

інтеграл по всіх сферичних шарах від найменшого радіусу 0 до найбільшого радіусу  $R$ :

$$\theta = \int_V r^2 dm = \frac{m}{(4/3)\pi R^3} \int_0^R 4\pi r^4 dr = \frac{3m}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{3mR^2}{5}. \quad (6.37)$$

Враховуючи, що для кулі  $I_x = I_y = I_z \equiv I$ , з (6.34) дістаємо:

$$I = 2\theta/3 = (2/5)mR^2. \quad (6.38)$$

Цей результат природно збігається з (6.30), проте отримання формули (6.38) є набагато простішим, ніж формули (6.30).

9). Покажемо, як формула (6.34) дає можливість порахувати момент інерції сфери відносно осі, що проходить крізь центр мас. Для сфери момент інерції відносно її центру  $\theta = mR^2$ . Отже, момент інерції сфери відносно осі

$$I_x = I_y = I_z = 2\theta/3 = (2/3)mR^2. \quad (6.39)$$

Момент інерції сфери (6.39) відносно осі є більшим, ніж момент інерції кулі (6.38) тієї самої маси і того самого радіусу, бо в сфері елементарні маси якнайбільше віддалені від осі серед усіх сферично симетричних тіл.

Отже, поняття про момент інерції абсолютно твердого тіла відносно точки є зручним для розрахунків моментів інерції плоских та сферично симетричних твердих тіл.

### 6.3. Кочення абсолютно твердого тіла з похилої площини

Нехай абсолютно тверде тіло, що котиться, характеризується оберальною симетрією відносно його геометричної осі. При цьому воно не ковзає, тобто швидкість точки дотику, якою абсолютно тверде тіло спирається на похилу площину, дорівнює нулю. На рис. 6.12, який ілюструє задачу,  $A$  – це точка дотику,  $C$  – це точка центра мас,  $|AC|=r$  – радіус фігури. Задача полягає в тому, аби знайти прискорення центра

мас. Розв'яжемо цю задачу трьома різними способами.

*Спосіб перший.* Застосуємо рівняння моментів відносно миттєвої осі обертання для знаходження прискорення центру мас абсолютно твердого тіла. Як уже зазначено вище, миттєвою віссю обертання є точка  $A$ . Рух точки  $A$  відносно поверхні можна розглядати як суперпозицію двох рухів: поступального – вздовж

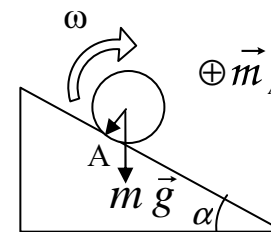


Рис. 6.12. Кочення тіла з похилої площини. Перший спосіб

похилої площини з тією самою швидкістю, з якою рухається і центр мас  $C$ , і обертального – навколо осі, що проходить крізь центр мас. Вектори швидкостей цих рухів є однаковими за модулем, але протилежними за напрямом.

За умов відсутності ковзання миттєва вісь та вісь, що проходить крізь центр мас, рухаються паралельно одна одній. Тоді рівняння моментів має досить просту форму запису:

$$I_A d\omega/dt = \mathcal{M}_A, \quad (6.40)$$

де  $I_A$  – момент інерції абсолютно твердого тіла відносно миттєвої осі обертання,  $\mathcal{M}_A$  – сумарний момент зовнішніх сил відносно тієї ж осі (див. рис. 6.12).

В даному випадку зовнішніми силами є сила тяжіння  $m\vec{g}$ , сила тертя  $\vec{F}_{тр}$  та сила нормальної реакції опори  $\vec{N}$ , що діє з боку похилої площини на абсолютно тверде тіло. Моменти сили тертя та сили нормальної реакції опори не входять до рівняння (6.40), тому що ці сили прикладено до точки  $A$ , і значить, їхні моменти відносно миттєвої осі дорівнюють нулю. Таким чином, вираз для моменту сил має вигляд:  $\mathcal{M}_A = mgr \sin \alpha$ , тоді рівняння (6.40) можна переписати так:

$$I_A d\omega/dt = mgr \sin \alpha. \quad (6.41)$$

Нехай  $V_C$  – це лінійна швидкість точки  $C$  відносно площини, тоді  $V_C = V_A + \omega r$ . А оскільки ковзання немає, то, як було вказано на початку цього параграфу, тоді й швидкість точки дотику відносно площини дорівнює нулю, отже,  $V_C = \omega r$ . Тому для лінійного прискорення центра мас маємо таке рівняння:  $a = dV_C / dt = r d\omega / dt$ . Тоді підставляючи його до рівняння (6.41), здобуємо явний вираз для прискорення:

$$a = mgr^2 \sin \alpha / I_A. \quad (6.42)$$

За теоремою Гюйгенса–Штейнера  $I_A = I_C + mr^2$ , тому з рівняння (6.42) здобуємо:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I_C / (mr^2)}. \quad (6.43)$$

Вираз (6.43) є правильним за розмірністю:  $[a]=[g]=m/c^2$ . У граничному випадку нульової інерції тіла відносно обертання,  $I_C=0$ , цей вираз збігається з відомим виразом для прискорення тіла, яке ковзає без тертя з похилої площини. Врахування інерції тіла відносно обертання збільшує знаменник в (6.43), тобто гальмує його рух. Знаменник в (6.43) за жодних умов (за жодних значень моменту інерції  $I_C$ , радіусу тіла  $r$  або його маси  $m$ ) не дорівнює нулю.

**Висновок:** знайдено прискорення, з яким котиться центр мас абсолютно твердого тіла. В цьому способі уникнено використання виразу для реакції опори та сили тертя, величина якої може бути невідомою з умов задачі.

*Спосіб другий.* Застосуємо рівняння моментів відносно осі, що проходить крізь центр мас, точку  $C$  (див. рис. 6.13). Такий вибір осі обертання не є оптимальним, бо в цьому разі доводиться використовувати не одне рівняння, а систему рівнянь, що складається не лише з рівняння моментів, а ще й з закону руху центру мас. Рівняння моментів відносно осі, що проходить крізь точку  $C$ , по формі нагадує рівняння (6.40), бо

обертальний момент у цьому випадку також створює одна сила – сила тертя:

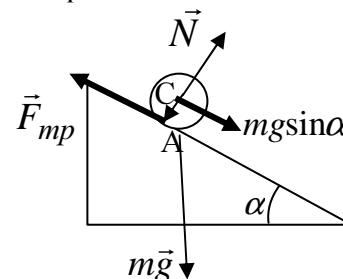


Рис. 6.13. Кочення тіла з похилої площини. Другий спосіб

$$I_C d\omega / dt = m_C. \quad (6.44)$$

Цікаво, що до рівняння (6.44) не входить сила тяжіння (попри те, що її складова  $mg \sin \alpha$  спонукає абсолютно тверде тіло до руху вздовж похилої площини), оскільки плече сили тяжіння відносно центру мас дорівнює нулю. Момент сили  $m_C$  також не

створюється силою нормальної реакції опори, оскільки її плече відносно центру мас також дорівнює нулю. У створенні моменту сил  $m_C$  бере участь лише сила тертя  $F_{mp}$ , яка є паралельною похилій площині та яку прикладено в точці  $A$ . Тоді з рівняння (6.44) маємо:

$$I_C d\omega / dt = r F_{mp}. \quad (6.45)$$

У цьому рівнянні невідомими є дві величини: сила тертя  $F_{mp}$  та кутове прискорення  $d\omega / dt$ . Тому слід залучити ще одне рівняння – закон руху центра мас даного абсолютно твердого тіла в проекції на напрямок його руху:

$$mdV / dt = mg \sin \alpha - F_{mp}. \quad (6.46)$$

Оскільки лінійне прискорення в лінійний спосіб пов'язано з кутовим прискоренням:  $a = dV_C / dt = r d\omega / dt$ , тоді з (6.45) отримуємо:

$$I_C a = r^2 F_{mp}. \quad (6.47)$$

Цікаво відзначити, що цей вираз сили тертя в даному випадку відрізняється від того, який є відомим ще з курсу фізики, що викладається в середній школі, бо там вивчався випадок тертя ковзання:  $F_{mp} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ , де  $\mu$  – це динамічний коефіцієнт тертя ковзання. А у цій задачі за умовою ковзання тіла по поверхні опори відсутнє, тому в даному випадку ми маємо справу з тертям кочення та тертям спокою. Коефіцієнт тертя кочення є набагато меншим за коефіцієнт тертя ковзання. Наприклад, для руху гумового колеса по асфальту коефіцієнт тертя кочення складає  $0,015 \div 0,018$ , тоді як коефіцієнт тертя ковзання становить  $0,5 \div 0,75$ . Тому тертям кочення, як правило, в задачах механіки нехтують. Сила тертя спокою не дорівнює, а є меншою за добуток коефіцієнта тертя ковзання на притискаючу силу,  $F_{mp} \leq \mu N$ , – її значення не визначається однозначно з цієї простої формули.

Підставимо вираз для  $F_{mp}$  з (6.46) до рівняння (6.47):

$$I_C a / r^2 = F_{mp} = mg \sin \alpha - ma. \quad (6.48)$$

Звідси легко здобути вираз для прискорення абсолютно твердого тіла, який збігається з (6.43):

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I_C / (mr^2)}. \quad (6.49)$$

**Висновок:** попередній результат підтверджено. Показано, що діюча сила тертя не є силою тертя ковзання. Використання рівняння моментів, що сформульовано для обертання навколо осі, яка проходить крізь центр мас, призводить до потреби у залученні ще й рівняння, яке описує рух центру мас, що деякою мірою ускладнює процес розв'язання задачі.

*Спосіб третій.* Цей спосіб пов'язано з використанням закону збереження повної механічної енергії, хоч це може видатися дивним на перший погляд. Бо, дійсно, у досліджуваній механічній системі, як ми детально показали у *Способі другому*,

діє сила тертя. Але наявність сили тертя спокою не порушує закону збереження повної механічної енергії, бо вона не виконує жодної роботи. Покажемо це. Робота за визначенням дорівнює

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = \left( \vec{F}, \frac{d\vec{r}}{dt} dt \right) = (\vec{F}, \vec{v}) dt.$$

Оскільки з цій задачі розглядається рух без ковзання, то  $\vec{v} = 0$  та робота  $dA = 0$ .

