Питання для самоконтролю до розділу 7. Механічні коливання

1. Яку механічну систему називають гармонічним осцилятором?
2. Що таке «амплітуда коливань»?
3. Що таке «частота коливань»?
4. Що таке «циклічна (кругова) частота коливань»?
5. Що таке «фаза коливань»?
6. Що таке «період коливань»?
7. Яку механічну систему називають математичним маятником?
8. Яку механічну систему називають фізичним маятником?
9. Що таке «зведена довжина фізичного маятника»?
10. Що таке «центр коливань фізичного маятника»?
11. В чому полягає оборотність фізичного маятника? (Теорема Гюйгенса).
12. Чому дорівнює енергія гармонічних коливань?
13. Які коливання називають власними?
14. Які коливання називають загасаючими?
15. Що таке «коефіцієнт загасання»?
16. Що таке «логарифмічний декремент загасання»?
17. Які коливання називають «вимушеними»?
18. Які коливання називають «автоколиваннями»?
19. Що таке «биття»?
20. За яких умов траєкторія матеріальної точки має вигляд фігур Лісажу?

8. Фізичний практикум із механіки

Фізичний практикум із механіки в класичних університетах, які готують студентів за напрямами «фізика» та «прикладна фізика» може складатися з різної кількості робіт. Зокрема, на фізико-технічному факультеті Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна студентам пропонується виконати наступні роботи:

1. вивчення рівноприскореного руху та визначення величини прискорення вільного падіння на машині Атвуда[1],
2. дослідження закону збереження енергії і визначення моменту інерції механічного тіла відносно фіксованої осі обертання за допомогою маятника Максвела,
3. визначення прискорення вільного падіння за допомогою фізичного та математичного маятників,
4. визначення моментів інерції твердого тіла за допомогою крутильного маятника,
5. визначення коефіцієнтів тертя за допомогою похилого маятника,
6. визначення швидкості польоту тіла за допомогою балістичного маятника,
7. параметричні коливання математичного маятника,
8. дослідження особливостей руху гіроскопу.

Головна мета фізичного практикуму полягає в тому, аби познайомити студентів із тим, як ставити фізичний дослід, як проводити вимірювання параметрів, що характеризують досліджуване фізичне явище, а також як обробляти результати досліду.

До основних задач фізичного практикуму слід віднести:

[1] Атвуд (Atwood) Джордж (1745-1807) – англійський фізик і математик; винахідник машини для демонстарції дії Першого закону Ньютона; член Лондонського королівского товариства. До того ж, Атвуд був визнаним шахматним гроссмейстером свого часу, зокрема, його партія з Франсуа-Андре Даніканом Філідором тривалий час служила посібником для шахістів усієї планети.

- ознайомлення з найпоширенішими методами та прийомами вимірювання фізичних величин;
- набуття навичок використання основних універсальних вимірювальних приладів;
- набуття навичок з обробки результатів вимірювань, з урахуванням систематичних і випадкових похибок;
- набуття навичок грамотного ведення робочих записів під час проведення досліду та правильного представлення остаточних результатів вимірювань;
- набуття першого досвіду командної дослідницької роботи.

8.1. Обробка та подання результатів вимірювань

У фізиці вимірювання будь-якої величини полягає у встановленні її числового значення та похибки (помилки) вимірювань. Числове значення фізичної величини за результатами експерименту можна визначити лише з певною точністю. Відхилення результату вимірювання від “справжньої” величини називається похибкою вимірювань. Терміни “справжній” і ”помилка” у теорії вимірювань не несуть позитивного або негативного навантаження, а просто відображають той рівень невизначеності знань про конкретне значення вимірюваної величини, що склався на момент проведення вимірювань. Цей рівень визначається не тільки об’єктивними факторами, наприклад, якістю вимірювальної апаратури, але й суб’єктивними факторами також, наприклад, уважністю виконавців вимірювання.

Результат вимірювання величини A записується у вигляді

$$A=X\pm\Delta X, \tag{8.1}$$

де X – це справжнє значення величини; ΔX – це похибка вимірювання.

