilon}_{від}=\vec{\upsilon}_\Gamma-\vec{\upsilon}$, тоді

$$d\vec{p}=md\vec{\upsilon}-dm\vec{\upsilon}_{від}. \quad (3.14)$$

Разом із тим, з другого закону Ньютона маємо:

$$d\vec{p}=\sum\vec{F}dt, \quad (3.15)$$

де $\sum\vec{F}$ – це геометрична сума усіх зовнішніх сил, що діють на ракету разом із паливом. Порівнюючи два вирази (3.14) та (3.15) для $d\vec{p}$, дістаємо:

$$d\vec{p}=md\vec{\upsilon}-dm\vec{\upsilon}_{від}=\sum\vec{F}dt. \quad (3.16)$$

Звідси маємо: $md\vec{\upsilon} = dm\vec{\upsilon}_{від} + \sum \vec{F}dt$, або у формі рівняння Мещерського[2]:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \sum \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{\upsilon}_{від} \ . \qquad (3.17)$$

Величину $\vec{\upsilon}_{від} dm/dt$ називають реактивною силою. У випадку польоту ракети її маса з часом зменшується через згоряння палива: $dm/dt<0$, тому вводять додатну величину – витрату газу $\mu = - \ dm/dt$. З її використанням рівняння Мещерського набуває вигляду

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \sum \vec{F} - \mu\vec{\upsilon}_{від} \, . \qquad (3.18)$$

Реактивна сила штовхає ракету у напрямку, протилежному до того, в якому гази вилітають із сопла двигуна ракети.

Розглянемо більш детально випадок, коли $\vec{F}_{рез} = 0$, тобто коли ракета летить у космосі далеко від Землі, інших планет та зірок. За цих умов силою гравітаційного тяжіння ракети до цих об’єктів можна знехтувати. Це також можна зробити, коли реактивна сила є набагато більшою за результуючу решти сил. Тоді рівняння (3.17) спрощується:

$$md\vec{\upsilon}/dt = \vec{\upsilon}_{від} dm/dt \, . \qquad (3.19)$$

Нехай ракета рухається прямолінійно, наприклад, уздовж осі $\vec{z}$. Тоді вектори $\vec{\upsilon}$ та $\vec{\upsilon}_{від}$ орієнтовано у взаємно протилежних напрямках, а маса ракети зменшується ($dm/dt<0$). Спроектуємо рівняння (3.19) на вісь $\vec{z}$ і дістанемо скалярне рівняння:

[2] Мещерський Іван Всеволодович (1859-1935) – радянський учений у галузі теоретичної та прикладної механіки. Завідував кафедрою теоретичної механіки Петербурзького політехнічного інституту. Основоположні праці по механіці тіла змінної маси, що стали теоретичною основою розробок різних проблем, головним чином реактивної техніки, небесної механіки.

$$md\upsilon = -\upsilon_{від} dm. \qquad (3.20)$$

Тут $\upsilon_{від}>0$. Обмежимо подальше дослідження простим випадком сталої швидкості витікання газів, коли $\upsilon_{від}=Const$. Виконаємо процедуру поділу змінних у співвідношенні (3.20), що в цьому випадку полягає у тому, щоб поділити рівняння (3.20) на $m\upsilon_{від}$:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon_{від}} = -\frac{dm}{m}. \qquad (3.21)$$

Проінтегруємо рівняння (3.21) від деякого початкового моменту часу $t=t_0$, коли $\upsilon(t_0)=\upsilon_0$ і $m(t_0)=m_0$, до поточного моменту часу t

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon(t)} d\upsilon = -\upsilon_{від} \int_{m_0}^{m(t)} \frac{dm}{m} \qquad (3.22)$$

та здобудемо:

$$\upsilon(t) - \upsilon_0 = \upsilon_{відн} \ln[m_0 / m(t)] \, . \qquad (3.23)$$

Рівняння (3.23) показує: для того, щоб ракета набула найбільшої швидкості, по-перше, слід обладнати її гарним двигуном з найбільшою швидкістю $\upsilon_{від}$ витікання газів із сопла ракети і, по-друге, виготовити ракету з найменшою корисною масою (масою, що залишається після згоряння палива), $m_0>>m(t)$. При чому перший шлях є більш ефективним, бо лінійна функція зростає швидше за логарифмічну.

Рівняння (1.3.17) можна переписати ще так:

$$m(t) = m_0 \exp\left[-\frac{\upsilon(t) - \upsilon_0}{\upsilon_{відн}}\right]. \qquad (3.24)$$

Коли $\upsilon_в = 0$, тоді з (3.24) здобуваємо формулу Ціолковського[3]:

[3] Ціолковський Костянтин Едуардович (1857-1935) – засновник сучасної космонавтики. Він обґрунтував суцільно-металевий аеростат дирижабля, обтічний аероплан, поїзд на повітряній подушці та ракету

$$m(t) = m_0 \exp[-\upsilon(t)/\upsilon_{відн}]. \qquad (3.25)$$

Виходячи з наявної швидкості $\upsilon_{від}$ витікання газів з двигуна, Ціолковський показав, що маса палива, яке є необхідним для досягнення міжпланетним кораблем другої космічної швидкості, на кілька порядків переважає корисну масу ракети. Це привело його, зокрема, до ідеї про ракету з багатьма ступенями.

3.3. Робота та кінетична енергія

Кількість енергії, яку людство одержує з надр Землі у формах, які є зручними для сучасного промислового виробництва, має свою межу, до якої вже недалеко. Добробут людства безпосередньо пов`язано із споживанням енергії. Об`єми валових національних продуктів є приблизно пропорційними до величини споживаної енергії. Виробництво та розподіл енергії за умов обмежених ресурсів та ажіотажного попиту становить соціальну, економічну та політичну проблему. Але фізика опікується іншими аспектами питань енергії.

Коли фізична сила діє на рухому матеріальну точку, то вона виконує роботу над нею. Робота вимірюється в Джоулях[4]:

для міжпланетних подорожей. Ціолковському належить ідея конструкції аероплана з металевим каркасом. Він побудував 1897 року першу в Росії аеродинамічну трубу з відкритою робочою частиною і визначив коефіцієнт опору різних тіл. Ціолковський обчислив другу космічну швидкість, запропонував багатоступінчастий міжпланетний корабель. Напередодні 100-річчя від дня народження Ціолковського в 1954 АН СРСР заснувала золоту медаль його імені «За видатні роботи в області міжпланетних сполучень».

[4] Джоуль (Joule) Джеймс Прескотт (1818-1889) – англійський фізик. Джоуль вивчав природу тепла і визначив кількість теплоти, що виділяється при механічній роботі, відкрив закон збереження енергії і сформулював перший закон термодинаміки. Разом із Кельвіном він працював над розробкою абсолютної шкали температури. Йому належить визначення кількості теплоти, що виділяється при проходженні струму крізь провідник (закон Джоуля-Ленца). Досліджував магнітострикцію. Джоуль був членом Лондонського королівського товариства, почесним доктором Трініті коледжу в

$[A] = [Дж]$ в системі СІ або в ергах: $[A] = [ерг]$ в системі СГС. Кількісно елементарна робота, що її виконує сила $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки на $d\vec{S}$, дорівнює скалярному добутку сили та переміщення, $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{S} = FdS\cos(\angle\vec{F}; d\vec{S})$. Коли матеріальна точка рухається вздовж криволінійної траєкторії під дією змінної сили, долаючи шлях скінченної величини, тоді робота складається з елементарних робіт, виконаних на окремих ділянках, $A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{S}$ – це є криволінійний інтеграл, який беруть уздовж траєкторії руху L. Коли рух відбувається за умов дії кількох сил, наприклад, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то $\vec{F} \cdot d\vec{S} = (F_{1S} + F_{2S})dS = \delta A_1 + \delta A_2 = dA$, тут F_{1S} – це проекція сили $\vec{F}_1$ на напрямок переміщення $d\vec{S}$. Отже, елементарна робота кількох сил дорівнює сумі елементарних робіт цих сил. Така властивість механічної роботи називається **адитивністю**.

Потужність P – це робота, яку виконано за одиницю часу $P = \delta A / dt$. Розмірність потужності: $[P] = Вт = Дж/с$ = $= 1\ Вт = 10^7\ ерг/с$.

Кінетичною енергією матеріальної точки називають величину $K = m\vec{\upsilon}^2/2 = \vec{p}^2/(2m)$. Робота сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки дорівнює приросту кінетичної енергії. Доведемо це шляхом інтегрування:

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} \vec{\upsilon} dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \vec{\upsilon}\, d\vec{p} = \frac{1}{m} \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \vec{p} d\vec{p}. \qquad (3.26)$$

Проведемо тотожне перетворення скалярного добутку $\vec{p}d\vec{p}$. Для

Дубліні, Оксфордського, Единбурзького і Лейденського університетів. Його нагороджено золотою медаллю Лондонського королівського товариства, медаллю Коплі, медаллю Альберта.

цього продиференціюємо добуток $\vec{p}\vec{p} = pp$. В результаті здобудемо: $2\vec{p}d\vec{p} = 2pdp$. Тобто, $\vec{p}d\vec{p} = pdp$. На перший погляд, це – очевидний результат. Однак, таке просте «відкидання» символів вектора не завжди є справедливим. Здобутий перехід від $\vec{p}d\vec{p}$ до pdp означає, що скалярний добуток імпульсу на його зміну точно дорівнює добутку (алгебраїчному) модуля імпульсу на зміну модуля імпульсу. З урахуванням цього переходу вираз (3.26) можна проінтегрувати:

$$A_{12} = \frac{1}{m}\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \vec{p}d\vec{p} = \frac{1}{m}\int_{p_1}^{p_2} pdp = \frac{p_2^2 - p_1^2}{2m} = K_2 - K_1. \qquad (3.27)$$

Завдяки адитивності роботи та кінетичної енергії (кінетична енергія системи матеріальних точок дорівнює сумі кінетичних енергій матеріальних точок, з яких ця система складається або на які цю систему можна уявно поділити) цей результат можна узагальнити на випадок довільної системи матеріальних точок. В такому розумінні рівняння (3.27) є математичним формулюванням закону збереження кінетичної енергії механічної системи. Сформулюємо його: «Приріст кінетичної енергії системи матеріальних точок дорівнює роботі усіх сил, що діють на цю систему».

Якщо порівняти цей закон із законом збереження імпульсу системи матеріальних точок, який можна розглядати як теорему про зв`язок між $\vec{F}_{рез}^{(зов)}dt$ та $d\vec{p}$, то видно, що вони сильно відрізняються. <u>Внутрішні сили</u> (внаслідок виконання третього закону Ньютона) не здатні змінити імпульс системи матеріальних точок, тобто приріст кількості руху не залежить від внутрішніх сил, але <u>ці сили</u> можуть змінювати кінетичну енергію системи.

3.4. Зіткнення

Терміном зіткнення у механіці позначають процес взаємодії між механічними об`єктами у широкому розумінні,

тобто це не є обов`язково явище їхнього торкання один з одним, за яким настає явище відштовхування. Механічні об`єкти, що зіштовхуються, перебувають на нескінченно великій відстані один від одного перед зіткненням та розлітаються після зіткнення на значні відстані, тому ми будемо вважати їх перед і після зіткнення вільними. Пролітаючи один повз інший, ці об`єкти взаємодіють у різний спосіб: 1) обмінюються масою аж до об`єднання, утворюючи нові тіла, 2) обмінюються імпульсом і енергією, внаслідок чого ці об’єкти змінюють траєкторію руху порівняно з випадком відсутності взаємодії. Для описання різних типів взаємодії використовують кілька моделей. До їхнього числа належать моделі пружного та абсолютно непружного зіткнень.

Пружне зіткнення – це ідеалізована модель взаємодії, коли механічні об`єкти після певного наближення знову розходяться без зміни свого внутрішнього стану. Таким чином, кінетична енергія не переходить до інших типів енергії, внаслідок чого повна кінетична енергія механічної системи при пружному зіткненні зберігається. Пружні зіткнення відіграють важливу роль в атомній фізиці, де збереження кінетичної енергії реалізується не приблизно (ідеалізовано), а точно.