Кінетична енергія  $E_k = I_A \omega^2 / 2$  для тіла, яке бере участь у обертальному русі, зростає (бо спочатку абсолютно тверде тіло не рухалось) за рахунок накопиченої спочатку потенціальної енергії. Слід зазначити, що якщо за вісь обертання обрати вісь, яка проходить крізь центр мас (як у *Способі другому*), то вираз для кінетичної енергії буде дещо складнішим:

$$E_k = I_C \omega^2 / 2 + mV^2 / 2. \quad \text{Ці два вирази є тотожними,}$$

$$I_A \omega^2 / 2 = I_C \omega^2 / 2 + mV^2 / 2.$$

Для обчислення зменшення потенціальної енергії даного тіла зручно скористатися віссю координат  $\bar{x}$ , яку направлено вздовж похилої площини вниз (рис. 6.14). Запишемо закон збереження механічної енергії, користуючись виразом кінетичної енергії відносно осі, що проходить крізь точку  $A$ :

$$I_A \omega^2 / 2 = mgh, \quad (6.50)$$

де  $h = x \sin \alpha$ ;  $x$  – це координата, яка характеризує положення абсолютно твердого тіла на даний момент часу відносно тієї точки на похилій площині, в якій це тіло перебувало перед початком кочення. Візьмемо похідну за часом від (6.50), маючи на увазі, що для руху без ковзання  $V = \omega r = dx / dt$ . Тоді з (6.50) здобудемо:

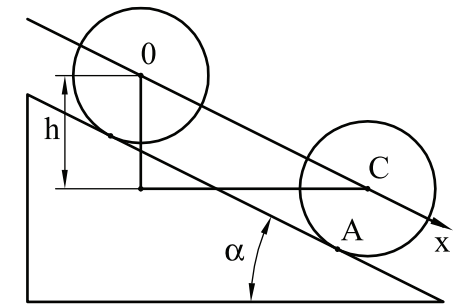


Рис. 6.14. Кочення тіла з похилої площини. Третій спосіб

$$I_A r^{-2} V dV/dt = mg \sin \alpha dx/dt. \quad (6.51)$$

З цього виразу легко знайти  $dV/dt = mgr^2 \sin \alpha / I_A$ . Або, якщо скористатися теоремою Гюйгенса–Штейнера, то прискорення центру мас:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I_C / (mr^2)}, \quad (6.52)$$

збігається з виразом, здобутим раніше (див. (1.6.43)).

**Висновок:** результат, що було отримано попередніми способами, підтверджено. Показано, що у даному випадку законом збереження механічної енергії можна користуватися, оскільки сила тертя не виконує роботи. Дійсно, в системі є тертя, але за відсутності ковзання силу тертя прикладено до точок абсолютно твердого тіла, миттєва швидкість яких дорівнює нулю, тому сила тертя не виконує роботи. Тим самим адекватно враховано процес дисипації енергії. Збільшення кінетичної енергії поступального та обертального рухів відбувається за рахунок роботи сили тяжіння.

#### 6.4. Коливальний рух фізичного маятника

Фізичним маятником називають абсолютно тверде тіло, що може вільно обертатися під дією моменту зовнішніх сил навколо горизонтальної осі, яка не проходить крізь центр мас. В задачах механіки цей момент найчастіше створює сила тяжіння.

Розглянемо абсолютно тверде тіло довільної плоскої форми (див. рис. 6.15) маси  $m$ . Точка  $O$  – це точка підвісу, крізь яку проходить вісь обертання, а точка  $C$  вказує положення центру мас. Кут  $\alpha$  відраховують від положення нерухомого виска, що підвішено до точки  $O$  на осі обертання, до напрямку вектора  $\overrightarrow{OC}$ . Вибір форми абсолютно твердого тіла у даному випадку не є принциповим, це тіло може характеризуватися значними розмірами вздовж усіх трьох координатних осей. Розподіл маси тіла відносно осі обертання входить до розв'язання та відповіді через момент інерції маятника відносно

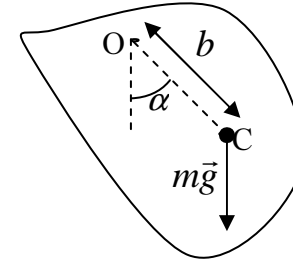


Рис. 6.15. Коливання фізичного маятника

осі обертання. На рисунку ж маятник виглядає як плоска фігура, і можна показати вибір системи відліку. Стан рівноваги даного фізичного маятника характеризується значенням кута  $\alpha=0$ . Аби маятник почав рухатися, слід надати йому початкову енергію у вигляді потенціальної або кінетичної енергії.

Обмежимося дослідженням випадку, коли енергії маятника недостатньо для реалізації повномасштабного обертального руху навколо закріпленої осі обертання. Іншими словами, нехай зміни кута відхилення від стану рівноваги є меншими за півоберту:  $\alpha < \pi$ . При цьому момент сили тяжіння, яку прикладено до різних елементарних мас  $m_i$ , із яких складено тіло, призводить не до обертання, а до коливань маятника навколо положення рівноваги. Кожного моменту часу момент сили тяжіння спрямовано так, щоб повертати фізичний маятник до стану рівноваги. Сумарний момент  $\vec{m}$  дорівнює сумі елементарних моментів сил  $\vec{M}_i$ :  $\vec{m} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\overrightarrow{OX_i}, \vec{g} m_i] =$

$$= \left[ \sum_i m_i \overrightarrow{OX_i}, \vec{g} \right] = [m \overrightarrow{OC}, \vec{g}] = [\overrightarrow{OC}, m \vec{g}]. \quad \text{Тут використано}$$

визначення центру мас:  $\overrightarrow{OC} = \sum_i m_i \overrightarrow{OX_i} / m$ . Тобто, при

розрахунку моменту сили тяжіння можна вважати, що її прикладено до центру мас фізичного маятника. Цей момент сили направлено перпендикулярно до площини рисунка 6.15. Проекція сумарного моменту на цей напрямок дорівнює:  $m = -mgb \sin \alpha$ , де  $b$  – це відстань між точками  $O$  та  $C$ . Кут  $\alpha$  відраховують від вертикального променя, що виходить з точки

$O$ , у напрямку вектора  $\overrightarrow{OC}$ .

З рівняння моментів маємо:

$$M = Id\omega / dt. \quad (6.53)$$

Похідна від кутової швидкості за часом дорівнює другій похідній від кута повороту за часом:  $d\omega / dt = d^2\alpha / dt^2$ . Підставимо до (6.53) вираз для моменту сили тяжіння (відносно точки  $O$ ):

$$-mgb \sin \alpha = I_O d^2\alpha / dt^2. \quad (6.54)$$

Наявність знаку «мінус» в (1.6.54) показує, що при відхиленні кута  $\alpha$  від рівноважного значення  $\alpha=0$  момент сили тяжіння повертає фізичний маятник до стану рівноваги. При цьому за теоремою Гюйгенса–Штейнера:  $I_O = I_C + mb^2$ . Таким чином, маємо диференціальне рівняння другого порядку для  $\alpha$ :

$$d^2\alpha / dt^2 = -mgb \sin \alpha / I_O. \quad (6.55)$$

Розглянемо тепер рух математичного маятника. Нагадаємо, що цим терміном називають матеріальну точку, яку підвішено на невагомій нерозтяжній нитці у полі сили тяжіння. Реально, математичний маятник – це модель, що описує макроскопічне тіло, розміри якого є малими порівняно з довжиною нитки, маса якого набагато перевищує масу нитки; видовження нитки в процесі коливань є нехтовно малим, так само, як малими є втрати енергії маятника на дисипації, пов'язані з розтяжністю нитки. У граничному випадку математичного маятника з довжиною підвісу  $l$  його момент інерції  $I_O = ml^2$ . Для математичного маятника рівняння (6.55) набуває більш простого вигляду:

$$d^2\alpha / dt^2 = -g \sin \alpha / l. \quad (6.56)$$

Тому фізичний маятник коливається з такою ж частотою, як математичний маятник, що має довжину  $l_0 = I_O / (mb)$ .

Величину  $l_0$  називають **зведеною довжиною** даного фізичного маятника. Якщо взяти математичний маятник з довжиною  $l_0$  та підвісити його до фізичного маятника в точці  $O$ , то вони синфазно коливатимуться з однаковим періодом, а тягарець математичного маятника буде знаходитися весь час напроти однієї точки фізичного маятника. Ця точка зветься **центром коливань** даного фізичного маятника. Тобто центр коливань лежить на промені  $OC$ , який виходить з точки підвісу  $O$  та проходить крізь центр мас  $C$ , та віддалений від точки  $O$  на відстань зведеної довжини  $l_0$ . Для математичного маятника центр коливань співпадає з центром мас.

Покажемо, що для фізичного маятника зведена довжина  $l_0$  є завжди більшою за відстань  $b$  між точкою підвісу та центром мас, тобто центр коливань завжди лежить нижче за центр тяжіння. Дійсно, з теореми Гюйгенса–Штейнера момент інерції фізичного маятника  $I_O = I_C + mb^2$ , тому для його зведеної довжини має місце нерівність:

$$l_0 = I_O / mb = (I_C + mb^2) / mb = I_C / mb + b > b. \quad (6.57)$$

Тепер доведемо теорему Гюйгенса про те, що «точка підвісу та центр коливань фізичного маятника є взаємно оборотними точками». Це означає, що коли зняти фізичний маятник з точки підвісу та почепити його за центр коливань, то період коливань не зміниться, а попередня точка підвісу стане новим центром коливань (див. рис. 6.16 та рис. 6.17).