8.1.1. Абсолютні та відносні похибки

У формулі (8.1) похибка ΔX записується в тих самих одиницях вимірювання, що й X. Вона називається абсолютною похибкою вимірювання. Величина

$$\delta X=\frac{\Delta X}{X}\ 100\ \%, \tag{8.2}$$

називається відносною похибкою та виражається, як правило, у відсотках від вимірюваної величини.

8.1.2. Прямі та непрямі вимірювання

Якщо вимірювана величина визначається безпосередньо за показниками приладу, то таке вимірювання називається прямим. Однак найчастіше величина, яка нас цікавить, не вимірюється безпосередньо, а розраховується за формулою, до якої входить низка інших величин, що підлягають прямим вимірюванням. Наприклад, у роботі „Вивчення рівноприскореного руху та визначення величини прискорення вільного падіння на машині Атвуда” величина прискорення вільного падіння визначається за формулою $g=(2M+m)S^2/(2mS_1t^2)$, де S та S_1 – це довжини шляху, що проходить тягарець при рівномірному та рівноприскореному рухах, відповідно, M та m – це маси основного та допоміжного тягарців, відповідно, t – час рівномірного руху. При цьому величини M, m, t, S, S_1 вимірюються безпосередньо з відповідними похибками. Отже, визначення прискорення вільного падіння у цьому випадку є результатом непрямого вимірювання.

8.1.3. Систематичні та випадкові помилки

Помилки вимірювань поділяються на два класи: систематичні та випадкові (або статистичні). Крім того, до окремої групи відносять так звані грубі помилки (або промахи), що виникають через неуважність експериментатора або несправності вимірювальної апаратури.

8.1.3.1. Систематичні помилки

Систематичні помилки – це постійні помилки або такі помилки, що повільно змінюються в часі за величиною (так звані „дрейфуючі” помилки). Вони спричиняють певний зсув вимірюваного значення відносно справжнього. Цей зсув не є випадковим, і тому його вплив не можна усунути методами статистичної обробки результатів вимірювань. Але найнеприємнішою обставиною при цьому є те, що на відміну від випадкових похибок систематичні помилки не призводять до явного (наочно видимого) розкиду числових значень результатів вимірювань, і тому експериментатор може навіть не підозрювати про їхнє існування та їхній вплив на кінцевий результат.

Причини систематичних помилок є різними та, по суті справи, вирішальним фактором для їхнього виявлення та усунення є проведення вимірювань іншим методом із використанням інших вимірювальних приладів. Дуже важливими є кваліфікація та досвід експериментатора. Кожен експериментатор поступово напрацьовує свої „алгоритми” виявлення та усунення систематичних помилок. Для набуття подібного досвіду можна рекомендувати в процесі підготовки та проведення досліду обміркувати наступні можливі джерела систематичних похибок*:*

- недосконалість використовуваного методу вимірювання, вибір невдалої методики порівняння з еталоном. При проведенні непрямих вимірювань слід стежити, аби припущення, за яких було виведено спрощену розрахункову формулу, дійсно виконувалися в ході досліду;
- недосконалість використовуваної вимірювальної апаратури (сюди належать помилки, що пов'язані з вибором використовуваних вимірювальних приладів недостатньо високого класу точності, тобто помилки лінійності шкал та передавальних функцій приладів, дрейф їхньої нульової точки, градуювальні помилки, нестійкість роботи джерел живлення, наявність смуг застою на шкалі, тощо);
- неналежне налаштування вимірювальної апаратури, невдало підібрані режими її роботи;
- мінливість умов досліду та вплив змін у навколишньому середовищі на вимірювану величину й вимірювальні прилади.

Серед систематичних помилок варто особливо виділити так звані "приладові" похибки. Навіть якщо всі інші систематичні помилки усунуто, то залишаються похибки, які обумовлено класом точності вимірювальних приладів. Величина приладової похибки для кожного приладу встановлюється внаслідок його метрологічної перевірки та калібрування та записується в його паспорті (описі). Приладова похибка, як правило, і визначає помилку результату за відсутності статистичних похибок. Якщо, наприклад, багаторазові вимірювання діаметра прутка штангенциркулем із ціною поділки ноніуса *0,1 мм* дають ту саму величину – *3мм*, то результат записується у вигляді $D=(3,0\pm0,1)$ *мм*.