При розв’язанні задач про пружне зіткнення двох матеріальних точок масою m_1 та m_2 використовують два закони збереження – імпульсу та кінетичної енергії:

$$\begin{cases} m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2; \\ m_1\upsilon_1^2/2 + m_2\upsilon_2^2/2 = m_1u_1^2/2 + m_2u_2^2/2. \end{cases} \qquad (3.28)$$

Тут $\vec{\upsilon}_j$ та $\vec{u}_j$ – це швидкості j-ї матеріальної точки перед та після зіткнення, відповідно. Закон збереження імпульсу є справедливим, бо йдеться про замкнуту механічну систему; закон збереження кінетичної енергії виконується, оскільки за умовою задачі відбувається саме пружне зіткнення.

Абсолютно непружне зіткнення має місце, коли після взаємодії механічні об`єкти рухаються з однаковою швидкістю (як одне ціле). При цьому, звичайно, їхня кінетична енергія не зберігається.

Решта зіткнень у механіці є непружними, для них має місце втрата частини кінетичної енергії на такі процеси, як нагрівання, деформація взаємодіючих тіл, генерація звуку і таке інше.

Обчислимо зміну кінетичної енергії $\Delta K = K_к - K_п$ двох матеріальних точок з масами m_1 та m_2, що утворюють замкнену механічну систему, при абсолютно непружному зіткненні. Позначимо швидкість, що її набули тіла внаслідок зіткнення, через $\vec{V}$. Тоді закон збереження імпульсу набуває такого вигляду: $m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}$. Звідси здобуваємо вираз для швидкості матеріальних точок після абсолютно непружного зіткнення: $\vec{V} = (m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2)/(m_1 + m_2)$. Тепер можна обчислити зміну кінетичної енергії $\Delta K = K_к - K_п$ для такої взаємодії:

$$\begin{aligned}\Delta K &= (m_1+m_2)V^2/2 - m_1\upsilon_1^2/2 - m_2\upsilon_2^2/2 = \\ &= \frac{(m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2)^2}{2(m_1+m_2)} - \frac{m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2}{2} = \\ &= \frac{m_1^2\upsilon_1^2 + 2m_1m_2(\vec{\upsilon}_1\cdot\vec{\upsilon}_2) + m_2^2\upsilon_2^2}{2(m_1+m_2)} - \\ &- \frac{m_1^2\upsilon_1^2 + m_1m_2\upsilon_1^2 + m_1m_2\upsilon_2^2 + m_2^2\upsilon_2^2}{2(m_1+m_2)} = \\ &= \frac{2m_1m_2(\vec{\upsilon}_1\cdot\vec{\upsilon}_2) - m_1m_2\upsilon_1^2 - m_1m_2\upsilon_2^2}{2(m_1+m_2)} = \\ &= \frac{-m_1m_2\left(\upsilon_1^2 - 2(\vec{\upsilon}_1\cdot\vec{\upsilon}_2) + \upsilon_2^2\right)}{2(m_1+m_2)} = -\mu\frac{(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)^2}{2} \le 0,\end{aligned} \qquad (3.29)$$

де $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ – це зведена маса системи двох матеріальних точок.

Із співвідношення (3.30) видно, що $\Delta K = 0$ тільки коли $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2$, тобто ніколи. Зрозуміло, що рівність $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2$ означає рух даних механічних об’єктів в один бік та з однаковою за модулем швидкістю, що свідчить про неможливість їхнього зіткнення. Зменшення величини кінетичної енергії при абсолютно непружному зіткненні підтверджує тезу про перехід частини кінетичної енергії до немеханічної, що супроводжує такий тип взаємодії.

Лобовим зіткненням (або центральним ударом) називають таке зіткнення механічних об`єктів, які рухаються перед та після взаємодії вздовж однієї прямої, яка поєднує центри мас цих об`єктів.

Розглянемо пружне лобове зіткнення двох кульок однакової маси: $m_1 = m_2$. Вважаємо, що кульки не обертаються навколо жодної осі, тобто їх можна розглядати як матеріальні точки. Оберемо систему відліку так, щоб у ній друга кулька була нерухомою перед зіткненням: $\upsilon_2=0$, а одна з її координатних осей була паралельною вектору швидкості першої частинки перед зіткненням, тобто вектору $\vec{\upsilon}_1$. Тоді в першому з системи рівнянь (3.28) можна перейти до проекцій векторів швидкості на обрану вісь координат. Друге рівняння в системі (3.28) домножимо для зручності запису на двійку. За цих умов з системи (3.28) здобудемо:

$$\begin{cases}\upsilon_1 = u_1 + u_2; \\ \upsilon_1^2 = u_1^2 + u_2^2.\end{cases} \qquad (3.30)$$

Піднесемо перше рівняння системи (3.30) в квадрат:

$$\upsilon_1^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2. \qquad (3.31)$$

Якщо порівняти рівняння (3.31) з другим рівнянням (3.30), то дістаємо, що добуток $u_1u_2 = 0$. Це може бути у двох випадках: або $u_2=0$, або $u_1=0$. Перший варіант ($u_2=0$) є нефізичним, бо він означає незмінність імпульсу (а також кінетичної енергії) другої кульки внаслідок зіткнення, тобто відсутність взаємодії. Отже, залишається другий варіант: $u_1=0$, тобто внаслідок зіткнення перша кулька повністю передала свій імпульс другій кульці і зупинилася. Оскільки $u_1=0$, то з першого рівняння (3.30) дістаємо: $u_2=\upsilon_1$. Тому друга кулька почала рухатися після зіткнення зі швидкістю, яку мала перша кулька перед зіткненням.

Розв'яжемо тепер іншу задачу – випадок пружного нелобового зіткнення кульок за умов $m_1 \neq m_2$. Оберемо систему відліку так, аби друга кулька перед зіткненням була нерухомою, $\vec{\upsilon}_2=0$. Це припущення не накладає жодних фізичних обмежень на дане дослідження, проте спрощує математичні викладки, зокрема систему рівнянь (3.28), що було показано для попереднього випадку (див. систему (3.30)). Отже, система вихідних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} m_1\vec{\upsilon}_1 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2\,; \\ 0.5m_1\upsilon_1^2 = 0.5m_1u_1^2 + 0.5m_2u_2^2\,. \end{cases} \tag{3.32}$$

Система (3.32) не визначає однозначно швидкості кульок після зіткнення $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$ за відомими масами m_1 та m_2, а також швидкістю налітаючої кульки $\vec{\upsilon}_1$. Дійсно, у загальному випадку одне векторне і одне скалярне рівняння з (3.32) є еквівалентними чотирьом скалярним рівнянням, тоді як невідомі шість компонентів двох векторів $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$. Щоправда, тут слід скористатися симетрією задачі і зауважити, що задача є не тривимірною, а двовимірною: якщо знехтувати можливістю обертання кульок перед зіткненням, то можна вважати, що вектори $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$ лежать в одній площині. Тому векторне рівняння в (3.32) – закон збереження імпульсу – є еквівалентним двом скалярним, і система рівнянь (3.32) задає три умови на чотири компоненти векторів $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$. Але навіть з урахуванням зауваження про двовимірний характер задачі вона не розв'язується однозначно. Тому слід ввести ще одне обмеження: порахуємо, на який *максимальний* кут $max\,\alpha$ може відхилитися кулька внаслідок пружного зіткнення з нерухомою кулькою іншої маси.

Для знаходження $max\,\alpha$ скористаємось наступним прийомом, який є досить поширеним через свою ефективність – перейдемо до системи відліку, яка пов'язана з центром мас, так званої «системи центру мас». Нагадаємо, що швидкість центра мас відносно лабораторної системи відліку визначається так: $\vec{V}_ц = m_1\vec{\upsilon}_1/(m_1+m_2)$. Позначимо імпульси кульок перед зіткненням відносно системи центра мас $\vec{p}_{c1}$ та $\vec{p}_{c2}$. Тоді імпульс першої кульки перед зіткненням відносно лабораторної системи відліку:

$$\vec{p}_1 \equiv m_1\vec{\upsilon}_1 = m_1(\vec{V}_ц + \vec{\upsilon}_{c1}) = m_1\vec{V}_ц + \vec{p}_{c1}. \tag{3.33}$$

Тут $\vec{\upsilon}_{c1}$ – це швидкість першої кульки перед зіткненням відносно системи центру мас. Тоді її імпульс перед зіткненням відносно системи центру мас:

$$\vec{p}_{c1} = m_1\vec{\upsilon}_1 - m_1\vec{V}_ц = m_1\vec{\upsilon}_1\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) = \frac{m_1m_2\vec{\upsilon}_1}{m_1+m_2} \equiv \mu\vec{\upsilon}_1, \tag{3.34}$$

де μ – це зведена маса (див. формулу (3.29)).

Імпульс другої кульки в лабораторній системі відліку за умовою задачі дорівнює нулю: $\vec{p}_2 = m_2\vec{\upsilon}_2 = m_2(\vec{V}_ц + \vec{\upsilon}_{c2}) = m_2\vec{V}_ц + \vec{p}_{c2} \equiv 0$. Отже, імпульс другої кульки перед зіткненням відносно системи центра мас:

$$\vec{p}_{c2} = -m_2\vec{V}_ц = -m_2\frac{m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1+m_2} = -\mu\vec{\upsilon}_1 = -\vec{p}_{c1}. \tag{3.35}$$

Тобто: $\vec{p}_{c2} = -\vec{p}_{c1}$. На перший погляд, це може видатись дивним, але нагадаємо, що під час аналізу теореми про рух центра мас було, зокрема, відзначено, що сумарний імпульс замкненої механічної системи, порахований відносно центра мас, дорівнює нулю: $\vec{p}_{c1} + \vec{p}_{c2} = 0$. З точки зору фізики це означає, що центр мас є нерухомим відносно себе самого. До того ж, у такий спосіб ми перевірили, що досі не помилились у викладці. Отже, після зіткнення сумарний імпульс також буде дорівнювати нулю: $\vec{p}_{c1}^{(n)} + \vec{p}_{c2}^{(n)} = 0$. Тут верхній індекс *(n)* позначає, що йдеться про імпульси **п**ісля зіткнення.

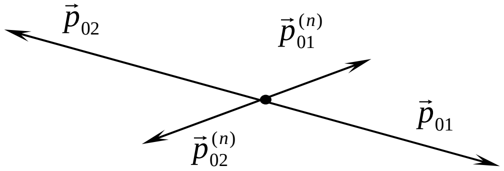

Рис. 3.1. Збереження повного імпульсу в системі центру мас

Зверніть увагу на те, що досі закон збереження енергії не був використаний, тому для випадку *довільного зіткнення* (коли закон збереження кінетичної енергії може і не виконуватися) маємо таке розташування імпульсів, що представлено на рис. 3.1.

Якщо зіткнення є пружним, тоді виконується закон збереження кінетичної енергії, тому характер взаємодії буде дещо іншим, порівняно з тим, що наведено на рис. 3.1. Застосовуючи закон збереження кінетичної енергії, маємо наступне рівняння:

$$p_{c1}^2 \big/ m_1 + p_{c2}^2 \big/ m_2 = p_{c1}^{(n)2} \big/ m_1 + p_{c2}^{(n)2} \big/ m_2 \,. \qquad (3.36)$$

Оскільки $|\vec{p}_{c1}| = |\vec{p}_{c2}|$ та $\left|\vec{p}_{c1}^{(n)}\right| = \left|\vec{p}_{c2}^{(n)}\right|$, то з рівняння (3.36) можна знайти наступне співвідношення: $\vec{p}_{c1}^{2}(m_1^{-1} + m_2^{-1}) = \vec{p}_{c1}^{(n)2}(m_1^{-1} + m_2^{-1})$, що означає рівність модулів імпульсів першої і другої кульок перед і після зіткнення, якщо їх розглядати відносно центра мас:

$$|\vec{p}_{c1}| = \left|\vec{p}_{c1}^{(n)}\right| = |\vec{p}_{c2}| = \left|\vec{p}_{c2}^{(n)}\right| . \qquad (3.37)$$

Таким чином, пружне зіткнення в системі центра мас матиме

вигляд, що представлено на рис. 3.2, який є частинним випадком попереднього рисунка. Дослідження пружного зіткнення кульок довільної маси в системі центра мас має самостійне значення. Як було показано, в системі центра мас пружне зіткнення двох кульок виглядає так, що діаметр кола, який складається з імпульсів кульок перед зіткненням, повертається внаслідок зіткнення навколо центра кола, та імпульси кульок після зіткнення утворюють інший діаметр цього ж кола.