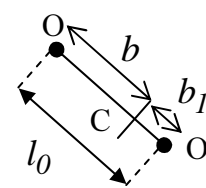


Рис. 6.16.  $O$  – перша точка підвісу,  $O_1$  – перший центр коливань

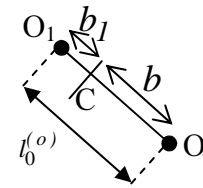


Рис. 6.17.  $O_1$  – нова точка підвісу,  $O$  – новий центр коливань

Для доведення теореми Гюйгенса слід порівняти зведені довжини  $l_0$  та  $l_0^{(o)}$  – первісного та оберненого маятників. У першому випадку  $l_0 = b + I_C / mb$ , а в другому –  $l_0^{(o)} = I^{(o)} / mb_1 = I_C / mb_1 + b_1$ . Оскільки зведена довжина  $l_0$  первісного маятника складається з відстані  $b$  від точки підвісу  $O$  до центру мас  $C$  та відстані  $b_1$  від центру коливань  $O_1$  до центру мас,  $l_0 = b + b_1$ , то  $b_1 = l_0 - b = I_C / mb$ . Це дає можливість виключити  $b_1$  з визначення зведеної довжини оберненого маятника:

$$l_0^{(o)} = b_1 + \frac{I_C}{mb_1} = \frac{I_C}{mb} + \frac{I_C}{mb} \frac{mb}{I_C} = \frac{I_C}{mb} + b \equiv l_0. \quad (6.58)$$

Отже, зведена довжина оберненого маятника дорівнює зведеним довжині первісного маятника:  $l_0^{(o)} = l_0$ , тому і періоди коливань таких маятників є однаковими. Цим теорему Гюйгенса доведено.

## 6.5. Пара сил

Парою сил називають такі дві сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , які є рівними за абсолютним значенням,  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| \equiv F$ , та протилежними за напрямком,  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , але діють не вздовж однієї прямої (рис. 6.18). Момент пари сил не залежить від того, відносно якої точки його розраховують, і дорівнює за модулем добутку модуля сили на відстань  $l$  між прямими, вздовж яких діють сили. Покажемо це. Момент пари сил  $\vec{M}_\Sigma$  відносно точки  $O$  дорівнює сумі моментів сил:  $\vec{M}_\Sigma = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2]$ . Скористаємось тим, що  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , тоді сума моментів сил:

$$\vec{M}_\Sigma = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] - [\vec{r}_2, \vec{F}_1] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \vec{F}_1] = [\vec{r}_{12}, \vec{F}_1]. \quad (6.59)$$

Різниця  $\vec{r}_{12}$  не залежить від того, відносно якої точки відкладено вектори  $\vec{r}_1$  та  $\vec{r}_2$ , тому момент пари сил у цілому також не залежить від цього. Модуль моменту пари сил  $|\vec{M}_\Sigma| = F |\vec{r}_{12}| \sin \alpha = Fl$ , що й слід було довести.

Відстань  $l$  між лініями дії сил  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$  називають плечем пари сил. Векторна сума цих сил дорівнює нулю, але момент пари сил є ненульовою. Оскільки сума зовнішніх сил дорівнює нулю  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ , то центр мас системи перебуває у стані спокою або у стані рівномірного прямолінійного руху. Значить, пара сил тільки обертає абсолютно тверде тіло відносно осі, що проходить крізь його центр мас. Напрямок обертання при цьому визначається напрямком векторного добутку  $[\vec{r}_{12}, \vec{F}_2]$ , тобто для випадку, наведеного на рис. 6.18, момент пари сил направлено перпендикулярно в площину рисунку.

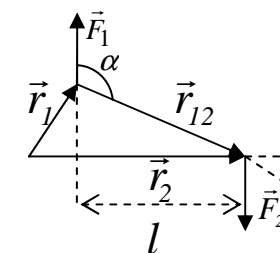


Рис. 6.18. До розрахунку моменту пари сил

## 6.6. Рівновага абсолютно твердого тіла

У загальному випадку для опису руху абсолютно твердого тіла необхідно скористатися двома векторними рівняннями: перше – це рівняння руху центра мас  $m d\vec{V}_c / dt = \vec{F}_{зовн}$  (тут  $\vec{F}_{зовн}$  – це результуюча зовнішніх сил); друге – це рівняння моментів  $d\vec{L} / dt = \vec{M}_{зовн}$  (тут  $\vec{M}_{зовн}$  – це результуючий момент зовнішніх сил). Рівняння моментів можна обрати відносно довільного нерухомого початку відліку або відносно центра мас абсолютно твердого тіла. Можна також обрати рухомий початок відліку, якщо тільки його швидкість у довільний момент часу є паралельною до швидкості центра мас.

З'ясуємо умови рівноваги абсолютно твердого тіла. Це тіло перебуває у стані спокою, якщо результуюча зовнішніх сил та результуючий момент зовнішніх сил дорівнюють нулю:

$$\vec{F}_{\text{зовн}} = 0, \quad \vec{M}_{\text{зовн}} = 0. \quad (6.60)$$

Співвідношення (6.60) визначає лише необхідні умови рівноваги абсолютно твердого тіла. Але вони не є достатніми, бо центр мас цього тіла може за вказаних умов рухатися рівномірно та прямолінійно, а саме абсолютно тверде тіло може обертатися із збереженням моменту імпульсу ( $\vec{L} = \text{const}$ ). Тому їх слід доповнити вимогою про рівність нулю кінетичної енергії, тобто вимогою  $E = U$ . Якщо до того ж  $\partial^2 U / \partial \vec{r}^2 > 0$ , тоді ці умови характеризуватимуть стан стійкої рівноваги в достатній мірі.

### 6.7. Опис довільного обертання абсолютно твердого тіла

Довільний рух абсолютно твердого тіла можна представити як поступальний рух центру мас та обертання тіла навколо осі, що проходить крізь центр мас. Поступальний рух центру мас описується законом про рух центру мас, який ми вивчали в параграфі 3.1. Довільне обертання абсолютно твердого тіла описується в термінах моменту імпульсу та кінетичної енергії.

Порахуємо кінетичну енергію абсолютно твердого тіла, яке рухається довільно. При цьому розглядатимемо тіло як дискретний набір матеріальних точок: вважаємо, що  $i$ -а матеріальна точка масою  $m_i$  рухається зі швидкістю  $\vec{v}_i$ :

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (6.61)$$

Тут сума обчислюється по всіх точках, що складають тіло. Швидкість  $i$ -ї матеріальної точки  $\vec{v}_i$  складається зі швидкості руху центру мас  $\vec{V}_c$  та швидкості  $[\vec{\omega}, \vec{r}_i]$ , обумовленої

обертанням абсолютно твердого тіла з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ :  $\vec{v}_i = \vec{V}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$ , де  $\vec{r}_i$  – це радіус-вектор, який проведено з центру мас до  $i$ -ї матеріальної точки:

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} (\vec{V}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}_i])^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} V_c^2 + \sum_i m_i \vec{V}_c [\vec{\omega}, \vec{r}_i] + \sum_i \frac{m_i}{2} [\vec{\omega}, \vec{r}_i]^2. \quad (6.62)$$

Тут перший доданок  $\sum_i \frac{m_i}{2} V_c^2$  – це кінетична енергія поступального руху тіла як цілого. Другий доданок,  $\sum_i m_i \vec{V}_c [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$ , дорівнює нулю,  $\sum_i m_i \vec{V}_c [\vec{\omega}, \vec{r}_i] = \sum_i m_i \vec{r}_i [\vec{V}_c, \vec{\omega}] = [\vec{V}_c, \vec{\omega}] \sum_i m_i \vec{r}_i$ , оскільки радіус-вектор центру мас, порахований відносно самого центру мас дорівнює нулю,  $\sum_i m_i \vec{r}_i \equiv m \vec{R}_y = 0$ .

Третій доданок в (6.62) описує кінетичну енергію обертального руху. В принципі, цей доданок у формулі (6.62) дає відповідь на питання, чому дорівнює кінетична енергія абсолютно твердого тіла, яке обертається довільно. Але цей вигляд можна значно спростити, звівши до вигляду, аналогічного формулі (6.5) для кінетичної енергії обертального руху абсолютно твердого тіла навколо закріпленої осі. Для цього проведемо певні тотожні перетворення. Квадрат векторного добутку, що входить до нього,  $[\vec{\omega}, \vec{r}_i]^2 = [\vec{\omega}, \vec{r}_i] \cdot [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$ , розглянемо як змішаний добуток, в якому вектор  $[\vec{\omega}, \vec{r}_i]$  скалярно домножений на векторний добуток векторів  $\vec{\omega}$  і  $\vec{r}_i$ . Циклічна перестановка не змінює змішаного добутку:

$$[\vec{\omega}, \vec{r}_i]^2 = \vec{r}_i \cdot [[\vec{\omega}, \vec{r}_i], \vec{\omega}] = -\vec{r}_i \cdot [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = -\vec{r}_i \cdot (\vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{\omega}, \vec{\omega})) = (\vec{\omega}, \vec{\omega})(\vec{r}_i, \vec{r}_i) - (\vec{\omega}, \vec{r}_i)(\vec{\omega}, \vec{r}_i). \quad (6.63)$$

Скористаємося тепер відомостями з тензорної алгебри, а саме, введемо одиничний тензор другого рангу – символ Кронекера  $\delta_{ik}$ :  $\delta_{ik}=1$ , коли  $i=k$ , та  $\delta_{ik}=0$ , коли  $i \neq k$ . За його допомогою, зокрема, записують скалярний добуток:  $(\vec{a}, \vec{b}) \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \equiv \sum_{k=x,y,z} a_k b_k \equiv \sum_k \sum_j \delta_{kj} a_k b_j \equiv \delta_{ij} a_i b_j \equiv a_i b_i$ . Тут, зокрема, використано звичне для тензорної алгебри спрощення: наявність двох однакових індексів у межах одного доданка означає, що по ним ведеться сумування. З використанням тензорної форми запису скалярного добутку запишемо квадрат векторного добутку (6.63), в якому опустимо індекс, який призначався для сумування по матеріальних точках:

$$[\vec{\omega}, \vec{r}_i]^2 = (\vec{\omega}, \vec{\omega})(\vec{r}_i, \vec{r}_i) - (\vec{\omega}, \vec{r}_i)(\vec{\omega}, \vec{r}_i) = \omega_l \omega_m r_{im} - \omega_j r_j \omega_k r_k. \quad (6.64)$$

$$\text{Кінетичну енергію обертального руху } T_{\text{обер}} = \sum_i \frac{m_i}{2} [\vec{\omega}, \vec{r}_i]^2$$