8.1.3.2. Випадкові (статистичні) помилки

Випадкові помилки – це помилки, які обумовлено відхиленням (флуктуацією) результатів спостережень за певною величиною при виконанні повторних вимірювань цієї ж величини. Природа цих флуктуацій може визначатися, по-перше, «поводженням» самої вимірюваної величини або вимірювального приладу, по-друге, умовами вимірювання, або обома цими факторами. Однак, важливо зазначити, що взаємодія цих причин і їхня зміна в ході виконання її досліджень призводить до випадкової зміни результату за величиною та знаком.

Передбачити величину випадкової помилки одного єдиного вимірювання неможливо. Але якщо є можливість провести багаторазові вимірювання, то значення вимірюваної величини та похибку її вимірювання можна визначити методами статистичної обробки результатів вимірювань, які розглядає теорія помилок. Докладно із цими методами можна познайомитися у спеціальних монографіях. Тут наведено лише найпростіші правила обробки результатів вимірювань із випадковими похибками.

8.2. Рекомендації з обробки вимірювань і запису результатів

Результати вимірювань можуть бути представлені в цифровому, аналітичному та графічному виглядах.

8.2.1. Правила запису результатів

1. Запис цифрових результатів вимірювань має обов'язково містити значення самої величини та похибки її вимірювань, що виражені в однакових одиницях. Але якщо помилка записується окремо від результату, то її можна виразити у відсотках, частках, тощо. Приклади:

1) діаметр прутка $D = (3,0\pm0,1)$ *мм*;
2) константа Больцмана[2] $k=(1,38049\pm0,00005)\times10^{-16}$ *ерг*$(°K)^{-1}$.

---

[2] Больцман (Boltzmann) Людвіг Едуард (1844-1906,) – австрійський фізик, який зробив великий внесок у розвиток термодинаміки та статистичної фізики на основі атомістичних уявлень. Член Віденської АН. Він вивів основне рівняння кінетичної теорії газів, дав статистичне

Зазначимо також, що для випадкової величини (наприклад, інтенсивності α-джерела), окрім самого значення та статистичної похибки вимірювань, результат у загальному випадку має містити ще й довірчу ймовірність p того, що справжнє значення лежить у зазначеному діапазоні: $X=(396\pm6)$ частинок/с, $p=0{,}95$.
Якщо величину ймовірності в явному вигляді не записано, то вважається, що вона має "стандартне" значення, що дорівнює *0,68*.
2. Кількість значимих цифр, які слід наводити при записі результату, залежить від точності вимірювань. Зазвичай точність вимірювань у навчальній лабораторії не перевищує одиниць відсотків, тому остаточний результат вимірювань в цьому випадку повинен містити не більше трьох значимих цифр (для прикладу розглянемо дані, що наведено в таблиці 8.1).

Таблиця 8.1.

Запис результатів вимірювань g ($м/с^2$) залежно від величини похибки

Розрахунковий результат	Похибка	Правильний запис
9,8315±0,028165	0,03	9,83±0,03
9,8315±0,26365	0,3	9,8±0,3
9,8315±3,42816	3,0	10,0±3,0

У проміжних розрахунках як для вимірюваних величин, так і для величин, що взято з довідників, рекомендується використовувати на одну значиму цифру більше. Остання значима цифра округляється за звичайними правилами. Якщо вимірювана величина відома з точністю до другого знаку після коми, то результат рекомендується представляти саме у вигляді $3{,}2\times10^3$, а не 3200.

8.2.2. Правила визначення похибки прямих вимірювань

На практиці розмаїття вимірюваних величин, процедур вимірювання та джерел помилок є таким багатим, що неможливо встановити спільні правила, застосування яких гарантує вірогідний результат. Тому правила, що наведено нижче, слід розглядати, як деякі загальні рекомендації, що припускають ретельну перевірку можливості їхнього застосування окремо в кожному випадку.