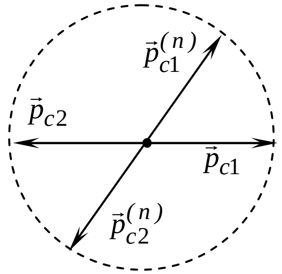

Рис. 3.2. Збереження повного імпульсу в системі центру мас при пружному зіткненні

Повернемося до лабораторної системи відліку та визначимо максимальний кут, на який здатна легша нерухома кулька відхилити внаслідок зіткнення важку налітаючу кульку, $m_1 > m_2$, від напрямку, вздовж якого рухалась важча кулька перед зіткненням. Як було показано вище, $\vec{p}_1 = \vec{p}_{c1} + m_1\vec{V}_ц$. Складові вектори $\vec{p}_{c1}$ і $m_1\vec{V}_ц$ мають однаковий напрямок, що збігається із напрямком швидкості першої частинки перед зіткненням $\vec{\upsilon}_1$. При цьому внаслідок умови задачі $m_1 > m_2$ дістаємо, що за модулем перша складова є меншою: $|p_{c1}| < |m_1 V_ц|$, оскільки

$$m_1 V_ц = \frac{m_1^2 \upsilon_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_2}\mu\upsilon_1 > p_{01} = \mu\upsilon_1 . \qquad (3.38)$$

Нарисуємо для ілюстрації задачі наступний рис. 3.3, на якому $\overrightarrow{AC} = \vec{p}_1$ – це імпульс налітаючої кульки перед зіткненням відносно лабораторної системи відліку, $\overrightarrow{AO} = m_1 V_ц$ – це складова

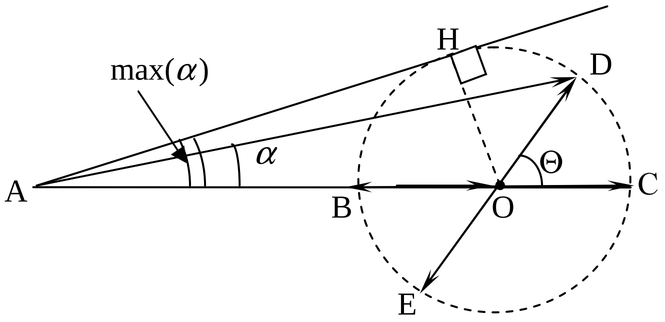

Рис. 3.3. До розрахунку максимального кута, на який може відхилитися важке тіло внаслідок зіткнення з легким

$\vec{p}_1$, яка пов'язана з рухом центру мас і яка залишається незмінною внаслідок зіткнення, $\overrightarrow{OC} = \vec{p}_{c1}$ – це імпульс налітаючої частинки перед зіткненням відносно центру мас. Оскільки $|p_{c1}| < |m_1 V_ц|$, то $|\overrightarrow{OA}| > |\overrightarrow{OC}|$.

Використовуючи попередні результати, що здобуті у системі центру мас, нарисуємо коло радіусом p_{c1} навколо точки *O*. Тоді внаслідок зіткнення досліджуваних матеріальних точок їхні імпульси (тобто вектори $\overrightarrow{OC} = \vec{p}_{c1}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{p}_{c2}$) повертаюся на кут Θ і переходять у вектори $\overrightarrow{OD}$ і $\overrightarrow{OE}$, відповідно. При цьому довжини цих векторів не змінюються, тобто усі вони утворюють радіуси одного кола. З геометричної побудови (див. рис. 3.3) видно, що ступінь відхилення імпульсу першої кульки від її початкового напрямку внаслідок зіткнення з другою кулькою маси m_2 характеризується кутом α.

Максимальний кут відхилення α спостерігатиметься тоді, коли точка *D* співпаде з точкою *H*, тобто *AH* буде дотичною лінією, тому: $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AH}$. Отже, максимальному відхиленню відповідає наступне значення синуса кута α:

$$max(sin\alpha) = \frac{OH}{OA} = \left|\frac{\vec{p}_{01}}{m_1 V_ц}\right| = \frac{\mu\upsilon_1}{m_1^2\,\upsilon_1}(m_1 + m_2) = \frac{m_2}{m_1} < 1. \quad (3.39)$$

З аналізу (3.39) можна зробити висновок, що нерухома легка кулька масою m_2 не може сильно відхилити важку кульку від попередньої траєкторії руху.

Розглянемо випадок пружного зіткнення легкої частинки з нерухомою важкою частинкою, тобто протилежний до попереднього випадок: $m_1 < m_2$. Нарисуємо розташування імпульсів частинок перед та після зіткнення в цьому випадку (див. рис. 3.4). Тут усі вектори мають ті самі фізичні значення, що й у попередньому випадку. Єдина різниця полягає в тому, що оскільки $m_1 < m_2$, то $|p_{c1}| > |m_1 V_ц|$ та

$$|\overrightarrow{AO}| = \mu\upsilon_1 m_1 / m_2 < |\overrightarrow{OC}| = \mu\upsilon_1. \quad (3.40)$$

Тому, як це видно на рис. 3.4, імпульс налітаючої частинки після зіткнення відносно лабораторної системи відліку (вектор $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} =$
$= m_1\vec{V}_ц + \vec{p}_{c1}^{\,(n)})$ може складати будь-який кут з напрямком свого попереднього руху (з вектором
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} =$
$= m_1\vec{V}_ц + \vec{p}_{c1}$.

Таким чином, легка частинка може розсіятися на будь-який кут після взаємодії з важкою. Але продовжити свій рух після взаємодії без зміни своєї траєкторії вона не

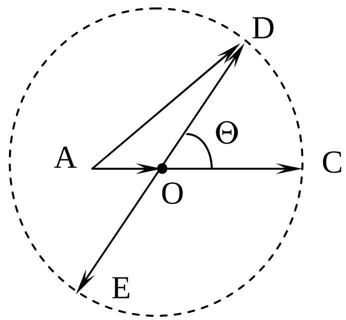

Рис. 3.4. До розрахунку максимального кута, на який може відхилитися легке тіло внаслідок зіткнення з важким

може, тобто рух вздовж вектора $\overrightarrow{AC}$ заборонено.
Зауваження: *під час нашого теоретичного дослідження не було враховано справжніх скінченних розмірів частинок; їхнє врахування призводить до зменшення максимального кута , на який легка кулька може відхилити важку, що налітає.*

3.5. Методика розв`язання задач про зіткнення

При розв'язанні задач про зіткнення між механічними об'єктами слід пам'ятати: якщо за умови задачі взаємодія є пружною, тоді можна використовувати як закон збереження імпульсу, так і закон збереження енергії. Продемонструємо це на прикладі наступної задачі. Якщо ж з умов задачі виходить, що взаємодія є непружною, тоді можна використовувати тільки закон збереження імпульсу. Щоправда є ще одна можливість скористатися законом збереження енергії при непружній взаємодії, якщо відомі втрати механічної енергії, бо в цьому випадку можна скласти рівняння балансу енергії.

Задача 1

Дано: Перша частинка пружно зіткнулася з другою частинкою, яка перед тим була нерухомою.
Знайти: частку їхніх мас у двох окремих випадках:
а). Зіткнення було лобовим, а частинки розлетілися у взаємно протилежних напрямках з однаковими за модулем швидкостями.
б). Частинки розлетілися симетрично по відношенню до напрямку початкового руху першої частинки, а кут розльоту склав $\Theta = 60°$.
Розв'язання:

Розглянемо випадок а), запишемо систему з двох рівнянь, яка відповідає законам збереження імпульсу та кінетичної енергії. При цьому, по-перше, спроектуємо вектори швидкостей на вісь, вздовж якої відбувається рух при лобовому зіткненні, що дозволить записати закон збереження імпульсу у скалярній формі. По-друге, множник 1/2 у виразі для кінетичної енергії для спрощення запису опустимо:

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1 = m_1u_1 + m_2u_2; \\ m_1\upsilon_1^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2. \end{cases} \qquad (3.41)$$

Тут літерою υ_1 позначено швидкість першої частинки перед зіткненням, а $u_{1,2}$ – швидкості частинок після зіткнення. Зазначимо, що попри те, що перша частинка після зіткнення полетіла у зворотному напрямку, з методичної точки зору не слід враховувати цю обставину шляхом вибору знаку в першому з рівнянь (3.41): $m_1\upsilon_1 \neq -m_1u_1 + m_2u_2$. Слід просто мати на увазі, що u_1 є від'ємною: u_1<0.

За умовами задачі $u_1=-u_2$, тому можемо виключити швидкість другої частинки після зіткнення u_2:

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1 = (m_1 - m_2)u_1; \\ m_1\upsilon_1^2 = (m_1 + m_2)u_1^2. \end{cases} \qquad (3.42)$$

З першого рівняння системи (3.42) знайдемо зв'язок між швидкостями першої частинки перед та після зіткнення:

$$u_1 = \upsilon_1\, m_1/\left(m_1 - m_2\right). \qquad (3.43)$$

Зазначимо, що в формулі (3.43) знаменник не може обертатись на нуль, $m_1 \neq m_2$: як було показано в параграфі 3.4. лобове пружне зіткнення частинок однакової маси не може призводити до їхнього розльоту з однаковими швидкостями. Піднесемо швидкість u_1 з (3.43) в квадрат і підставимо її до другого рівняння системи (3.42): $m_1 = (m_2 + m_1)\left(m_1/(m_2 - m_1)\right)^2$; звідки $3m_2m_1 = m_2^2$. Отже, друга частинка є втричі важчою за налітаючу:

$$m_2 / m_1 = 3. \qquad (3.44)$$

Розв'язання цієї задачі у випадку б) є складнішим, бо вимагає використання закону збереження імпульсу:

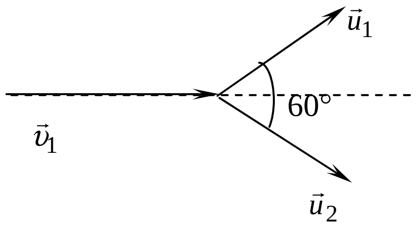

Рис. 3.5. До задачі 1

$m_1\vec{\upsilon}_1 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$ у проекціях на дві взаємно перпендикулярні осі. Проекція цього рівняння на напрямок, з яким рухалась перша частинка перед зіткненням, із урахуванням умови задачі про симетричність руху після зіткнення (див. рис. 3.5) дає:

$$m_1\upsilon_1 = m_1 u_1 \cos 30° + m_2 u_2 \cos 30°. \qquad (3.45)$$

Наступне рівняння здобуваємо внаслідок проектування імпульсів на вісь, що є перпендикулярною до швидкості $\vec{\upsilon}_1$:

$$0 = m_1 u_1 \sin 30° - m_2 u_2 \sin 30°, \Rightarrow u_1 = m_2 u_2 / m_1. \qquad (3.46)$$

Третє рівняння, що описує цю взаємодію, є наслідком закону збереження кінетичної енергії:

$$m_1\upsilon_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2. \qquad (3.47)$$

Скористаємося виразом (3.46) та виключимо швидкість першої частинки після зіткнення u_1 з (3.47):

$$u_2^2 = \frac{m_1^2}{m_2}\frac{\upsilon_1^2}{m_1 + m_2}. \qquad (3.48)$$

Підставимо u_1 з (3.46) до (3.45) та здобудемо інший вираз для u_2:

$$u_2 = \frac{\sqrt{3} m_1 \upsilon_1}{3 m_2}. \qquad (3.49)$$

Отже, маємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{\sqrt{3} m_1 \upsilon_1}{3 m_2}; \\ u_2^2 = \dfrac{m_1^2}{m_2}\dfrac{\upsilon_1^2}{m_1 + m_2}. \end{cases} \qquad (3.50)$$

Піднесемо перше рівняння в квадрат і поділимо одне рівняння на друге та здобудемо частку мас частинок:

$$\frac{m_1^2}{3m_2^2} = \frac{m_1^2}{m_2(m_1 + m_2)}; \ \Rightarrow \ 3m_2^2 = m_1 m_2 + m_2^2, \qquad (3.51)$$

та нарешті: $m_2 = m_1 / 2$. Тобто, налітаюча частинка вдвічі важча за нерухому. В параграфі 3.4 було показано, що при пружному розсіянні важкої частинки на легкій синус максимального кута розсіяння становить $\sin\alpha_{max}$=m_2/m_1=0.5, або α_{max} =30°. Отже, умова розглянутої задачі не суперечить здобутим раніше результатам.