бажано представити у вигляді, аналогічному кінетичній енергії обертального руху абсолютно твердого тіла навколо закріпленої осі,  $T_{\text{закр}} = \frac{I \omega^2}{2}$ . Для цього належить в формулі (6.64) винести добуток  $\omega_j \omega_k$  за дужки:

$$[\vec{\omega}, \vec{r}_i]^2 = \delta_{jk} \omega_j \omega_k r_{im} r_m - \omega_j r_j \omega_k r_k = (\delta_{jk} r_{im} r_m - r_j r_k) \omega_j \omega_k. \quad (6.65)$$

З урахуванням (6.65) кінетична енергія довільного обертання абсолютно твердого тіла  $T_{\text{обер}}$  дорівнює:

$$T_{\text{обер}} = \sum_i \frac{m_i}{2} [\vec{\omega}, \vec{r}_i]^2 = 0.5 \sum m (\delta_{jk} r_{im} r_m - r_j r_k) \omega_j \omega_k. \quad (6.66)$$

У сумі (6.66) добуток  $0.5 \omega_j \omega_k$  є спільним множником, який можна винести за знак суми. Введемо тензор інерції:

$$I_{jk} = \sum m (\delta_{jk} r_{im} r_m - r_j r_k). \quad (6.67)$$

Тоді кінетичну енергію абсолютно твердого тіла, яке рухається довільно, можна записати в простому вигляді:

$$T = 0.5 m V_c^2 + 0.5 I_{jk} \omega_j \omega_k. \quad (6.68)$$

Тензори другого рангу зручно записувати у вигляді матриці (таблиці коефіцієнтів). Завдяки тривимірності нашого простору, для випадку тензора інерції  $I_{jk}$  ця матриця має три стовпчики та три рядочки:

$$I_{jk} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.69)$$

Тут індекс  $j$  позначає номер рядка, та індекс  $k$  – номер стовпчика. Спираючись на визначення (6.67), можемо записати явні вирази для компонентів тензора  $I_{jk}$ :

$$I_{jk} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i z_i y_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \quad (6.70)$$

Діагональні елементи тензора інерції  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$ ,  $I_{zz}$  іноді називають моментами інерції відносно відповідних осей. Решту недіагональних елементів іноколи називають відцентровими моментами інерції. У випадку неперервного розподілу маси по об'єму абсолютно твердого тіла замість виразу (6.67) слід використовувати інтегральний вираз для тензора інерції:

$$I_{jk} = \int \rho(\vec{r}) (r^2 \delta_{jk} - r_j r_k) dV. \quad (6.71)$$

З урахуванням здобутих явних виразів компонентів тензора інерції (6.69), (6.70), розпишемо явний вигляд виразу для кінетичної енергії обертального руху:



$$T_{обер} = 0.5I_{xx}\omega_x\omega_x + 0.5I_{yy}\omega_y\omega_y + 0.5I_{zz}\omega_z\omega_z + \\ + 0.5I_{yx}\omega_y\omega_x + 0.5I_{xy}\omega_x\omega_y + 0.5I_{yz}\omega_y\omega_z + \\ + 0.5I_{zy}\omega_z\omega_y + 0.5I_{zx}\omega_z\omega_x + 0.5I_{xz}\omega_x\omega_z. \quad (6.72)$$

Тензор інерції є симетричним:  $I_{jk} = I_{kj}$ , його компоненти, що стоять симетрично відносно діагоналі, дорівнюють один одному, наприклад,  $I_{xy} = I_{yx}$ . Тому інертні властивості абсолютно твердого тіла відносно обертального руху в загальному випадку визначають не дев'ять, а лише шість величин. При цьому слід зауважити, що в процесі руху компоненти тензора інерції можуть змінюватись.

Тензор інерції, як і будь-який симетричний тензор другого рангу, можна звести до діагонального вигляду шляхом відповідного вибору напрямку осей координат. Такі координатні осі, в яких тензор інерції має діагональний вигляд, звуться головними осями інерції, а відповідні значення компонентів тензора  $I_{jk}$  – головними моментами інерції. Позначимо їх  $I_1, I_2, I_3$ . У координатах, пов'язаних із головними осями інерції кінетична енергія обертального руху складається всього з трьох доданків, тобто має найпростіший вигляд:

$$T_{обер} = \frac{1}{2} (I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2). \quad (6.73)$$

У загальному випадку знайти головні осі інерції можна на основі методів тензорної алгебри, що вивчаються в університетському курсі вищої математики. Знаходження головних осей симетрії значно спрощується, коли абсолютно тверде тіло має якусь симетрію. Наприклад, якщо абсолютно тверде тіло є плоским, то його центр інерції лежить у цій площині. До того ж у ній також лежать дві головні осі інерції, а третя головна вісь є перпендикулярною до цієї площини.

Кожен з головних моментів інерції є не більшим за суму двох інших:

$$I_1 + I_2 = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \sum m(x_1^2 + x_2^2) = I_3. \quad (6.74)$$

Якщо всі три головні моменти інерції є різними,  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ , то таке абсолютно тверде тіло зветься асиметричною дзигою. Якщо величини двох головних моментів інерції збігаються,  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , то таке абсолютно тверде тіло зветься симетричною дзигою. А якщо  $I_1 = I_2 = I_3$ , тоді це – кульова дзига; для неї кінетична енергія обертального руху обчислюється найпростіше,  $T_{обер} = 0.5 I_1 \omega^2$ , незалежно від орієнтації осі обертання.

Ще однією характеристикою кількості обертального руху є момент імпульсу. Для його розрахунку скористаємось адитивністю моменту імпульсу:

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i]. \quad (6.75)$$

Замінімо в (6.75) швидкість  $\vec{v}_i$  елемента абсолютно твердого тіла на його вираз через швидкість центру мас  $\vec{V}_c$  і доданок, обумовлений обертанням,  $\vec{v}_i = \vec{V}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$ :

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i, \vec{V}_c] + \sum_i m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]]. \quad (6.76)$$

В (6.76) перший доданок відповідає моменту імпульсу поступального руху абсолютно твердого тіла як цілого. Другий доданок в (6.76) описує кількість обертального руху:

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = \sum_i m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i, \vec{\omega})]. \quad (6.77)$$

Коли ми вивчали обертання абсолютно твердого тіла навколо закріпленої осі (див. рівняння (6.1) та відповідні пояснення), то показували, що проекція  $L_z$  моменту імпульсу на закріплену вісь є пропорційною до кутової швидкості обертання  $\omega$  навколо цієї осі. З виразу (6.77) видно, що проекція моменту імпульсу на будь-який напрямок визначається не лише проекцією кутової швидкості на той самий напрямок, але

й рештою її проєкцій. Це означає, що зв'язок між вектором моменту імпульсу та вектором кутової швидкості є тензорним. Запишемо момент імпульсу абсолютно твердого тіла в тензорному вигляді, опустивши в формулі (6.77) індекси «i», які позначають номер елементарної маси, аби не ускладнювати запис:

$$\mathcal{L}_j = \sum m(\omega_j r_{ij} r_{ij} - r_{ij} r_{kj} \omega_k). \quad (6.78)$$

Кутова швидкість в формулі (6.78) не залежить від номера «i» елементарної маси, по яких ведеться сумування. Внесемо кутову швидкість у виразі (6.78) як спільний множник за знак суми. Для цього скористаємося властивостями символу Кронекера,  $\omega_j = \delta_{jk} \omega_k$ . Тоді вираз (6.78) можна переписати в інший спосіб:  $\mathcal{L}_j = I_{jk} \omega_k$ , де  $I_{jk}$  – це тензор інерції (6.67).

Якщо скористатися головними осями інерції, тоді в загальному випадку будь-який компонент моменту імпульсу  $\mathcal{L}_j$  дорівнює добутку кутової швидкості обертання  $\omega_j$  навколо цієї осі  $\vec{j}$  на відповідний діагональний елемент тензора інерції  $I_j$ :  $\mathcal{L}_j = I_j \omega_j$ . А для кульової дзиги маємо ще простіший зв'язок:  $\mathcal{L}_j = I \omega_j$ , при цьому  $\vec{\mathcal{L}} \parallel \vec{\omega}$ .

### 6.8. Вільне обертання симетричної дзиги

Дослідимо в цьому параграфі вільне обертання симетричної дзиги. Крім загальнофізичного інтересу, ця задача є важливою, бо описує в другому наближенні обертальний рух Землі. У нульовому наближенні Земля є плоскою та нерухомою. У першому наближенні поверхню Землі уявляють як кулю, що повільно обертається навколо нерухомої осі; у другому – як еліпсоїд обертання, тобто, як сферу, стиснуту вздовж осі обертання, що обертається навколо рухомої осі.