тлумачення 2-го закону термодинаміки і ентропії, обґрунтував закон теплового випромінювання Стефана (закон Стефана-Больцмана).

1. Якщо вимірювана величина X за своєю природою не носить статистичного характеру та розкид значень її вимірювань є істотно меншим за похибки приладів вимірювання, то похибка результату ΔX береться такою, що дорівнює похибці приладу $\Delta X_{пр}$. (Природно, попередньо ми маємо переконатися в можливості знехтувати іншими систематичними похибками.) Відносна помилка при цьому визначається в такий спосіб: $\delta X = \Delta X/X$.
2. Якщо вимірювана величина має статистичний характер та/або результати її багаторазових вимірювань мають розкид, що перевищує похибки приладів вимірювання, то оцінка справжнього значення визначається як середнє арифметичне:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\,, \qquad (8.3)$$

де X_k – це результати, що здобуті в експерименті внаслідок окремих вимірювань величини X; $k = 1, 2... n$ – номер окремого вимірювання. Весь «набір» з n проведених окремих вимірювань називається вибіркою X_n.
3. Для визначення випадкової похибки чинять у такий спосіб.
А. Якщо кількість спостережень n у вибірці є досить великою (що значить «велика», ми побачимо нижче, в п. 4), то величину випадкової похибки середнього значення X визначають за формулою:

$$S_{\overline{X}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(X_k - \overline{X}\right)^2}{n(n-1)}}\,. \qquad (8.4)$$

Імовірність P того, що справжнє значення вимірюваної величини належить до певного інтервалу від $\overline{X} - \Delta X$ до $\overline{X} + \Delta X$, називають довірчою ймовірністю або коефіцієнтом надійності, а сам інтервал – довірчим інтервалом.

Таблиця 8.2

Коефіцієнти Стьюдента t_p

n–1	p			
	0,683	0,95	0,99	0,997
2	1,32	4,70	9,9	19,2
3	1,20	3,18	5,8	9,2
4	1,15	2,78	4,6	6,6
5	1,11	2,57	4,0	5,5
6	1,09	2,45	3,7	4,9
7	1,08	2,37	3,5	4,5
8	1,07	2,31	3,4	4,3
9	1,06	2,26	3,2	4,1

10	1,05	2,23	3,2	4,0
20	1,03	2,09	2,8	3,4
50	1,01	2,01	2,9	3,9
100	1,00	1,98	2,6	3,1
200	1,00	1,97	2,6	3,0

Похибка, яку визначено співвідношенням (8.4), називається середньоквадратичною помилкою середнього, її визначено для довірчої ймовірності $p=0,68$. У цьому випадку результат вимірювань записується в наступному вигляді:

$$X = \overline{X} \pm \Delta X = \overline{X} \pm S_{\overline{x}} \,. \qquad (8.5)$$

Б. Якщо число n є невеликим, то для визначення помилки результату вводять уточнюючий коефіцієнт t_p, що його називають коефіцієнтом Стьюдента[3] (див. табл. 2). У цьому випадку результат вимірювань записується у наступному вигляді:

$$X = \overline{X} \pm t_p S_{\overline{x}} \,. \qquad (6)$$

Величина коефіцієнта Стьюдента залежить від кількості спостережень n у вибірці та від ступеня надійності результату, який ми бажаємо одержати. З таблиці 8.2 легко зрозуміти, що значить «велика» або «мала» кількість спостережень у вибірці. Якщо, наприклад, нас задовольняє надійність, за якої визначається «стандартна помилка», тобто $p=0,68$, то вже при кількості вимірювань n=6 ($n–1=5$) коефіцієнт Стьюдента дорівнює 1,11. Це означає, що уточнення, яке внесено коефіцієнтом t_p (до похибки вимірювань, а не до самої середньої величини!), становить не більше 11%.