Відповідь:

таким чином, у випадку лобового зіткнення (випадку а)) частинка, яка грала роль мішені, є втричі важчою за першу частинку, а при симетричному розльоті частинок (випадок б)) маса частинки «мішені» є вдвічі легшою за m_1.

Задача 2

Якщо взаємодія матеріальних точок є абсолютно непружною, то така взаємодія описується тільки законом збереження імпульсу; кінетична енергія не зберігається, бо певна її частина витрачається на роботу проти сил, які не є механічними. Але іноді і в таких задачах можна застосовувати закон збереження механічної енергії. Продемонструємо це на наступному прикладі.

Дано: Куля масою m, яка летіла горизонтально, влучила в тіло маси M>>m, яке висіло на мотузках довжиною l та застрягла у ньому. Після абсолютно непружної взаємодії мотузки

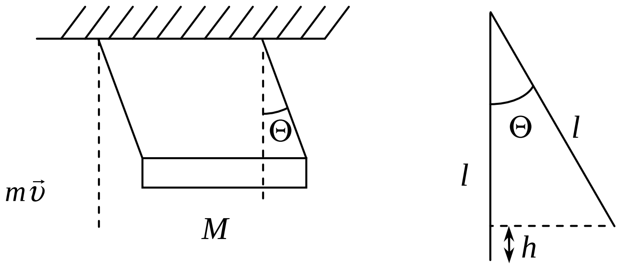

Рис. 3.6. До задачі 2

відхилились на максимальний кут Θ (рис. 3.6). Силами тертя та опору повітря знехтувати.

Знайти:

а). Швидкість кулі υ перед тим, як вона застрягла.

б). Частку кінетичної енергії кулі, яку вона втратила через непружне зіткнення.

Розв`язання:

Дана система не є замкненою, бо на тіло, що висить, діють сила тяжіння та натягу мотузки. Але вважаємо, що зіткнення відбулося миттєво, тому в горизонтальному напрямку зовнішні сили не діють. Це дає підставу застосовувати закон збереження імпульсу в проекції на горизонтальний напрямок. До того ж, зіткнення є лобовим: швидкість механічної системи тіло плюс куля одразу після зіткнення співпадає за напрямком із первісним напрямком руху кулі, тобто є горизонтальною, $\vec{\upsilon}\,||\,\vec{u}$, тому символи вектора в записі закону збереження імпульсу опустимо:

$$m\upsilon=(m+M)u\,. \tag{3.52}$$

Звідси можна знайти зв'язок швидкості кулі перед зіткненням υ та швидкості u складного тіла $M+m$ одразу після зіткнення:

$$\upsilon=u(M+m)/m. \tag{3.53}$$

При абсолютно непружному зіткненні кінетична енергія не зберігається. Проте в цій задачі існує проміжок часу, коли

зберігається повна механічна енергія. Цей проміжок часу відповідає руху новоутвореного тіла маси $M+m$, в процесі якого воно витратило свою початкову кінетичну енергію $K_1=(m+M)u^2/2$ на роботу проти сил тяжіння та піднялося внаслідок цього на висоту h. Закон збереження повної механічної енергії можна застосовувати у даному випадку, оскільки сила натягу мотузки не виконує роботу (вектор цієї сили є перпендикулярним до вектора переміщення), а сила тяжіння є потенціальною. Отже, тіло маси $M+m$ піднімається в полі сил тяжіння на висоту h:

$$h=l-l\cos\Theta=2l\sin^2(\Theta/2)\,. \tag{3.54}$$

Запишемо закон збереження повної механічної енергії для цього руху:

$$(m+M)u^2/2=(m+M)gh;\;\; u=\sqrt{2gh}=2\sin(\Theta/2)\sqrt{gl}\,. \tag{3.55}$$

Підставимо вираз (3.55) для початкової скорості u руху складного тіла до рівняння (3.53) та знайдемо швидкість кулі перед зіткненням:

$$\upsilon=2\sqrt{gl}\cdot(m+M)\sin(\Theta/2)/m\approx 2M\sqrt{gl}\,\sin(\Theta/2)/m. \tag{3.56}$$

Кількість втраченої кінетичної енергії визначається як різниця початкової та кінцевої, $\Delta K=K_0-K_1=m\upsilon^2/2-(m+M)u^2/2$:

$$\Delta K=2gl(m+M)^2\sin^2(\Theta/2)/m-(m+M)2gl\sin^2(\Theta/2)=$$

$$=2gl(M^2+mM)\sin^2(\Theta/2)/m\,. \tag{3.57}$$

Відносна частка втраченої кінетичної енергії визначається як частка втраченої до початкової:

$$\frac{\Delta K}{K_0}=1-\frac{K_1}{K_0}=1-\frac{(m+M)u^2}{m\upsilon^2}=\frac{M}{m+M}\,. \tag{3.58}$$

За умов задачі маса кулі є малою: $m<<M$. Отже, маємо можливість спростити вираз (3.58):

$$\frac{\Delta K}{K_0} = \frac{1}{1+m/M} \approx 1 - \frac{m}{M} \approx 1. \qquad (3.59)$$

Тобто, коли легка куля застряє у важкій мішені, то майже вся її кінетична енергія витрачається на утворення отвору в мішені, різні дисипативні процеси, генерацію звуку тощо.

3.6. Розсіяння частинок

Коли в параграфі 3.4 було дано визначення пружному зіткненню, то було відзначено, що це – ідеалізована модель взаємодії, коли нехтують втратами механічної енергії під час зіткнення. При цьому було зазначено, що пружні зіткнення відіграють важливу роль в атомній фізиці. Це пов’язано з тим що в мікросвіті взаємодія між мікрочастинками відбувається за квантовими законами: частинки при взаємодії не можуть передавати одна одній енергією скільки завгодно малими порціями. Тому можлива ситуація, коли кінетична енергія частинок, що взаємодіють, є малою для того, аби при зіткненні відбулися непружні процеси: переходи в інші електронні стани, переходи між коливальними та обертальними станами молекул, хімічні реакції, іонізація атомів та молекул, дисоціація молекул, перезарядка іонів, прилипання електронів до молекул… Тоді непружні процеси не відбуваються, і зіткнення відбувається із точним збереженням кінетичної енергії, тобто пружно. З цієї точки зору теорія пружних зіткнень є застосовною для дослідження взаємодії елементарних частинок.

Однією з задач експериментальної ядерної фізики є дослідження властивостей атомних ядер. Для цього на розсіюючий центр (мішень, властивості якої досліджують) пускають пучок частинок, властивості яких є відомими.

Підготовка пучка є окремою складною інженерною задачею. Ми тут припускаємо, що на великій відстані від мішені усі частинки пучка рухаються з однаковими швидкостями $\vec{\upsilon}_\infty$ (рис. 3.7). При

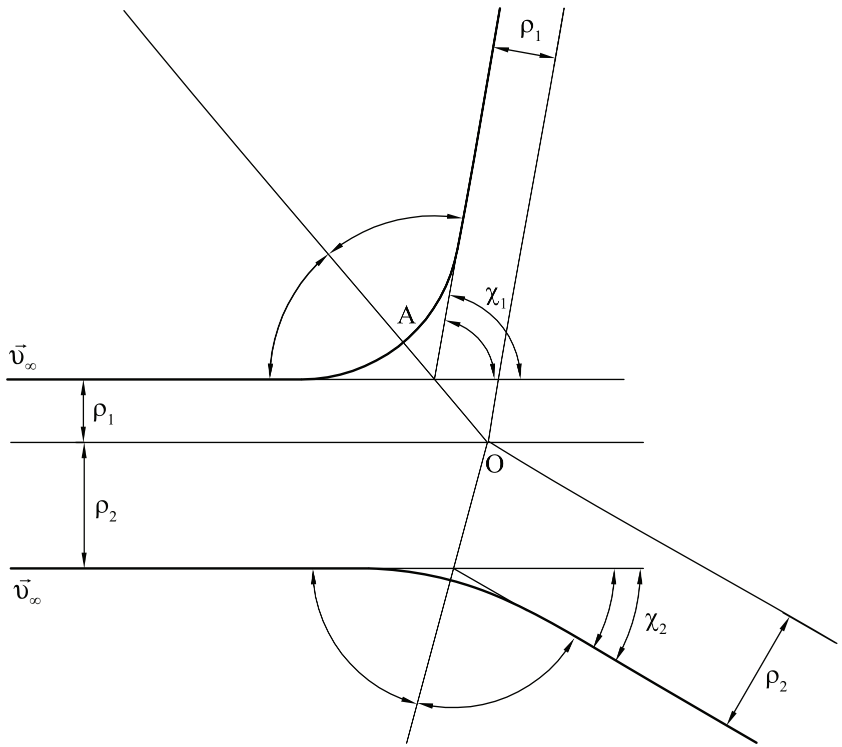

Рис. 3.7. До визначення прицільного параметра та кута розсіяння

цьому джерело частинок пучка формує пучок стаціонарно і так, що його густина n є однорідною не лише вздовж напрямку руху пучка, але у площині, що є перпендикулярною до $\vec{\upsilon}_\infty$. Абсолютна величина швидкості частинок пучка $|\vec{\upsilon}_\infty|$ разом із потенціальною енергією взаємодії частинок із мішенню визначають найменшу відстань $|OA|$, на яку може наблизитись частинка пучка до силового центру. Для кожної частинки пучка існує своя **прицільна відстань** (параметр) ρ – це довжина перпендикуляра, який опущено з центру розсіяння O на напрям $\vec{\upsilon}_\infty$ або, що те саме, на пряму, вздовж якої рухалась частинка, вилетівши з джерела (тобто відстань, на якій частинка пролетіла б повз центр, якби вони не взаємодіяли). В залежності від величини ρ частинки розсіюються на різні кути χ (кут розсіяння – це кут між напрямками руху частинки задовго перед зіткненням із розсіюючим центром та після зіткнення).