В інерціальній системі відліку, яка рухається в даний момент часу паралельно центру мас, інертні властивості

абсолютно твердого тіла відносно обертання описуються шістьма незалежними компонентами тензора інерції, які, до того ж, у загальному випадку змінюються з часом. Тому для розв'язання цієї задачі скористаємося формулою (5.6) з параграфу 5.1, яка пов'язує похідну за часом  $d\vec{A}/dt$  від векторної фізичної величини  $\vec{A}$ , пораховану в інерціальній системі відліку, з похідною  $d'\vec{A}/dt$ , порахованою в неінерціальній системі відліку, яка обертається відносно інерціальної з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{A}]. \quad (6.79)$$

З урахуванням (6.79) дістаємо два рівняння, які описують динаміку абсолютно твердого тіла:

$$\frac{d'\vec{p}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{p}] = \sum \vec{F}, \quad \frac{d'\vec{L}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{L}] = \sum \vec{M}. \quad (6.80)$$

Тут вектори  $\vec{p}$  і  $\vec{L}$  виміряно відносно неінерціальної системи відліку. Перше рівняння – це закон руху центру мас, друге – основне рівняння динаміки обертального руху. У найпростіший спосіб компоненти моменту імпульсу  $\vec{L}$  пов'язані з компонентами кутової швидкості  $\vec{\omega}$  в обертальній системі координат з осями, що направлені уздовж головних осей інерції:  $L_1 = I_1 \omega_1$ ,  $L_2 = I_2 \omega_2$ ,  $L_3 = I_3 \omega_3$ . Спроекуємо рівняння моментів (6.80) на першу з цих осей (надалі штрих при похідній не писатимемо для спрощення запису):

$$\frac{dL_1}{dt} + \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 = M_1. \quad (6.81)$$

Підставимо до (6.81) вирази, що пов'язують компоненти моменту імпульсу з компонентами кутової швидкості:

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2 = M_1. \quad (6.82)$$

Поділимо рівняння (6.82) на ненульову константу  $I_1$ :

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \omega_3 \omega_2 = M_1/I_1. \quad (6.83)$$

Решту проекцій рівняння моментів отримуємо з (6.83) циклічною перестановкою (про циклічну перестановку див. параграф 1.1):

$$\begin{cases} \frac{d\omega_1}{dt} - \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_2 \omega_3 = \frac{M_1}{I_1}, \\ \frac{d\omega_2}{dt} - \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_3 \omega_1 = \frac{M_2}{I_2}, \\ \frac{d\omega_3}{dt} - \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_1 \omega_2 = \frac{M_3}{I_3}. \end{cases} \quad (6.84)$$

Рівняння (6.84) називають рівняннями Ейлера<sup>1</sup>. При вільному обертанні  $M=0$ , так що

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \omega_2 \omega_3 = 0,$$

<sup>1</sup> Ейлер (Euler) Леонард (1707-1783) – швейцарський математик та фізик, який провів більшу частину свого життя в Росії та Німеччині. Ейлер здійснив важливі відкриття в таких різних галузях математики, як математичний аналіз та теорія графів. Він також ввів велику частину сучасної математичної термінології і позначень, зокрема, у математичному аналізі, як, наприклад, поняття математичної функції. Ейлер відомий також завдяки своїм роботам у механіці, динаміці рідини, оптиці та астрономії, інших прикладних науках. Професор математики в університеті Санкт-Петербургу. Президент Берлінської академії. Майже половина його праць виникла під час другого перебування у Санкт-Петербурзі

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_2}{dt} + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega_1 \omega_3 &= 0, \\ \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \omega_1 \omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Застосуємо систему (6.85) для опису руху симетричної дзиги. Якщо третю вісь обертальної системи відліку спрямувати вздовж геометричної осі, то просторовий розподіл маси еліпсоїда обертання відносно першої та другої осей буде однаковим, тому  $I_1 = I_2 = I$ . Із третього рівняння системи (6.85) отримаємо  $d\omega_3/dt = 0$ . Це означає, що відносно неінерціальної системи відліку, пов'язаної з геометричними осями симетричної дзиги її обертальний рух виглядає в такий спосіб, що проекція кутової швидкості обертання на геометричну вісь дзиги є сталою,  $\omega_3 = \text{Const}$ . Тим самим знайдено один із розв'язків системи рівнянь (6.85):  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_3)$ . Тобто, симетрична дзига може обертатись навколо своєї геометричної осі. У загальному випадку (зокрема, для Землі) таке обертання не реалізується. Тому продовжимо пошук розв'язків системи рівнянь (6.85).

В однорідному еліпсоїді обертання елементарні маси, які зосереджено поблизу екватора, віддалені від третьої осі сильніше, ніж від першої та другої,  $I_3 > I$ . Для розв'язання першого та другого рівнянь (6.85) позначимо

$$(I_3 - I)\omega_3/I \equiv \Omega. \quad (6.86)$$

За розмірністю введена величина – це кутова швидкість, яка співпадає за напрямком із геометричною віссю симетричної дзиги. Тоді перше та друге рівняння системи (6.85) спрощуються:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\Omega\omega_2, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \Omega\omega_1. \quad (6.87)$$

Система двох лінійних однорідних диференціальних рівнянь (6.87) першого порядку зі сталими коефіцієнтами визначає залежність  $\omega_{1,2}(t)$  від часу проекцій кутової швидкості

обертання на дві осі, перпендикулярні до геометричної осі дзиги. Два рівняння першого порядку (6.87) є еквівалентними до одного рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2\omega_1}{dt^2} = -\Omega \frac{d\omega_2}{dt} = -\Omega^2 \omega_1. \quad (6.88)$$

Загальним розв'язком цього рівняння є гармонічні функції (синус або косинус):

$$\omega_1(t) = \omega_{\perp} \cos(\Omega t + \varphi_0). \quad (6.89)$$

Тут  $\omega_{\perp}$  і  $\varphi_0$  – це дві константи інтегрування, як і має бути в розв'язка диференціального рівняння другого порядку, які визначаються з початкових умов. Другу проекція кутової швидкості  $\omega_2(t)$  знаходимо, підставивши (6.89) до першого рівняння системи (6.87):

$$\omega_2 = \frac{-1}{\Omega} \frac{d\omega_1}{dt} = \omega_{\perp} \sin(\Omega t + \varphi_0). \quad (6.90)$$

Оскільки згідно з основною тригонометричною рівністю  $\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) = \omega_{\perp}^2$ , то вектор кутової швидкості ( $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ) описує окружність радіусом  $\omega_{\perp}$  навколо третьої осі, тобто навколо геометричної осі дзиги, з кутовою швидкістю  $\Omega$  (6.86).

Оскільки проекція кутової швидкості  $\omega_3$  на вісь дзиги також є незмінною, то весь вектор  $\vec{\omega}$  рівномірно обертається навколо осі дзиги, залишаючись незмінним за абсолютною величиною, описуючи бічну поверхню конуса.

Таким чином, вільне обертання однорідної симетричної дзиги виглядає в неінерціальній системі відліку, пов'язаній із дзигою, як обертання з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ , яка є сталою за модулем, але рухається в тілі дзиги, описуючи конус навколо геометричної осі дзиги зі швидкістю  $\Omega$ .

Для Землі  $I_3$  також не дорівнює  $I_1$  точно, тому що Земля не є точною кулею. Читання з частотою  $\Omega$  дуже добре спостерігаються в геофізичних дослідах. Вони призводять до ефекту, що має назву **варіація широти**. Згідно з формулою

(6.86) період обертання кутової швидкості навколо геометричної осі Землі має становити триста п'ять днів. Рух, що спостерігається, має річну компоненту (що пояснюється, як вимушене коливання) і вільний період. 1892 року американський астроном С. Чандлер установив, що вільний період складає не триста п'ять днів, а чотириста тридцять три дні. С. Чандлер пояснив розходження між періодами Ейлера та своїм результатом впливом пружних деформацій Землі і зміщення води в океані, які мають місце внаслідок змін відцентрової сили, спричинених рухом полюсів Землі.

Миттєва вісь обертання Землі не зберігає у тілі Землі незмінного напрямку, внаслідок чого має місце рух географічних полюсів по поверхні Землі. Відомості про рух полюсів мають важливе значення в астрономії та геодезії, оскільки він спричиняє неперервні зміни координат точок Землі. Існує Міжнародна служба руху полюсів: 5 станцій на одній географічній паралелі 39°8' північної широти. Спостереження для служби полюсів в СНД ведуться також у Пулкові, Москві, Полтаві, Н. Новгороді, Іркутську, Благовещеньку.

Зокрема, на сайті [http://www.rabbithole2.com/presentation/news/earth\\_changes\\_news/chandler\\_wobble\\_has\\_major\\_anomaly.htm](http://www.rabbithole2.com/presentation/news/earth_changes_news/chandler_wobble_has_major_anomaly.htm) можна знайти зображення фігури (рис. 6.19), яку «прокреслює» кутова швидкість  $\vec{\omega}$  в тілі Землі. Ця траєкторія за шість років міститься всередині кола діаметром близько п'ятнадцяти метрів. Це ніяк не впливає на наше повсякденне

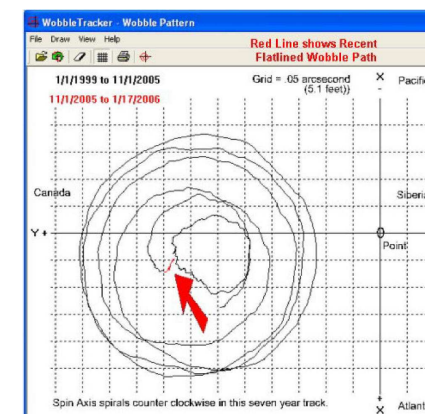


Рис. 6.19. «Слід», що його залишає вектор кутової швидкості на поверхні Землі

життя, але має бути враховано в точних астрономічних та геодезичних вимірюваннях.

Оскільки моменти інерції  $I_1=I_2$ , то вектор моменту імпульсу  $\vec{L}=(I\omega_1, I\omega_2, I_3\omega_3)$  належить до площини, в якій лежать геометрична вісь дзиги  $\vec{e}_3$  та вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$ . Оскільки  $I_3>I$ , то момент імпульсу  $\vec{L}$  лежить між геометричною віссю Землі  $\vec{e}_3$  та кутовою швидкістю її добового обертання  $\vec{\omega}$ .

З точки зору інерціальної системи відліку момент імпульсу  $\vec{L}$  вільної дзиги є незмінним за абсолютною величиною та напрямком; геометрична вісь  $\vec{e}_3$  і кутова швидкість  $\vec{\omega}$  обертаються навколо вектора  $\vec{L}$  з кутовою швидкістю  $\Omega$ . В лабораторних дослідах спостерігають, як швидко обертання дзиги навколо геометричної осі з кутовою швидкістю  $\omega_3$  супроводжується повільним обертанням цієї геометричної осі навколо напрямку вектора моменту імпульсу  $\vec{L}$  із кутовою швидкістю  $\Omega$ .

## 6.9. Гіроскоп

У попередньому параграфі розглянуто рух дзиги, на яку не діють жодні зовнішні моменти сили. Ми бачили, що у цьому випадку момент імпульсу  $\vec{L}$ , взагалі кажучи, не співпадає за напрямком із кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ . Тепер розглянемо рух гіроскопу. Гіроскопом називають таке осесиметричне тіло, що швидко обертається навколо своєї геометричної осі. Залежно від призначення гіроскоп може мати різну конструкцію. На рис. 6.20 а) наведено один із варіантів гіроскопа.