4. Зі збільшенням кількості вимірювань n у вибірці величина $S_{\overline{x}}$ випадкової помилки зменшується. Якщо є можливість збільшити серію повторних вимірювань, то можна розв'язати зворотну задачу – знайти таку кількість вимірювань n, яка б дала можливість зробити випадкову помилку меншою за систематичну. Для цього можна скористатися даними таблиці 8.3.

Таблиця 8.3

Кількість вимірювань n, що гарантує величину обраної частки випадкової помилки ε

$\varepsilon = S_{\overline{x}}/\Delta X$	P					
	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99	0,999
1,0	2	3	5	7	11	17
0,5	3	6	13	18	31	50
0,4	4	8	19	27	46	74
0,3	6	13	32	46	78	127
0,2	13	29	70	99	171	277
0,1	47	169	273	387	668	1089

[3] Госсет (Gosset) Уільям Сілі (1876-1937) – відомий учений-статистик, більше відомий під своїм псевдонімом Стьюдент і за свої роботи з дослідження так званого розподілу Стьюдента.

Приклад використання таблиці 8.3.

Нехай систематична похибка величини X є відомою й становить ΔX. (Наприклад, цією величиною може бути похибка приладу вимірювання). Тоді можна встановити припустиму величину випадкової помилки $S_{\overline{x}}$, поклавши її величину, наприклад, такою, що дорівнює 10% від систематичної: $S_{\overline{x}}=0,1\Delta X$. У загальному випадку $S_{\overline{x}} = \varepsilon\Delta X$, де ΔX – величина систематичної помилки, $S_{\overline{x}}$ – величина випадкової помилки, $\varepsilon = S_{\overline{x}}/\Delta X$ – частка випадкової помилки до систематичної. Природно, що частка ε буде дорівнювати встановленій величині 10% лише статистично. Тому слід задати ймовірність p, з якою ми бажаємо здобути частку ε. Кількість вимірювань n для заданих p і ε знаходимо в табл. 3.

5. Якщо статистична $S_{\overline{x}}$ та систематична ΔX похибки є приблизно однаковими, то сумарну похибку результату можна визначити за формулою

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\overline{x}}^2 + (\Delta X)^2} \,. \qquad (8.7)$$

8.2.3. Визначення похибки непрямих вимірювань

Нехай потрібна величина N (результат непрямого вимірювання) є функцією інших величин A, B, C (результатів прямих вимірювань): $N=f(A,B,C)$. Визначення похибки результату істотно залежить від характеру похибок величин, які до неї входять: чи то вони є тільки систематичними, тільки статистичними, або присутні ті й інші.

1. Якщо всі похибки прямих вимірювань є систематичними (наприклад, похибками вимірювальних приладів), то похибка результату визначається за формулою:

$$\Delta N = \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \times \Delta x_i \right| , \qquad (8.8)$$

де $N=f(x_1,x_2,\ldots x_k)$ – це потрібна величина, яку розраховують за результатами вимірювання інших величин x_i; $\partial f/\partial x_i$ – частинні похідні функції f за відповідними x_i; Δx_i – абсолютна похибка i-го вимірювання, прямі дужки означають модуль добутку.

2. Якщо всі похибки величин A, B, C… носять статистичний характер, то похибка результату визначається за формулою:

$$S_{\bar{x}\Sigma}=\sqrt{\sum_1^n\left(\frac{\partial N}{\partial x_i}S_{\bar{x}i}\right)^2}\,, \qquad (8.9)$$

де $S_{\bar{x}\Sigma}$ – це похибка результату непрямого вимірювання; $S_{\bar{x}i}$ – похибка результату i-го прямого вимірювання, яку розраховано за формулами (8.4) – (8.6).

У таблиці 8.4 представлено формули функціональної залежності результатів непрямих вимірювань, які часто зустрічаються на практиці при експериментальному дослідженні різноманітних фізичних явищ. В ній також наведено вирази для розрахунків абсолютної та відносної похибок для цих функціональних залежностей.