Важливою характеристикою пучка є його інтенсивність, тобто кількість частинок, які пролітають за одиницю часу крізь одиницю площі поперечного перерізу пучка. Покажемо, що інтенсивність пучка (будь-якого пучка, не лише в задачі про розсіяння) дорівнює добутку густини n на швидкість υ. Поставимо на шляху пучка (рис. 3.8. а)) контур площею S перпендикулярно до напрямку руху пучка (рис. 3.8. б)). Оскільки всі частинки пучка рухаються з однаковими швидкостями, то крізь контур пролетять лише ті частинки, які рухаються всередині циліндричного об'єму, обмеженого променями, що є паралельними до напрямку руху частинок пучка та проходять крізь периметр контуру (рис. 3.8. в)). За одну секунду крізь контур пролетять не всі частинки, які рухаються всередині згаданого об'єму, а лише ті, які встигнуть долетіти до контуру за одну секунду, тобто, такі, що віддалені

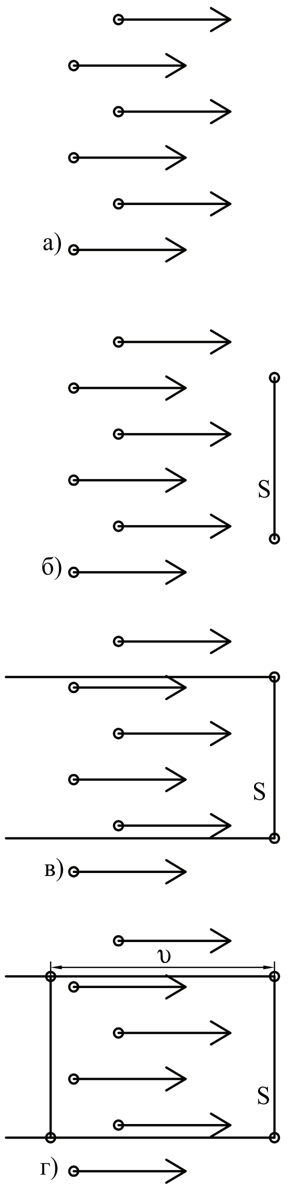

Рис. 3.8. До розрахунку інтенсивності пучка

від контуру не більше як на відстань $l=\upsilon\cdot 1$ с. Решта перетне контур пізніше, тому не беремо їх до уваги. Кількість частинок пучка всередині об'єму, що утворився, дорівнює добутку густини на об'єм: $N=n\cdot V=n\cdot(S\cdot l)=nS\upsilon$. Вираз для інтенсивності отримуємо, взявши до уваги, що для інтенсивності $S=1$ м^2: $j=n\upsilon$. За розмірністю $[j]=(1/\text{м}^3)(\text{м/с})=1/(\text{м}^2\text{с})$.

Характер взаємодії визначає залежність кута розсіяння від прицільного параметра $\chi(\rho)$. Цю залежність можна обернути, аби дістати залежність прицільного параметра від кута розсіяння $\rho(\chi)$. В експерименті визначають кількість dN частинок, які розсіюються в одиницю часу на кути, які лежать інтервалі між χ та $\chi+d\chi$, тобто вилетіли з джерела пучка з прицільними параметрами в інтервалі від $\rho(\chi)$ до $\rho(\chi)+d\rho(\chi)$. Однак величина dN є незручною для аналізу експериментальних даних, оскільки вона залежить від умов експерименту, а саме $dN\propto j$. Тому вводять частку $d\sigma\equiv dN/j$. За розмірністю $[d\sigma]$ – це площа, яку і називають ефективним диференціальним перерізом розсіяння. Він однозначно визначається виглядом поля, яке розсіює пучок, та є найважливішою характеристикою процесу розсіяння.

З іншого боку кількість частинок dN, які летять з прицільними параметрами з інтервалу $[\rho(\chi), \rho(\chi)+ d\rho(\chi)]$, можна порахувати як добуток інтенсивності пучка j на площу dS кільця радіусом ρ та товщиною $d\rho$:

$$dN=jdS=n\upsilon_x(2\pi\rho d\rho)\Rightarrow d\sigma=2\pi\rho d\rho=2\pi\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\chi. \quad (3.60)$$

Що більший прицільний параметр ρ, то на менший кут χ відхиляється частинка від свого первісного напрямку руху внаслідок розсіяння. Тому похідна $d\rho/d\chi$ є від'ємною – це пояснює використання модуля похідної, при цьому ми вважаємо, що кут розсіяння χ відраховується від нуля до π, тобто диференціал $d\chi$ є додатним.

До повного перерізу $\sigma_{еф}=\int d\sigma$ внесок дають лише ті частинки, що розсіялись. Частинки, які летять із достатньо великим прицільним параметром $\rho \geq \rho_{еф}$, не взаємодіють із мішенню, і їхнього розсіяння не відбувається. Тому повний ефективний переріз розсіяння можна порахувати так:

$$\sigma_{еф}=\int_0^{\rho_{еф}} 2\pi\rho d\rho=\pi\rho_{еф}^2. \qquad (3.61)$$

З цього видно фізичний зміст як ефективного перерізу, так і $\rho_{еф}$.

Зауважимо без обґрунтування, що ми розглядали задачу в системі центру інерції – лише в ній розсіяння частинок на мішені можна розглядати як рух частинки в центральному полі.

Застосування прикметника «ефективний» по відношенню до перерізу розсіяння обумовлено тим, що, наприклад, молекули газів, які можуть бути використані в якості мішені, часто є двоатомними, тобто напевне не мають сферичної симетрії. Тим не менш, в задачах розсіяння мішень уявляють як абсолютно тверду кульку, на якій відбувається пружне розсіяння – ефективний переріз σ грає роль площі поперечного перерізу цієї кульки. Тобто ефективний переріз σ є класичною характеристикою квантово-механічного об'єкту.

Розглянемо задачу про пружне розсіяння класичних маленьких кульок на абсолютно твердій кулі скінченного радіусу a. Її можна розв'язати до кінця в межах класичної механіки. При її аналізі скористаємося введеними поняттями «прицільний параметр», «кут розсіяння», «ефективний переріз розсіяння»… Перед зіткненням кульки рухаються вільно. Впливом сили тяжіння нехтуємо, тобто, вважаємо, що кульки рухаються горизонтально. Всередину кульки радіусу a малі кульки не проникають. Для пружної взаємодії кут падіння дорівнює куту відбивання, тому кут розсіяння дорівнює $\chi=\pi-2\varphi$ (рис. 3.9). Прицільний параметр у прямокутному трикутнику OAB пов'язаний із радіусом кулі a тригонометричним співвідношенням, $\rho=a\sin\varphi=a\sin\frac{\pi-\chi}{2}= =a\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\chi}{2}\right)=a\cos\frac{\chi}{2}$.

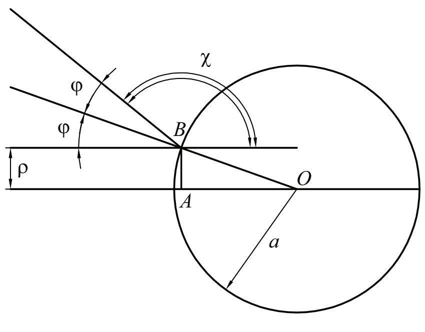

Рис. 3.9. До задачі про класичне пружне розсіяння

Звідси ми можемо знайти явний вигляд виразу для похідної: $\frac{d\rho}{d\chi}=-a\sin\frac{\chi}{2}\times\frac{1}{2}$. Отже, ефективний диференціальний переріз розсіяння дорівнює

$$d\sigma=2\pi a\cos\frac{\chi}{2}\,\frac{a}{2}\sin\frac{\chi}{2}d\chi=\frac{\pi a^2}{2}\sin\chi d\chi. \qquad (3.62)$$

Скористаємось тут поняттям про тілесний кут[5]. Оскільки тілесний кут між конусами з кутами розхилу χ та $\chi+d\chi$ дорівнює $dо=2\pi\sin\chi d\chi$, то

$$d\sigma=\frac{a^2}{4}dо. \qquad (3.63)$$

Тобто, диференціальний переріз розсіяння є пропорційним до тілесного кута та не залежить від напрямку, в який спрямовано цей тілесний кут. Іншими словами, куди б не був спрямований тілесний кут $dо$, до нього розсіюється одна й та сама кількість

[5] тілесний кут – це частина простору, яка є об'єднанням усіх променів, які виходять з даної точки (вершини кута) та перетинають певну поверхню (про цю поверхню кажуть, що вона стягує тілесний кут). Межею тілесного кута є деяка конічна поверхня. Тілесний кут вимірюється часткою площі S тієї частини сфери з центром у вершині кута, яка вирізається цим тілесним кутом, до квадрата радіуса сфери R: $о=S/R^2$. Одиницею вимірювання тілесного кута в системі СІ є стерадіан – він дорівнює тілесному куту, який вирізає на сфері радіусу r поверхню площею r^2. Повна сфера утворює тілесний кут, що дорівнює 4π стерадіан (повний тілесний кут).

частинок пучка за одиницю часу. У цьому випадку кажуть, що розсіяння є ізотропним.

Повний ефективний переріз пружного розсіяння маленьких кульок на кульці радіусу *a* дорівнює

$$\sigma=\int_{0}^{4\pi}\frac{a^2}{4}\,do=\frac{a^2}{4}\,4\pi=\pi a^2. \qquad (3.64)$$

Цей результат є передбачуваним, він має простий фізичний зміст: щоб бути розсіяною, частинка має влучити до площі перерізу кулі радіусу *a*.

Питання для самоконтролю до розділу 3. Рух системи матеріальних точок

1. Як визначається центр інерції системи матеріальних точок?
2. Записати закон руху центра інерції.
3. Який рух називають реактивним?
4. Яку величину називають реактивною силою?
5. Як визначається робота сили при елементарному переміщенні?
6. Сформулюйте закон збереження кінетичної енергії.
7. Яке зіткнення називається абсолютно непружним?
8. Яке зіткнення називається пружним?
9. Яке зіткнення називається лобовим (центральним)?
10. Що таке прицільний параметр?
11. Що таке кут розсіяння?
12. Що таке інтенсивність пучка?
13. Який фізичний зміст ефективного перерізу розсіяння?

4. Силове поле

Силове поле – це область простору, де в кожен момент часу для кожної точки простору є відомою сила, що діє на фізичне тіло, яке знаходиться в цій точці простору. Під словами «відома сила» слід розуміти, що відомі як модуль сили, так і її напрямок в обраній системі відліку. Наведемо порівняльну таблицю тих взаємодій, які відомі людству на теперішній час.

№	Назва взаємодії	Закон взаємодії	Порівняльна константа зв’язку	Відстань
1	Гравіта-ційна	$\vec{F}=-\vec{e}_r G\frac{m_1 m_2}{r^2}$	10^{-39}	Необмежена
2	Електро-магнітна	$\vec{F}=\vec{e}_r k_1\frac{q_1 q_2}{r^2}+k_2 q_1\left[\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right]$	1/137	Необмежена
3	Слабка	Відповідає за радіоактивність атомів	10^{-12}	10^{-12} см
4	Сильна	Відбувається між нуклонами у ядрах	1	10^{-13} см

Тут G – гравітаційна стала, її величину наведено у Розділі 3, $m_{1,2}$ – маси взаємодіючих матеріальних точок, r – відстань між матеріальними точками, q_1 – електричний заряд досліджуваної частинки, q_2 – електричний заряд частинки, у полі якої знаходиться досліджувана частинка, $\vec{\upsilon}$ – швидкість руху досліджуваної частинки, $\vec{B}$ – індукція зовнішнього магнітного поля, в якому відбувається цей рух, $k_{1,2}$ – константи, їхні величини залежать від обраної системи одиниць.

4.1. Класифікація сил

Існують сили, що мають силове поле, та такі, що його не мають. Силового поля не мають сили тертя, опору та Лоренца[6], бо вони залежать від напрямку руху. При цьому дві останні сили залежать ще й від модуля швидкості. Взагалі, сила тертя має електромагнітну природу, але в рамках класичної механіки її описують феноменологічно, спираючись на експериментальні дані.

Серед сил, що мають силове поле, в механіці важливу роль відіграють центральні сили, назва яких пов'язана з їхнім напрямком у просторі. Центральною називають силу, що спрямована до певної точки у просторі (цю точку називають центром сил або силовим центром). Величина центральної сили залежить тільки від відстані між силовим центром та точкою простору, де розташовано механічний об'єкт, на який діє сила. У загальному вигляді центральну силу $\vec{F}(\vec{r})$ можна записати так: $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$. Тут r – це відстань до силового центру, $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ – це одиничний вектор, який має радіальний напрямок. Добре відомим зі шкільного курсу фізики прикладом центральної сили є сила тяжіння.