При обертанні гіроскопа навколо його осі вектор моменту імпульсу  $\vec{L}$  також (як і вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$ ) направлений уздовж осі тіла. Це очевидно вже без обчислень, просто з міркувань симетрії: завдяки осьовій симетрії руху немає жодного іншого напрямку, куди б міг бути направлений вектор  $\vec{L}$ . Далі, доки на гіроскоп не діють ніякі зовнішні сили, його вісь зберігає свій напрямок у просторі: завдяки закону збереження моменту імпульсу напрямок (як і абсолютна величина) вектора

$\vec{L}$  залишається незмінним. Якщо ж прикласти до гіроскопа зовнішній момент сили, його вісь почне відхилятися від початкового напрямку. Саме цей рух осі гіроскопа нас і цікавитиме в цьому параграфі. При цьому вектор кутової швидкості вже не є направленим уздовж геометричної осі тіла. Разом із ним уже не співпадає за напрямком із тією самою віссю (а також і з напрямком  $\vec{\omega}$ ) і вектор моменту імпульсу  $\vec{L}$ . Однак, якщо головне обертання гіроскопу є достатньо швидким, а зовнішні сили є не дуже великими, швидкість обертання осі гіроскопа буде відносно малою, і вектор  $\vec{\omega}$ , а з ним і  $\vec{L}$ , будуть увесь час близькі за напрямком до осі гіроскопа. Ось чому, якщо

відомо, як змінюється вектор  $\vec{L}$ , з того можна судити, як приблизно рухається вісь гіроскопу. При цьому абсолютне значення моменту імпульсу можна приблизно вважати таким, що дорівнює  $L=I\omega$ , де  $I$  – це момент інерції гіроскопу відносно геометричної осі. Зміну моменту імпульсу з часом визначають з рівняння моментів (4.13), яке було введено в параграфі 4.6.

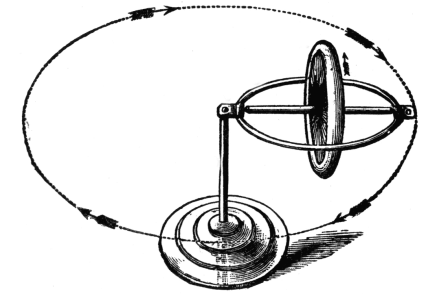


Рис. 6.20 а). Зовнішній вигляд гіроскопа

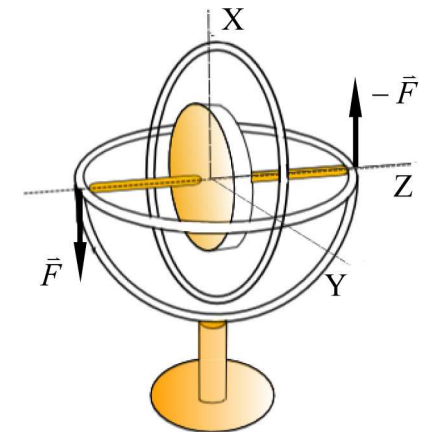


Рис. 6.20 б). Пояснення гіроскопічного ефекту

Нехай, наприклад, до кінців осі гіроскопа (вісь  $Z$  на рис. (6.20 б)) прикладено пару сил  $\vec{F}_1$  і  $-\vec{F}_1$ , що діють паралельно і антипаралельно осі  $X$ .

Тоді момент пари сил  $\vec{M}$  направлений уздовж осі  $Y$ , і в цей самий бік направлено похідну  $d\vec{L}/dt$ . Отже, момент імпульсу є внаслідок дії моменту сили отримує приріст  $d\vec{L} = \vec{M}dt$  і набуває значення  $\vec{L}(t+dt) = \vec{L}(t) + d\vec{L}$ . При цьому момент імпульсу  $\vec{L}$ , а разом із ним і вісь гіроскопа повертається в площині  $YZ$  за стрілкою годинника, якщо дивитись із кінця осі  $X$  (рис. 6.20 в)). Таким чином, прикладання до гіроскопа якоїсь сили викликає обертання його осі в напрямку, перпендикулярному до напрямку сили. Це є проявом гіроскопічного ефекту: якщо тіло не обертається навколо власної осі (момент імпульсу тіла відносно власної осі дорівнює нулю,  $\vec{L}=0$ ), то дія моменту пари сил спричиняє поворот осі тіла навколо осі  $Y$ ,  $\vec{L} \parallel \vec{M}$ ; обертання гіроскопу ( $\vec{L} \neq 0$ ) спричиняє зміну напрямку обертання осі тіла під дією того самого моменту сил на обертання навколо осі  $X$ ,  $\vec{L} \perp \vec{M}$ .

Зауважимо, що на рисунку 6.20 в) елементарний приріст моменту імпульсу  $d\vec{L}$  зображено у вигляді скінченного вектора, тому виникає хибне враження, що вектор  $\vec{L}(t+dt)$  є довшим за вектор  $\vec{L}(t)$ ,  $|\vec{L}(t+dt)| > |\vec{L}(t)|$ , (довжина гіпотенузи є більшою за довжину будь-якого з катетів). Проте цю помилку обумовлено лише тим, що на рисунку не можна показати нескінченно малий

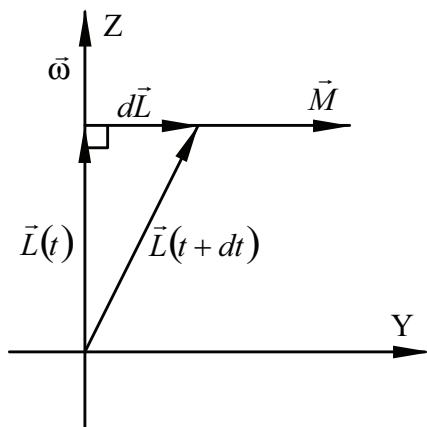


Рис. 6.20 в). Пояснення гіроскопічного ефекту в термінах моменту імпульсу та моменту сили

вектор  $d\vec{L}$ . Якщо врахувати малість  $d\vec{L}$ , то приріст довжини вектора моменту імпульсу  $\Delta L = |\vec{L}(t+\Delta t)| - |\vec{L}(t)| = \sqrt{|\vec{L}(t)|^2 + |\Delta \vec{L}|^2} - |\vec{L}(t)|$  приблизно дорівнює  $\Delta L \approx 0.5 |\Delta \vec{L}|^2 / |\vec{L}(t)| = 0.5 |M|^2 \Delta t^2 / |\vec{L}(t)|$ . Тобто  $\Delta L$  є величиною другого порядку малості, і швидкість зміни моменту імпульсу за абсолютною величиною  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|M|^2 \Delta t}{|\vec{L}(t)|} = 0$ . Це

означає незмінність модуля моменту імпульсу з часом у цій задачі. У загальному випадку додавання  $d\vec{L}$  подовжує вектор  $\vec{L}$ , лише якщо кут між  $d\vec{L}$  і  $\vec{L}$  є гострим. Оскільки в нашому прикладі вектор моменту сили  $\vec{M}$  (а за ним і  $d\vec{L}$ ) є щомиті перпендикулярним до вектора моменту імпульсу  $\vec{L}$ , то вектор  $\vec{L}$  лишається незмінним за абсолютною величиною, змінюючи свій напрямок, що спостерігається як обертання осі гіроскопа.

Поведінку гіроскопу можна легко зрозуміти на основі аналогії з рухом матеріальної точки. Якщо тіло має нульовий початковий імпульс,  $\vec{p}=0$ , то дія центральної сили  $\vec{F}$  викликає виникнення радіального імпульсу,  $\vec{p} \parallel \vec{F}$ ; коли ж матеріальна точка рухається по окружності, вона має ненульовий імпульс,  $\vec{p} \neq 0$ , і центральна сила викликає щомиті приріст імпульсу в радіальному напрямку, що в цьому випадку означає зміну напрямку руху,  $\vec{p} \perp \vec{F}$ .

Прикладом гіроскопа є дзига, що спирається на одну нижню точку (рис. 6.20 а)). Тертям дзиги у точці опори нехтуємо. Дзига перебуває під дією сили тяжіння, яка має постійний напрямок вертикально вниз. Ця сила дорівнює вазі дзиги,  $P=mg$ , її можна вважати прикладеною до центру тяжіння дзиги. Момент сили тяжіння відносно точки опори  $O$  дорівнює за величиною добутку сили тяжіння на плече  $M=Pl \sin \Theta$  (тут  $l$  – це відстань  $OC$  від точки опори до центру мас,  $\Theta$  – кут між віссю

дзиги і вертикаллю) і має напрямок завжди перпендикулярно до площини, що проходить крізь ось дзиги та вертикальний напрямок. Від цього вектор моменту імпульсу  $\vec{L}$  (а тим самим і вісь дзиги) повертається, залишаючись постійним за величиною, і зберігає постійний кут  $\Theta$  з вертикаллю, тобто описує конус навколо цього напрямку. Такий рух дзиги, при якому змінюється лише кут  $\varphi$  між проекцією осі гіроскопа на горизонтальну площину і фіксованим напрямком у цій площині (кут  $\Theta$  між віссю гіроскопа та вертикаллю залишається незмінним), називають **регулярною прецесією** гіроскопа.