Таблиця 8.4

Формули для оцінки похибок результату непрямого вимірювання

Вигляд функції	Абсолютна похибка	Відносна похибка
$N=A+B+C$	$\Delta A+\Delta B+\Delta C$	$\dfrac{\Delta A+\Delta B+\Delta C}{A+B+C}$
$N=A-B$	$\Delta A+\Delta B$	$\dfrac{\Delta A+\Delta B}{A-B}$
$N=A\times B\times C$	$AB\times\Delta C+BC\times\Delta A+AC\times\Delta B$	$\dfrac{\Delta A}{A}+\dfrac{\Delta B}{B}+\dfrac{\Delta C}{C}$
$N=A^n$	$nA^{n-1}\Delta A$	$n\cdot\Delta A/A$
$N=\sqrt[n]{A}$	$\sqrt[n-1]{A}\cdot\Delta A/n$	$\Delta A/(nA)$
$N=\dfrac{A}{B}$	$\dfrac{B\Delta A+A\Delta B}{B^2}$	$\dfrac{\Delta A}{A}+\dfrac{\Delta B}{B}$
$N=sinA$	$\Delta A\times cosA$	$\Delta A\times ctgA$
$N=cosA$	$\Delta A\times sinA$	$\Delta A\times tgA$
$N=tgA$	$\dfrac{\Delta A}{\cos^2 A}$	$\dfrac{\Delta A}{\sin A\times\cos A}$
$N=ctgA$	$\dfrac{\Delta A}{\sin^2 A}$	$\dfrac{\Delta A}{\sin A\times\cos A}$

8.3. Графічне представлення експериментальних результатів

Для кращого сприйняття результатів експериментального дослідження певного фізичного процесу часто використовують графічне представлення здобутих результатів. Це пояснюється можливістю цього методу представити здобуті результати одразу та в цілому.

8.3.1. Правила побудови графіків

Графічне представлення матеріалів, що здобуто дослідним шляхом, (графіки, діаграми, гістограми, фотоматеріали, малюнки) використовується з різною метою:

- наочне зображення експериментальних даних для якісного аналізу поведінки досліджуваного «об'єкту»;
- визначення (якісне, кількісне) характерних точок і параметрів процесів за наявності «особливостей» - максимумів, мінімумів, точок перегину, зламу, стрибків, тощо;
- апроксимація дослідних точок кривими та визначення за ними законів і закономірностей поведінки «об'єкту»;
- перевірка передбачуваних та виявлення невідомих залежностей, які виражаються аналітичними функціями, тощо.

Залежно від мети графічного представлення результату вигляд та спосіб графічного представлення можуть бути різними. Графіки та діаграми дослідних результатів, які студенти надають у звітах про виконання фізичного практикуму, мають задовольняти наступним вимогам:

- мати осі координат з нанесеними на них найменуваннями та одиницями вимірювань;
- містити дослідні точки (якщо графік будують по точках, які отримано внаслідок вимірювань); бажано вказати масштаб помилок, характерних для різних ділянок графіку. (Масштаб помилок зображується відрізками прямих, проведених через експериментальні точки паралельно до осей координат, з довжиною, що дорівнює помилці в масштабі відповідної осі координат);
- апроксимуючі криві, які проведено по дослідних точках, не

повинні затуляти самі точки та їхній справжній розкид.

На рис. 8.1. наведено приклад графіка (дослідних точок і кривої, яку спеціально зроблено згладженою), що зображує залежність напруги U_c на конденсаторі від часу t при його розрядці крізь певний активний опір.