Якщо робота певної сили по пересуванню матеріальної точки з довільного початкового положення у довільне кінцеве положення не залежить від траєкторії переходу між цими положеннями, а визначається виключно координатами початкового та кінцевого положень, то таку силу звуть потенціальною (або консервативною; у нашому курсі ми розглядаємо стаціонарні поля, тобто такі, які в заданій точці простору не змінюються з часом; для стаціонарних полів різниці між потенціальними та консервативним силами немає).

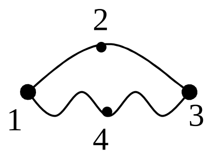

Рис. 4.1. До визначення консервативної сили

[6] Лоренц (Lorentz) Гендрік Антон (1853-1928) – голандський фізик. Він сформулював самоузгоджену теорію електрики, магнетизму і світла. Розробив електродинаміку рухомих середовищ. Вивів перетворення, названі його іменем. Лауреат нобелівської премії з фізики (1902, спільно з П. Зеєманом). Він був почесним доктором Паризького та Кембріджського університетів, членом Лондонського королівського та Німецького фізичного товариств. Нагороджений медалями Коплі та Румфорда.

Сила тяжіння та усі інші центральні сили є потенціальними. Покажемо це. Робота центральної сили при переміщенні матеріальної точки з початкової точки $\vec{r}_1$ до кінцевої точки $\vec{r}_2$ дорівнює:

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} f(r) \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r}. \qquad (4.1)$$

Скористаємося тут тотожністю, яка, на перший погляд, виглядає очевидною, але насправді має бути доведеною: $\vec{r} d\vec{r} \equiv r dr$. Вона означає, що скалярний добуток радіус-вектора на переміщення дорівнює алгебраїчному добутку відстані до силового центру на приріст цієї відстані. Для цього згадаємо визначення скалярного добутку: $\vec{r} \cdot \vec{r} \equiv rr\,cos(\angle \vec{r}, \vec{r}) = rr$. Продиференціюємо цю рівність: $2\vec{r} \cdot d\vec{r} = 2rdr$, звідки дістаємо очікуване: $\vec{r} \cdot d\vec{r} = rdr$. Тоді робота $A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} f(r) \frac{rdr}{r} = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr$, тобто є площею криволінійної трапеції – вона не залежить траєкторії, якою тіло переміщувалось із точки $\vec{r}_1$ до точки $\vec{r}_2$, а визначається лише нижньою та верхньою межами інтегрування, тобто відстанями r_1 і r_2. Це і означає, що центральні поля є підмножиною потенціальних полів.

Потенціальні поля мають важливу властивість – їхня робота вздовж замкненої траєкторії дорівнює нулю, покажемо це. Оскільки робота потенціальних сил за визначенням не залежить від траєкторії, то $A_{123} = A_{143}$ (див. рис. 4.1):

$$\int\limits_{1\to2\to3} \vec{F}\, d\vec{r} = \int\limits_{1\to4\to3} \vec{F}\, d\vec{r}\,. \qquad (4.2)$$

Перенесемо A_{143} до лівої частини:

$$\int\limits_{1\to2\to3} \vec{F}\, d\vec{r} - \int\limits_{1\to4\to3} \vec{F}\, d\vec{r} = 0\,. \qquad (4.3)$$

Змінимо напрямок інтегрування в другому інтегралі на протилежний, при цьому зміниться знак перед інтегралом, оскільки $d\vec{r}_{1\to2\to3} = -d\vec{r}_{3\to2\to1}$:

$$\int\limits_{1\to2\to3} \vec{F} d\vec{r} + \int\limits_{3\to4\to1} \vec{F}\, d\vec{r} = 0\,. \qquad (4.4)$$

Траєкторія руху 1→2→3→4→1 являє собою замкнену криву. Отже, робота потенціальної сили вздовж замкненого контуру дорівнює нулю:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0\,. \qquad (4.5)$$

У механіці також досліджують неконсервативні сили (або непотенціальні), зокрема, це дисипативні та гіроскопічні сили. **Дисипативними** називають сили, повна робота яких у замкненій системі завжди є від’ємною при будь-яких рухах, бо вони перетворюють механічну енергію в інші типи енергії. **Гіроскопічні** сили не виконують жодної роботи над тілами, бо вони спрямовані перпендикулярно до швидкості руху тіл, $\vec{F} \perp d\vec{r} = \vec{\upsilon} dt$. До таких, наприклад, належать: сила Коріоліса, яка діє у неінерціальних системах відліку; сила Лоренца (вивчається в електриці та магнетизмі), яка діє на заряджені частинки, що рухаються у зовнішньому магнітному полі; сила натягу нитки, на якій повішено математичний маятник; сила нормальної реакції, що діє з боку жолоба на кульку, яка котиться по ньому...

4.2. Потенціальна енергія

Властивості потенціальних сил дозволяють ввести поняття про потенціальну енергію *U*. **Потенціальною енергією** матеріальної точки у певному положенні називають роботу *A*, яку виконують потенціальні сили при переміщеннях цієї точки із зазначеного положення до спеціально обраного нульового положення (положення, в якому потенціальну енергію вважають такою, що дорівнює нулю). Зрозуміло, що значення *U* залежить від вибору цього нульового положення. Процедуру вибору нульового положення називають **нормуванням потенціальної енергії**.

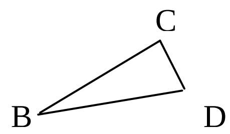

Рис. 4.2. До питання про визначення потенціальної енергії з точністю до константи

Потенціальна енергія *U* є лише функцією координат та, взагалі кажучи, визначається з точністю до константи (наявність якої пов’язана з необхідністю обрати вищезазначене «нульове положення»). Покажемо це. Визначимо потенціальну енергію в точці *C* (див. рис. 4.2) $U_1(C)$, прийнявши за нульове положення точку *B*, як роботу: $U_1(C)=A_{CB}$. А потім віднормуємо потенціальну енергію так, що $U_2(D)=0$. Тоді потенціальна енергія $U_2(C)=A_{CD}=A_{CB}+A_{BD}= U_1(C)+A_{BD}$. При цьому величина інтеграла A_{BD} не залежить від вибору точки *C*. Отже, потенціальна енергія в будь-якій точці простору $U(\vec{r})$ визначається з точністю до константи. Тому фізичний сенс має лише різниця ΔU між значеннями потенціальних енергій в різних точках простору, а не сама потенціальна енергія. При розв’язанні задач із застосуванням поняття про потенціальну енергію *U* слід від самого початку віднормувати її, і потім в межах цієї задачі суворо дотримуватися цього вибору нульового положення.

Еквіпотенціальними будемо називати **поверхні** рівної потенціальної енергії, в яких $U(\vec{r})=Const$. Переміщення уздовж еквіпотенціальної поверхні не змінює потенціальну енергію, отже при такому переміщенні консервативні сили роботу не виконують. Значить, потенціальні сили є перпендикулярними до еквіпотенціальних поверхонь.

Силовими лініями називають лінії, дотична до яких у кожній точці є паралельною до вектора сили. Густина силових ліній характеризує напруженість поля: що густіше розташовані силові лінії, то більша напруженість поля; що рідше розташовані силові лінії, то слабше поле. Силові лінії є перпендикулярними до еквіпотенціальних поверхонь.

Наприклад, для гравітаційних сил, якщо інше не визначено спеціально, зазвичай використовують таке нормування: вважають нульовою потенціальну енергію взаємодії двох матеріальних точок скінченної маси, які віддалено одну від одної на нескінченно велику відстань: $U(r\to\infty)\equiv 0$. Порахуємо потенціальну енергію гравітаційної взаємодії двох тіл масами M та m, які віддалені одне від одного на відстань r_1, скориставшись введеним визначенням її як роботи, яку належить виконати для пересування тіла m з точки, яку розташовано на відстані r_1 від силового центру, на нескінченність:

$$U(r_1)=A_{r_1,\infty}=\int_{r_1}^{\infty}\vec{F}d\vec{r}=-G\int_{r_1}^{\infty}\frac{mM\vec{r}}{r^3}d\vec{r}=G\,mM\int_{r_1}^{\infty}d\frac{1}{r}=-G\,\frac{Mm}{r_1}. \quad (4.6)$$

Тобто, потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох тіл масами M та m, які віддалені одне від одного на відстань r, дорівнює:

$$U(r)=U(r)-U(\infty)=A_{r,\infty}=-G\,Mm/r. \quad (4.7)$$

Саме така формула відома зі шкільного курсу. Тим самим ми показали, що введене визначення потенціальної енергії як криволінійного інтеграла у відомих випадках дає знайомі результати.

Для гравітаційних сил еквіпотенціальні поверхні – це концентричні сфери із центром у точці розташування маси, яка породжує це гравітаційне поле. Силові лінії у цьому випадку є прямими, що проходять крізь силовий центр. Ці лінії є

перпендикулярними до згаданих вище сфер. Біля силового центру силові лінії розташовані густіше – дійсно, там напруженість гравітаційного поля є більшою за абсолютним значенням, ніж далеко від силового центру.

4.3. Закон збереження повної механічної енергії

Повною механічною енергією називатимемо суму кінетичної та потенціальної енергій механічної системи. Сформулюємо закон збереження повної механічної енергії: **за умов дії консервативних сил та/або гіроскопічних сил повна механічна енергія системи матеріальних точок з часом залишається незмінною.** При цьому можуть відбуватися тільки перетворення потенціальної енергії у кінетичну та навпаки, але повний запас механічної енергії за таких умов не змінюється. Зазначимо: закон не просто стверджує, що енергія зберігається, а вказує на умови, коли це відбувається.

Доведемо закон збереження повної механічної енергії. Порахуємо роботу $A_{1,2}$ потенціальних сил при переміщенні матеріальної точки з точки $\vec{r}_1$ до точки $\vec{r}_2$:

$$A_{1,2}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}d\vec{r}==\int_{\vec{r}_1}^{O}\vec{F}d\vec{r}+\int_{O}^{\vec{r}_2}\vec{F}d\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{O}\vec{F}d\vec{r}-\int_{\vec{r}_2}^{O}\vec{F}d\vec{r}=U(\vec{r}_1)-U(\vec{r}_2)\equiv U_1-U_2. \quad (4.8)$$

Тут нами використано точку O як таку, в якій потенціальна енергія дорівнює нулю. Ця робота дорівнює різниці потенціальної енергії в точках $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$. Як було показано вище (див. формулу (3.27)), ця ж таки робота дорівнює різниці кінетичної енергії матеріальної точки в точках $\vec{r}_2$ і $\vec{r}_1$: $A_{1,2}=K_2-K_1$. Отже, $A_{1,2}=U_1-U_2=K_2-K_1$ або $K_1+U_1=K_2+U_2$, тобто повна енергія E механічної системи за умов дії консервативних та/або гіроскопічних сил із часом не змінюється:

$$E=K+U=const. \quad (4.9)$$

Нагадаємо, що, як і робота, механічна енергія вимірюється і обчислюється у Джоулях (в системі СІ).

4.4. Зв'язок потенціальної сили та потенціальної енергії

Як було введено у попередньому параграфі, потенціальну енергію, за визначенням, можна знайти за відомими розподілом потенціальної сили в просторі $\vec{F}(\vec{r})$, якщо задано умову нормування, наприклад, *U(O)*=0. Цей зв'язок виглядає в наступний спосіб:

$$U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{O} \vec{F} d\vec{r} . \tag{4.10}$$

Розв'яжемо тепер зворотну задачу. Визначімо потенціальну силу $\vec{F}(\vec{r})$ за відомим просторовим розподілом потенціальної енергії, $U(\vec{r})$. З математичної точки зору слід провести зворотну операцію до інтегрування, тобто продиференціювати вираз для потенціальної енергії за змінною верхньою межею $U(\vec{r}) = -\int_{O}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r}$, бо похідна від інтегралу саме за верхньою межею дорівнює підінтегральній функції:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}} . \tag{4.11}$$

Це, в принципі, і є відповідь на наше питання. Однак, ця відповідь містить вектор у знаменнику, до того ж, досі ми не визначали, як практично брати такі похідні. Тобто, вираз (4.11) потребує наповнення фізичним змістом.