Знайдемо кутову швидкість прецесії гіроскопа. Позначимо її  $\vec{\omega}_1$ . Протягом елементарного проміжку часу  $dt$  вектор моменту імпульсу  $\vec{L}$  отримує перпендикулярний до себе приріст  $d\vec{L}$ , який згідно з рівнянням моментів дорівнює  $d\vec{L} = \vec{M} dt$  і значить, лежить у горизонтальній площині. Оскільки вектор моменту імпульсу при своєму русі описує бічну поверхню конуса; то його кінець описує окружність радіусу  $L \sin \Theta$ . Абсолютне значення приросту  $d\vec{L}$  можна порахувати як добуток цього радіусу на елементарний кут  $d\varphi$ , на який повертається дзига протягом  $dt$ ,  $|d\vec{L}| = L \sin \Theta d\varphi$ . Прирівнявши цей вираз до того, що витікає з рівняння моментів, отримуємо кутову швидкість прецесії,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 = \frac{M}{L \sin \Theta} = \frac{mgl \sin \Theta}{I \omega \sin \Theta} = \frac{mgl}{I \omega}. \quad (6.91)$$

Кутова швидкість прецесії  $\omega_1$  прямо пропорційна до напруженості  $g$  силового поля (зазвичай, поля тяжіння), яке спричиняє прецесію, відстані  $l$  від точки опори до центру мас гіроскопа, а також зворотно пропорційна моменту інерції гіроскопа  $I$  та кутовій швидкості  $\omega$  обертання гіроскопа навколо власної геометричної осі. Кутова швидкість прецесії гіроскопа не залежить від кута  $\Theta$  між віссю гіроскопа та вектором напруженості зовнішнього силового поля. Коли тертя в опорі гіроскопа гальмує прецесію, кут  $\Theta$  зростає, гіроскоп падає, але

продовжує обертатись із тією ж самою кутовою швидкістю  $\omega$ . Це відповідає принципу Ле-Шательє<sup>2</sup>. Кутову швидкість прецесії  $\vec{\omega}_1$  направлено антипаралельно до вектора напруженості зовнішнього силового поля, яке спричиняє прецесію, якщо кутову швидкість  $\vec{\omega}$  і моменту імпульсу  $\vec{L}$  направлено від точки опори. І навпаки,  $\vec{\omega}_1$  є паралельною до вектора  $\vec{g}$ , якщо гіроскоп закручено так, що  $\vec{\omega}$  направлено до точки опори гіроскопа.

Визначимо умови застосовності здобутого результату (1.6.91). Наведена елементарна теорія гіроскопа є справедливою, якщо прецесія є повільною порівняно з власним обертанням гіроскопа:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{mgl}{I \omega^2} \ll 1. \quad (6.92)$$

Цю умову можна інтерпретувати в термінах енергії: потенціальна енергія дзиги у полі тяжіння  $mgl \cos \Theta$  має бути малою порівняно з її кінетичною енергією  $0.5 I \omega^2$ .

При більш детальному розгляді руху гіроскопа виявляється, що власне обертання і прецесія гіроскопа можуть супроводжуватись так званими **нутаціями**, тобто періодичною зміною кута  $\Theta$ , який Ейлер називав кутом нутації. У гіроскопа, який прецесує в полі тяжіння, нутації виявляються в коливаннях осі гіроскопа, амплітуда і період яких тим менші, чим більша швидкість  $\omega$  власного обертання. Фізичну причину нутацій було пояснено в параграфі 6.8. Як було зазначено при викладенні елементарної теорії гіроскопа, ключове положення цієї теорії полягає в тому, що ототожнюються три напрямки: осі гіроскопа, кутової швидкості обертання гіроскопа  $\vec{\omega}$  та моменту імпульсу

<sup>2</sup> Ле-Шательє (Le Chatelier) Анрі Луї (1850-1936) – французький фізик та хімік. Професор Паризького університету. Член Паризької академії наук. Ле Шательє удостоєний багатьох нагород: він став кавалером ордена Почесного легіону, отримав медаль Деві Лондонського королівського товариства.



гіроскопа  $\vec{L}$ . Результат (6.91) описує кутову швидкість прецесії, з якою обертається навколо напрямку вектора напруженості зовнішнього силового поля саме вектор моменту імпульсу! При цьому вісь гіроскопа та вектор  $\vec{\omega}$  обертаються навколо вектора  $\vec{L}$  зі швидкістю, яку визначено формулою (6.86).

Більш детальний опис руху гіроскопа буде дано при вивченні теоретичної механіки. Обмежимося вказанням на застосування гіроскопів. Оскільки гіроскоп зберігає напрямок свого обертання (напрямок моменту імпульсу  $\vec{L}$ ), то його використовують при створенні приладів, призначених для орієнтації у просторі. Звичайно, тертя зменшує швидкість обертання гіроскопа і знижує його можливість точного вказання координат. Тому прогрес ішов у напрямку створення гіроскопів на підвісах, що зменшують тертя в опорах (магнітний, повітряний, електростатичний підвіси, лазерний гіроскоп та ін.).

Досі при вивченні руху гіроскопа ми нехтували тертям в опорі. З'ясуємо тепер вплив тертя. Зазвичай у дзиги центр мас розташований вище точки опори. Щоби така дзига не впала, їй слід надати швидке обертання навколо осі фігури. При повільному обертанні вертикальне положення фігури стає несталим, і дзига падає. Якщо дзигу запустити під кутом до вертикалі, то її центр мас починає підніматись, і дзига набуває вертикального положення. Причиною цього є момент сил тертя, що діє в точці опори. Це стає зрозумілим, якщо врахувати, що кінець ніжки дзиги, яким вона спирається на

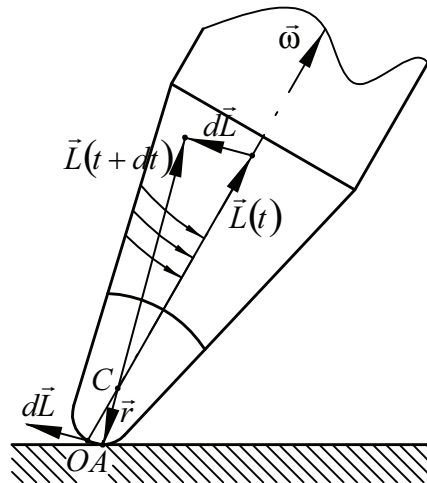


Рис. 6.21. Демонстрація ролі моменту сили тертя в зменшенні кута нутації

горизонтальну площину не є ідеально гострим, а є закругленим (рис. 6.21).

Розглянемо для визначеності випадок, коли дзигу закручено навколо геометричної осі в такий спосіб, що кутову швидкість направлено майже вгору. Туди ж направлено і вектор моменту імпульсу  $\vec{L}(t)$  дзиги в момент часу  $t$ . В наступний момент часу,  $t+dt$ , напрямок вектора  $\vec{L}$ , а з ним і напрямок осі гіроскопа змінюється,  $\vec{L}(t+dt) = \vec{L}(t) + d\vec{L}$ . Напрямок зміни вектора моменту імпульсу  $d\vec{L}$  визначається, згідно з рівняння моментів, моментом сил,  $d\vec{L} = \vec{M}dt$ . Момент сили тяжіння обумовлює прецесію дзиги, про що написано вище. З'ясуємо напрямок моменту сили тертя. Оскільки точка  $A$  на ніжці дзиги, якою вона в даний момент часу торкається поверхні, рухається в площину рисунка, то силу тертя ковзання направлено в протилежному напрямку, тобто з площини рисунка. Момент сили тертя, як векторний добуток радіус-вектора  $\vec{r}$ , проведеного з центру мас до точки  $A$  та сили тертя, лежить у площині рисунка і утворює з напрямком вектора  $\vec{L}$  тупий кут. Тому вектор  $\vec{L}(t+dt)$ , а з ним і вісь гіроскопа в наступний момент часу  $t+dt$  набувають напрямку, ближчого до вертикалі, ніж то було в попередній момент часу  $t$ . При цьому довжина вектора  $\vec{L}$  зменшується, бо тертя, що природно, гальмує обертання дзиги.

Тим самим показано, що дія моменту сили тертя проявляється як у гальмуванні дзиги, так і в підніманні центру мас дзиги. Крім того, внаслідок дії сили тертя прискорюється прецесія дзиги.

Цікаво прослідкувати за дією моменту сили тертя на рух так званої китайської дзиги (рис. 6.22). Її рух значною мірою визначається технологією її виготовлення. Її виготовляють із легкого матеріалу і в верхівку шляпки поміщають маленький, але важкий елемент так, аби центр мас дзиги містився майже в цій верхівці (точка  $C$  на рис. 6.22). Розглянемо для визначеності таке обертання дзиги, при якому вектори кутової швидкості і моменту імпульсу  $\vec{L}$  в момент часу  $t$  дивляться вздовж осі дзиги майже вгору-праворуч. Момент сили тертя



(і зміна вектора  $\vec{L}$ ) направлено перпендикулярно до радіус-вектора  $\vec{r}$ , проведеного з центру мас  $C$  до точки торкання дзиги поверхні  $A$ . Через дію моменту сили тертя центр мас дзиги безперервно піднімається, а вісь фігури все більше нахиляється. Кінець кінцем це призводить до перекидання дзиги. Вісь фігури ще ближче розташовується до вертикального положення, якщо тільки дзига не втратить сталості руху через уповільнення обертання навколо власної осі.

У повсякденному житті ми маємо дуже добрий приклад гіроскопічного ефекту – це їзда на велосипеді (рис. 6.23). Поглянемо згори на велосипед, що рухається по прямій (рис.

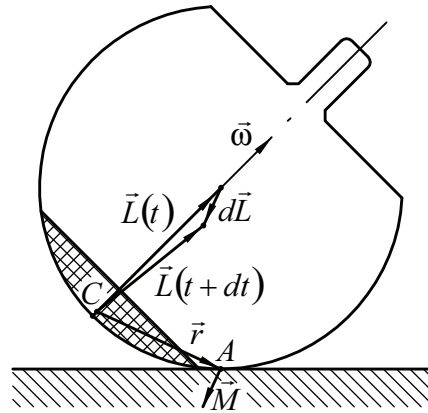


Рис. 6.22. Центр мас китайської дзиги піднімається внаслідок дії моменту сили тертя

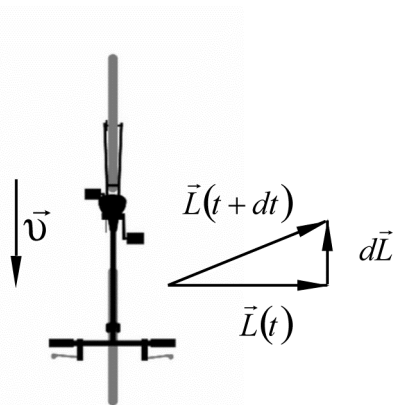


Рис. 6.23 а). Вигляд велосипеда згори

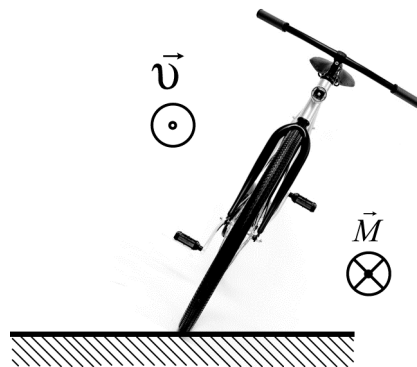


Рис. 6.23 б). Вигляд велосипеда зпереду

6.23 а)). Унаслідок обертання коліс велосипед має момент імпульсу, який направлено ліворуч від велосипедиста. Коли велосипедист хоче повернути, наприклад, ліворуч, він нахиляє велосипед уліво (рис. 6.23 б)). При цьому виникає момент сили тяжіння  $\vec{M}$ , що направлений проти напрямку швидкості руху  $\vec{v}$ . Тому момент імпульсу велосипеда в наступний момент часу отримує додатак,  $\Delta \vec{L} = \vec{M} dt$ . Внаслідок цього момент імпульсу  $\vec{L}(t + dt)$  змінює напрямок і велосипед повертає ліворуч. При зберіганні нахилу велосипед увесь час виконуватиме поворот ліворуч.

За однакового нахилу велосипеда сила тяжіння викликає однаковий момент сили  $\vec{M}$ , тобто спричиняє однакову зміну моменту імпульсу  $\Delta \vec{L} = \vec{M} dt$  за одиницю часу. Що більша швидкість руху велосипеда, то більшим є момент імпульсу  $\vec{L}$ , обумовлений обертанням коліс, то меншим є кут (див. рис. 23 а)), на який повертається момент імпульсу (а разом із ним – і велосипед) за одиницю часу під дією згаданого моменту сили тяжіння. Цим пояснюється більша сталість руху швидкого велосипеда і менша – повільного.

Якби колеса велосипеда не обертались, і він не мав моменту імпульсу, пов'язаного з їхнім обертанням, то він під дією сили тяжіння впав би донизу. Наявність обертання принципово змінює результат дії сили тяжіння – її момент спричиняє поворот велосипеда навколо вертикальної осі, немовби до нього прикладають не вертикальну силу, а тягнуть за кермо в горизонтальному напрямку ліворуч. В цьому й полягає ще один прояв гіроскопічного ефекту: сила по-різному діє на тіло в залежності від того, обертається воно чи ні.

### 6.10. Приклад розв'язання задач про обертання абсолютно твердого тіла навколо закріпленої осі з урахуванням сил тертя

Дано: Суцільний циліндр радіусу  $R$  і масою  $m$  котиться без ковзання по горизонтальних рейках під дією сили  $F$ , яку прикладено вертикально вниз до невагомий нерозтяжної нитки,

яку намотано на циліндр (рис. 6.24). Коефіцієнт тертя циліндра по рейках  $\mu$ .

Знайти:

а) прискорення  $a$  центру мас циліндру, б) якою має бути сила  $F$ , аби не було ковзання?

Розв'язання:

а) Циліндр котиться по рейках без ковзання, отже причиною руху є сила тертя спокою  $F_m$ , величина якої менша за силу тертя ковзання  $\mu N$ ,

$$F_m \leq \mu N, \quad (6.93)$$

тут  $N$  – це притискаюча сила. Ця невизначеність сили тертя спокою спонукає шукати розв'язання без залучення сили тертя. Таким вимогам задовольняє рівняння моментів, якщо його записати відносно точки  $O$ , якою циліндр торкається рейки:

$$I_O \varepsilon = RF. \quad (6.94)$$

До цього рівняння не входять ані сила нормальної реакції опори  $N$ , ані сила тяжіння  $mg$ , ані сила тертя  $F_m$ . Оскільки циліндр котиться без ковзання, лінійне прискорення  $a$  зв'язано з кутовим прискоренням  $\varepsilon$  у простий спосіб,  $a = \varepsilon R$ :

$$a = R^2 F / I_O. \quad (6.95)$$

Момент інерції циліндра відносно геометричної осі  $I_C$  дорівнює  $I_C = mR^2/2$ . За теоремою Гюйгенса-Штейнера момент інерції циліндра  $I_O$  відносно осі, що є паралельною до геометричної осі та проходить крізь точку  $O$ , дорівнює  $I_O = 3mR^2/2$ .

Відповідь:  $a = 2F/(3m)$ .

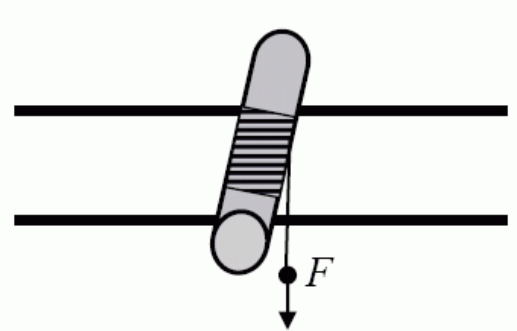


Рис. 6.24. Кочення циліндра по рейках

б) Умову того, що циліндр котиться без ковзання, виражає нерівність (6.93). Лишилось записати силу тертя  $F_m$  та притискаючу силу  $N$  в термінах сили  $F$ , з якою тягнуть за нитку. Для цього скористаємось другим законом Ньютона в проекціях на горизонтальну та вертикальну осі:

$$ma = F_m, \quad (6.96)$$

$$0 = N - mg - F. \quad (6.97)$$

Підставимо силу тертя  $F_m$  та притискаючу силу  $N$  з (6.96) та (6.97) до нерівності (6.93):

$$2F/3 = F_m \leq \mu N = \mu(mg + F). \quad (6.98)$$

З розв'язання нерівності (6.98) дістаємо, що циліндр котиться без ковзання, якщо за нитку тягнуть не надто сильно:

$$F \leq \frac{\mu mg}{\frac{2}{3} - \mu}. \quad (6.99)$$

Важливо пересвідчитись, що права частина нерівності (6.99) за розмірністю є силою,  $[F] = \text{Н}$ . Якщо коефіцієнт тертя дорівнює  $2/3$ , то права частина нерівності (6.99) дорівнює нескінченності. Це означає, що з якою б силою  $F$  не тягти за нитку, циліндр котитиметься без ковзання. Дійсно, нерівність (6.98),  $2F/3 \leq \mu(mg + F)$ , є справедливою для будь-яких значень сили  $F$ , якщо коефіцієнт тертя  $\mu \geq 2/3$ .

Відповідь:  $F \leq \frac{3\mu mg}{2 - 3\mu}$ , якщо  $\mu \leq 2/3$ ; сила  $F$  може бути довільною, якщо  $\mu \geq 2/3$ .

**Питання для самоконтролю до розділу**  
**6. Обертальний рух абсолютно твердого тіла**

1. Запишіть основне рівняння динаміки обертального руху (рівняння моментів) у векторній формі.
2. Запишіть основне рівняння динаміки обертального руху (рівняння моментів) у скалярній формі (у випадку обертання навколо закріпленої осі).
3. Запишіть вираз для кінетичної енергії обертального руху абсолютно твердого тіла навколо закріпленої осі.
4. Дайте визначення моменту сили.
5. Дайте визначення моменту імпульсу матеріальної точки.
6. Як проекція моменту імпульсу абсолютно твердого тіла на закріплену вісь, навколо якої воно обертається, пов'язана з кутовою швидкістю обертання?
7. Що таке момент інерції матеріальної точки?
8. Сформулюйте теорему Гюйгенса–Штейнера.
9. Сформулюйте умови рівноваги твердого тіла.
10. Чому дорівнює момент пари сил?
11. Що таке математичний маятник?
12. Що таке фізичний маятник?
13. Що таке зведена довжина фізичного маятника?
14. Що таке центр коливань фізичного маятника?
15. В чому полягає оборотність <sup>світла</sup> фізичного маятника (сформулюйте теорему Гюйгенса).
16. Які дві сили називають парою?
17. Що таке гіроскоп?
18. Який рух гіроскопу називають прецесією?
19. Від чого залежить кутова швидкість прецесії гіроскопу?
20. Який рух гіроскопу називають нутацією?
21. В чому полягає гіроскопічний ефект?

**7. Механічні коливання**

Існує поділ фізики на механіку, оптику, молекулярну фізику, електрику, тощо. Такий поділ склався історично, він має під собою ту основу, що кожен розділ вивчає якісно різні (до певної міри) форми руху матерії. Значну роль у цьому відіграло те, що ці форми руху сприймаються різними органами відчуття, тому вони сприймаються як різні явища. Розглянемо для ілюстрації цієї тези два експерименти, в яких форми руху є справді різними, але при цьому в них дуже багато спільних рис.

У першому експерименті розглянемо коливання вискового маятника. Візьмемо висок, прикріпимо до нього невеликий пакунок з піском, зробимо у пакунку малий отвір, щоб пісок висипався тонким струмком. Під виском розташуємо рухому паперову стрічку. Відхиливши висок від положення рівноваги на малу (порівняно з довжиною виска) відстань, надамо йому можливість рухатися. При відповідному виборі координат зсув піскової лінії з напрямку, що є перпендикулярним до руху стрічки, описується (приблизно) гармонічним законом.

У другому експерименті дослідимо коливання камертону. Розглянемо камертон, до ніжки якого прикріплено маленьке дзеркальце, яке освітлюється променем світла так, що відбитий промінь потрапляє на екран. Коли камертон мовчить, то на екрані видно маленьку плямочку світла. Коли камертон звучить, то на екрані виникає смуга світла. Якщо на шляху відбитого променя до екрану встановити багатогранну систему дзеркал, що обертається навколо своєї осі та відбиває світло на екран, тоді в залежності від стану камертону на екрані буде видно синусоїду, або світлу пляму.

Отже, у цих двох дослідах *те*, що коливалося, було різним, але *те*, як це відбувалося, було подібним. Часто при розв'язанні конкретних фізичних задач доводиться цікавитися саме тим, *як* та *чому* відбуваються коливання, а не тим, *що* саме коливається. Часто незрозумілі питання в одній галузі фізики стають зрозумілими при вивченні явищ з іншої галузі фізики. Це