Тому дійдемо того самого висновку більш послідовно. Нехай $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ – це дві безкінечно близькі точки, $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$, настільки, що сила $\vec{F}(\vec{r})$ слабко змінюється при переході від $\vec{r}_1$ до $\vec{r}_2$. Тоді порахуємо різницю потенціальних енергій між цими точками: $U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$. За визначенням диференціала, $U(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}) - U(\vec{r}_1) = dU$. Оскільки точки $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ обрано безкінечно близькими, $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\, d\vec{r} \approx \vec{F} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F} \Delta\vec{r}$. Оберемо для визначеності декартову систему координат, тобто вважатимемо, що нам відома залежність $U = U(x, y, z)$. Тоді для диференціала потенціальної енергії маємо:

$$dU = -\vec{F} d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz . \tag{4.12}$$

Припустимо спочатку, що траєкторія, вздовж якої відбулося переміщення $\Delta\vec{r}$, є паралельною до осі *x*: *y=const*, *z=const*, $d\vec{r} = \vec{e}_x dx$ (тут $\vec{e}_x$ – це орт осі *X*). У цьому випадку зміна потенціальної енергії

$$dU_{y,z} = -F_x dx; \Rightarrow F_x = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_{y,z} \equiv -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right). \tag{4.13}$$

Запис $\frac{\partial U}{\partial x}$ означає, що похідну від функції $U = U(x, y, z)$ взято за змінною *x* за умови, що решта змінних: *y* і *z*, – вважалися сталими. В математиці такі похідні називають частинними.

Аналогічно дістаємо проекції потенціальної сили на решту осей: $F_y = -\partial U / \partial y$, $F_z = -\partial U / \partial z$. Скористаємося оператором Гамільтона[7]: $\vec{\nabla} = \vec{i}\partial / \partial x + \vec{j}\partial / \partial y + \vec{k}\partial / \partial z$, тоді:

[7] Сер Гамільтон (Hamilton) Вільям Ровен (1806-1865) – ірландський і один з найбільших світових математиків XIX століття. Зробив внески в алгебру, теорію диференціальних рівнянь, фізику, астрономію, оптику, динаміку. Гамільтону належить введення до механіки особливого наочного прийому зображення змін величин і напрямів швидкості

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -gradU(\vec{r}). \qquad (4.14)$$

У разі, коли оператор Гамільтона застосований до скалярної функції, як це має місце в формулі (4.10), його прийнято називати «градієнт» і позначати в наступний спосіб: $\vec{F} = -gradU(\vec{r})$. (В диференціальній геометрії векторний оператор Гамільтона $\vec{\nabla}$ застосовують як до скалярної функції, так і до векторних, але це виходить за межі нашого курсу.) Градієнт скалярної величини – це є вектор, що його спрямовано перпендикулярно до еквіпотенціальної поверхні у бік зростання даної функції. Величина градієнта дорівнює похідній від даної функції вздовж нормалі до цієї еквіпотенціальної поверхні.

4.5. Просторові межі механічного руху

Як було показано вище, якщо у механічній системі відсутні дисипативні та неконсервативні сили, тоді зберігається сума кінетичної та потенціальної енергій: $K+U\equiv E=const$. Оскільки за визначенням кінетична енергія не може бути від'ємною величиною: $K\geq 0$, то для потенціальної енергії та повної енергії E механічної системи виконується нерівність: $U\leq E$. Це означає, що можливими координатами механічних об'єктів, що входять до системи, є лише такі, для яких виконується нерівність $U(\vec{r})\leq E$. Іншими словами, класична механічна система не може перебувати у тій частині простору, де потенціальна енергія є більшою за повну енергію.

Розглянемо для прикладу одновимірний випадок $U=U(x)$. Намалюємо цю залежність, позначивши $minU=U_0$ (див. рис. 4.3). Нерівність $U(\vec{r})\leq E$ означає, що повна енергія

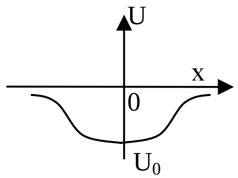

Рис. 4.3. До визначення фінітного та інфінітного рухів

точки, що здійснює який-небудь прямо- або криволінійний рух, а саме –годографа. Гамільтон поклав початок ученню про кватерніони.

системи має бути більшою за U_0. Тобто ситуація $E<U_0$ взагалі є неможливою. Для випадку, що відповідає рис. 4.3, механічний рух із значенням повної енергії $E<0$ відбувається в обмеженій частині простору і тому називається **фінітним**, а при $E\geq 0$ рух стає **інфінітним**: матеріальна точка з додатною повною механічною енергією в такому потенціальному полі може мати будь-які значення координати.

Розглянемо інший приклад залежності $U(x)$, наведений на рис. 4.4. На ньому позначено різні характерні області механічного руху. Для значення повної енергії $E = E_1$ області простору, які позначено I, II та IV, є неможливими. Область простору, що містить максимум потенціальної енергії, називають **потенціальним бар'єром.** Наприклад, для графіка потенціальної енергії, який наведено на рис. 4.4., наявні два потенціальні бар'єри: ліворуч та праворуч від точки M. В області III для $E = E_1$ реалізується фінітний рух. Область простору, яка містить мінімум потенціальної енергії, називають **потенціальною ямою**. AMB називається потенціальною ямою. Для наведеної на рис. 4.4. залежності $U(x)$ потенціальною ямою є частина графіка ліворуч від точки N. В області V для $E=E_1$ механічний рух є інфінітним. А для більшого значення повної енергії $E=E_2$ система не може перебувати тільки в області I, тобто їй доступна безкінечна частина простору, тому у випадку повної механічної енергії $E=E_2$ рух механічної системи є інфінітним.

На рис. 4.4 є дві точки координатного простору, для яких

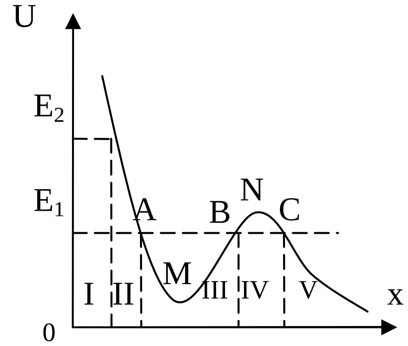

Рис. 4.4. До визначення потенціальної ями та потенціального бар'єру

$\vec{F}=0$. Це точки: N – на вершині потенціального бар'єру та M – на дні потенціальної ями. Ці точки відповідають стану рівноваги. В точці N реалізується стан нестійкої рівноваги. Це пояснюється наступним. Якщо механічну систему вивести з цього стану трохи праворуч, то на графіку спостерігатиметься від'ємна похідна, $dU/dx<0$. Тобто на систему в цьому випадку діятиме додатна сила, $F=-\ dU/dx>0$. Ця додатна сила штовхатиме систему праворуч, тобто подалі від положення рівноваги. Якщо ж механічну систему вивести з точки N трохи ліворуч, то там спостерігається зростання функції $U(x)$, отже похідна $dU/dx>0$. І на систему діятиме від'ємна сила, $F=-dU/dx<0$, яка штовхатиме систему ще далі ліворуч, знову таки, подалі від положення рівноваги. Тобто максимум на графіку потенціальної енергії – це положення нестійкої рівноваги.

У точці M, навпаки, рівновага є стійкою. Праворуч від неї силу направлено ліворуч, так, що сила штовхає систему до положення рівноваги. Ліворуч від точки M сила діє праворуч, тобто так само намагається повернути систему до положення рівноваги.

Механічну силу, за визначенням, усюди направлено в такий спосіб, щоб направити матеріальну точку до потенціальної ями (в області праворуч від точки N дно потенціальної ями розташовано на нескінченності).

На рис. 4.5 зображено залежність $U(r)$ для випадку гравітаційних сил. При цьому силу притягування спрямовано до силового центру, точки $r=0$. Зазначимо, що механічна система завжди прагне до стану з мінімумом потенціальної енергії, що

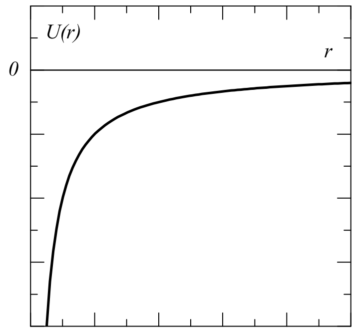

Рис. 4.5. Залежність потенціальної енергії гравітаційної взаємодії від відстані між тілами

відображає характер взаємодії складових частин системи. Це саме правило є справедливим і по відношенню до внутрішньої енергії будь-якої складної механічної системи. Сформулюємо умову стабільності складної системи. Якщо внутрішня енергія механічної системи є більшою за внутрішню енергію її складових частин, то така система є нестійкою: з якихось причин вона може існувати як єдине ціле, але будь-яке невелике збурення призведе до розпаду складної системи на окремі складові. І навпаки, якщо сума внутрішніх енергій складових системи, коли вони снують окремо, є більшою за внутрішню енергію складної системи (тобто, коли система є єдиним цілим), така механічна система є стійкою: вона стабільно існує як єдине ціле. Якщо ж із якихось причин така система розпадеться, то будь-яке невелике збурення спричинить об'єднання компонентів у єдине ціле.

Аналізуючи рис. 4.5, можна визначити умови фінітного та інфінітного рухів у гравітаційному полі. Якщо повна механічна енергія системи є від'ємною, $E<0$, то рух є обмеженим. З астрономії відомо, що таким є рух планет навколо Сонця, який відбувається вздовж еліптичних орбіт. Якщо $E\geq 0$, тоді рух є необмеженим. Траєкторії руху в цьому випадку – це параболи та гіперболи. Таким є, наприклад, рух комет.

4.6. Закон збереження моменту імпульсу

Називатимемо моментом імпульсу матеріальної точки $\vec{\mathcal{L}}$ та моментом сили $\vec{\mathcal{M}}$, відповідно, наступні величини, які визначаються через векторні добутки:

$$\vec{\mathcal{L}}=[\vec{r},\vec{p}]; \qquad \vec{\mathcal{M}}=\left[\vec{r},\vec{F}\right]. \qquad (1.4.11)$$

Тут $\vec{r}$ – це вектор, який проведено з точки, відносно якої обраховують моменти. За визначенням векторного добутку момент імпульсу направлено перпендикулярно до вектора $\vec{r}$ та імпульсу матеріальної точки, і момент сили є перпендикулярним до $\vec{r}$ і вектора сили. Для розрахунку модуля моменту імпульсу зручно використовувати поняття про плече імпульсу l_p – це є відстань від початку вектора $\vec{r}$ до лінії, вздовж якої рухається матеріальна точка, $\Lambda = l_p p$, тобто, модуль моменту імпульсу дорівнює добутку модуля імпульсу на плече імпульсу (рис. 4.6). Для обрахунку модуля моменту сили зручно використовувати поняття про плече сили l_f – це відстань від початку вектора $\vec{r}$ до лінії, вздовж якої діє сила. Тоді модуль моменту сили дорівнює добутку модуля сили на плече сили, $m = Fl_f$.

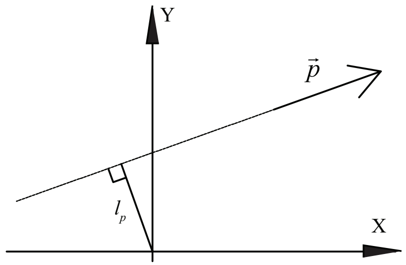

Рис. 4.6. До визначення плеча імпульсу

Доведемо, що між сумарним моментом сили $\vec{m}$, що діє на механічну систему, та моментом імпульсу $\vec{\mathcal{L}}$ цієї системи існує зв'язок: $d\vec{\mathcal{L}}\ /dt = \Sigma\vec{m}$, який є аналогічним до зв'язку між силою та імпульсом, що є добре відомим з другого закону Ньютона, $d\vec{p}\,/\,dt = \Sigma\vec{F}$. Обчислимо вираз для похідної від моменту імпульсу матеріальної точки за часом, користуючись правилом диференціювання добутку:

$$d\vec{\mathcal{L}}_i\ /dt = \left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] + \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, \vec{p}_i\right]. \qquad (4.16)$$

Тут індекс «i» вказує на номер матеріальної точки. Другий доданок у здобутій сумі складають швидкість та імпульс матеріальної точки, які є колінеарними векторами, тому цей векторний добуток дорівнює нулю, $[d\vec{r}_i\,/\,dt, \vec{p}_i] = 0$. У першому доданку замінимо похідну від імпульсу за часом (згідно другого закону Ньютона) результуючою силою, яку прикладено до цієї матеріальної точки, $d\vec{\mathcal{L}}_i\ /dt = [\vec{r}_i, \vec{F}_{i\Sigma}] = \vec{m}_i$. Просумуємо здобутий зв'язок по всіх матеріальних точках механічної системи і

здобудемо задекларований вище результат:

$$d\vec{\mathcal{L}}\ /dt = \Sigma\vec{m}\ . \qquad (4.17)$$

Це рівняння дістало назву основного рівняння динаміки обертального руху. Рівняння (4.17) також називають рівнянням моментів.

Для замкненої або ізольованої (зовнішні сили відсутні або їхній результуючий момент дорівнює нулю, $\sum_j \vec{m}_j = 0$) механічної системи рівняння моментів (4.17) перетворюється в таке: $d\vec{\mathcal{L}}/dt = 0$. Тобто за цих умов момент імпульсу не змінюється з часом:

$$\vec{\mathcal{L}} = const\,. \qquad (4.18)$$

Отже, момент імпульсу ізольованої системи матеріальних точок не змінюється за будь-яких внутрішніх взаємодій, що відбуваються всередині системи. Це твердження становить зміст закону збереження моменту імпульсу. Якщо взяти до уваги аналогію між імпульсом та моментом імпульсу, то видно, що рівняння (4.18) є подібним до закону збереження імпульсу. Цікаво, що закон збереження моменту імпульсу виконується також у випадку дії центральних сил, бо для них $\vec{r}\,||\,\vec{F}$, і попри присутність при цьому зовнішніх сил моменти центральних сил внаслідок властивостей векторного добутку дорівнюють нулю, що призводить до рівняння $\vec{m} = 0$, а отже і до виконання закону (4.18).

Закон збереження моменту імпульсу носить векторний характер. Значить, можлива ситуація, коли зберігається тільки одна із складових вектора $\vec{\mathcal{L}}$. Наприклад, $d\mathcal{L}_x\,/\,dt = m_x$, $d\mathcal{L}_y\,/\,dt = m_y$, але при цьому проекція результуючого моменту сил на вісь $\vec{z}$ є нульовою, отже, $m_z = 0$.

Тоді $d\mathcal{L}_z / dt = 0$, і проекція моменту імпульсу на вісь $\vec{z}$ зберігається.

Це означає, що закон збереження моменту імпульсу можна використовувати також і для частково ізольованих механічних систем. Більше того, існують так задачі, коли результуючий момент сил може бути взагалі кажучи ненульовим, але при цьому можна знайти таку точку в просторі, відносно якої цей результуючий момент таки дорівнює нулю, тоді відносно цієї точки момент імпульсу зберігається.

4.7. Рух матеріальної точки у полі центральної сили

Для матеріальної точки, яка рухається в полі центральної сили за умов відсутності (нехтування) дисипації, виконується закон збереження механічної енергії, оскільки центральні поля є потенціальними. До того ж, як показано у попередньому підрозділі, для центральних сил векторний добуток $\vec{r} \times \vec{F} = 0$, отже, зберігається момент імпульсу $\vec{\mathcal{L}} = const$.

Збереження моменту імпульсу має два наступні важливі фізичні наслідки. По-перше, траєкторія руху матеріальної точки в полі центральних сил лежить в одній площині. Покажемо це. Нехай в момент часу *t* радіус-вектор $\vec{r}(t)$ і вектор швидкості $\vec{\upsilon}(t)$ належать певній площині *a*. Момент імпульсу $\vec{\mathcal{L}}(t)$, як векторний добуток радіус-вектора та імпульсу, в момент часу *t* є перпендикулярним до *a*. Переміщення матеріальної точки $d\vec{r}$, що сталося протягом проміжку часу *dt*, належить до тієї ж площини *a*, бо воно є паралельним до вектора швидкості, $d\vec{r} = \vec{\upsilon}(t)dt$. Тому радіус-вектор у наступний момент часу *t+dt* також належить до площини *a*, $\vec{r}(t+dt) = \vec{r}(t) + d\vec{r}$. Аби вектор моменту імпульсу $\vec{\mathcal{L}}$ був сталим, зокрема, незмінним за напрямком, тобто лишився перпендикулярним до площини *a* у наступний момент часу *t+dt*, вектор швидкості $\vec{\upsilon}(t+dt)$ також (як і радіус-вектор) має залишитись у площині *a* і у наступний момент часу. Ці міркування можна повторити по відношенню до

наступного (за моментом часу *t+dt*) моменту часу. Отже, радіус-вектор, що визначає положення матеріальної точки, у випадку руху матеріальної точки в полі центральної сили) залишається в площині *a* (тобто в площині, яка є перпендикулярною до моменту імпульсу $\vec{\mathcal{L}}$) назавжди.

Другий важливий наслідок збереження моменту імпульсу матеріальної точки, яка рухається в полі центральної сили, пов'язаний із його збереженням за модулем. Спочатку визначимося з вибором системи координат. Оскільки, як ми щойно показали, траєкторія матеріальної точки в полі центральної сили є плоскою фігурою, достатньо, аби ця система координат була двовимірною. Порахуємо модуль моменту імпульсу: $\left|\vec{\mathcal{L}}\right| = m\left|\left[\vec{r}, \vec{\upsilon}\right]\right| = mr\upsilon \sin\angle(\vec{r}, \vec{\upsilon})$. У цьому виразі один множник, *r*, – це проекція радіус-вектора на напрямок від силового центру, та інший множник, $\upsilon \sin\angle(\vec{r}, \vec{\upsilon})$, – це проекція вектора швидкості на напрямок, перпендикулярний до напрямку від силового центру. Наявність у здобутому виразі для модуля моменту імпульсу множників, які є компонентами радіус-вектора і швидкості саме в полярних координатах, дає нам пораду – надалі розглядати задачу в полярних координатах.

У цих координатах положення точки на площині визначається двома координатами: відстанню *r* від точки до початку координат і кутом φ між фіксованим напрямком і радіус-вектором:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{4.19}$$

Один із ортів полярної системи координат співпадає за напрямком із радіус-вектором, $\vec{e}_r = \vec{r}/r$, інший, $\vec{e}_\varphi$, є йому перпендикулярним (див. рис. 1.9):

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y, \ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y. \tag{4.20}$$

На відміну від декартової системи, орти якої $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ є незмінними за напрямком, напрямок ортів полярної системи координат у загальному випадку залежить від часу.

Для визначення модуля моменту імпульсу $\left|\vec{L}\right| = mr\upsilon \sin\angle(\vec{r}, \vec{\upsilon})$ нам належить визначити проекцію вектора швидкості на другий орт полярної системи координат $\upsilon_\varphi = \vec{\upsilon} \cdot \vec{e}_\varphi$. Нагадаємо, що в декартових координатах радіус-вектор та вектор швидкості дорівнюють:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y\,,\ \vec{\upsilon} = \vec{e}_x \frac{dx}{dt} + \vec{e}_y \frac{dy}{dt}\,. \qquad (4.21)$$

У полярних координатах маємо:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r\,,\ \vec{\upsilon} = \upsilon_r \vec{e}_r + \upsilon_\varphi \vec{e}_\varphi\,,\ \upsilon_r = \vec{\upsilon} \cdot \vec{e}_r\,. \qquad (4.22)$$

З'ясуємо фізичний зміст проекцій υ_r і υ_φ. Для цього розглянемо елементарне переміщення $d\vec{r}$ (див. рис. 4.7). На рис. 4.7 позначено: $\overrightarrow{OA}$ – це радіус-вектор у початковий момент часу, $\vec{r}(t)$; $\overrightarrow{AC}$ – це елементарне переміщення $d\vec{r}$; $\overrightarrow{OC}$ – це положення радіус-вектора у наступний момент часу, $\vec{r}(t+dt)$; за час dt радіус-вектор повертається на від'ємний кут $\angle BOC \equiv d\varphi$. Відрізок BC побудовано перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{OA}$. За визначенням

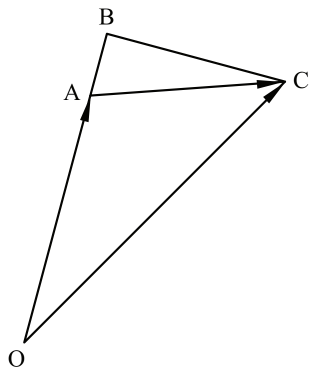

Рис. 4.7. До визначення компонентів швидкості в полярних координатах

добуток проекції υ_r на елементарний інтервал часу dt є проекцією $d\vec{r}$ на напрямок радіус-вектора, $AB=OB-OA$. Відстань OA – це довжина радіус-вектора в початковий момент часу, тобто $OA=r(t)$. З прямокутного трикутника OBC маємо: $OB=OC\cos(d\varphi)$. Тут OC – це відстань до початку координат у кінцевий момент часу, тобто $OC=r(t+dt)$. За визначенням диференціалу, $r(t+dt)= r(t)+dr$, де dr – це зміна відстані від початку координат до матеріальної точки, що відбулася протягом інтервалу dt. Косинус малого кута можна порахувати з точністю до малих доданків: $\cos(d\varphi)\approx 1+0.5(d\varphi)^2$. Зрештою, для відрізка OB маємо: $OB\approx(r(t)+dr)(1+0.5(d\varphi)^2)$, або відкинувши малі доданки вищого порядку, $OB\approx r(t)+dr$. Тоді для проекції AB дістаємо: $AB=OB-OA\approx r(t)+dr-r(t)=dr$. Отже, радіальна складова швидкості, υ_r, відповідає за віддалення матеріальної точки від початку координат, $\upsilon_r=dr/dt$.

За визначенням добуток проекції υ_φ на елементарний інтервал часу dt є проекцією $d\vec{r}$ на напрямок, перпендикулярний до радіус-вектора. З прямокутного трикутника OBC маємо: $BC=OC\sin(d\varphi)$. Для малих кутів $\sin(d\varphi)\approx d\varphi$, тому $BC\approx(r(t)+dr)\,d\varphi\approx r(t)d\varphi$. Отже, складова швидкості υ_φ призводить до повороту радіус-вектора $\vec{r}$ на кут $d\varphi$, $\upsilon_\varphi=rd\varphi/dt$.

Перевагою наведеного способу визначення явного вигляду проекцій υ_r і υ_φ у полярній системі координат є його наочність. Той самий результат можна здобути, порахувавши в декартових координатах скалярні добутки вектора швидкості, $\vec{\upsilon} = \vec{e}_x\, dx/dt + \vec{e}_y\, dy/dt$, на орти полярної системи координат, $\vec{e}_r = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y$, $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y$:

$$\upsilon_r = \vec{\upsilon}\cdot\vec{e}_r = \frac{dx}{dt}\frac{x}{r} + \frac{dy}{dt}\frac{y}{r} = \frac{d(x^2+y^2)}{2rdt} = \frac{1}{2r}\frac{dr^2}{dt} = \frac{dr}{dt}\,, \qquad (4.23)$$

$$\upsilon_\varphi = \vec{\upsilon}\cdot\vec{e}_\varphi = \frac{dx}{dt}\frac{-y}{r} + \frac{dy}{dt}\frac{x}{r} = \frac{1}{r}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) =$$