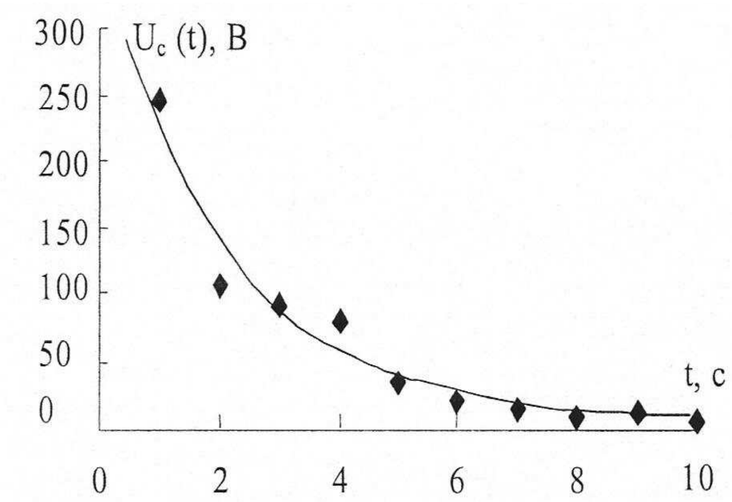

Рис. 8.1. Графік розрядки конденсатора

Якщо метою графічного представлення є перевірка передбачуваної аналітичної залежності експериментальних даних, то дуже корисним прийомом виявляється лінеаризація графіка шляхом вибору нелінійного масштабу на відповідній осі координат.

Наприклад, передбачуваний закон розрядки конденсатора на рис. 8.1. – це експонента: $U_c=U_0exp[-t/(RC)]$. Прологарифмуємо цей вираз та введемо нові позначення: замість $lnU_c=lnU_0-\frac{t}{RC}$ вводимо нові змінні $y=a - bt$. Якщо вздовж осі ординат відкладати напругу U_c у логарифмічному масштабі $(y=lnU_c)$, то передбачувана залежність буде відображатися прямою лінією, кутовий коефіцієнт якої дорівнює $(-1/RC)$ (див. рис. 8.2).

„Лінеаризація” значно спрощує перевірку типу залежності. Порівнюючи рисунки 8.1 та 8.2, легко побачити, що експериментальні точки добре накладаються на пряму лінію. У той же час з першого рисунку важко визначити, чи належать

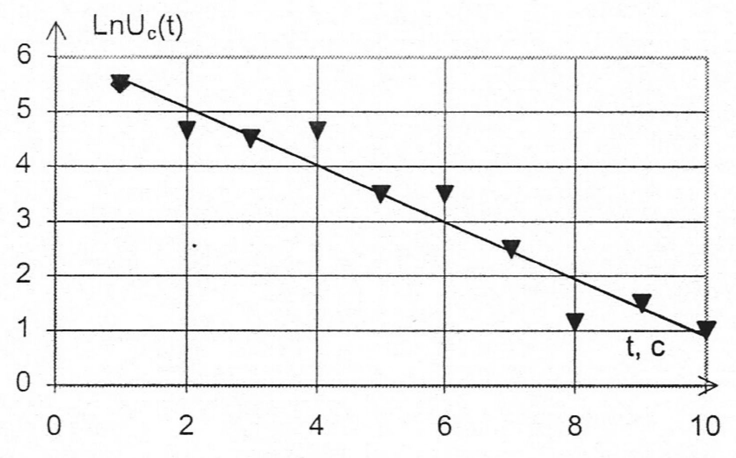

Рис. 8.2. „Лінеаризований” графік розрядки конденсатора

точки експонентній залежності або якій-небудь ступеневій функції.

8.3.2. *Метод найменших квадратів*

Нехай очікувана залежність величини $Y=f(X)$, що визначається внаслідок досліду, має вигляд прямої

$$Y=a+bx, \qquad (8.10)$$

(зокрема, це може бути «лінеаризована» залежність). Дослідні точки Y_kX_k, $k=1, 2,\dots n$, як правило, не лежать на одній прямій, а розкидані в деякій смузі значень. Виникає задача провести через такі точки оптимальну пряму лінію та визначити похибку її параметрів. Цю задачу можна вирішити за допомогою методу найменших квадратів.

Провести пряму, що задовольняє рівнянню (8.10), означає знайти параметри a і b по заданих (виміряних експериментально) парах точок Y_kX_k.

Розглянемо випадок, коли похибка вимірювання аргументу ΔX є набагато меншою за похибку самої функції ΔY. У цьому випадку найкраща пряма має задовольняти наступним умовам:

1) пряма має проходити крізь центр ваги дослідних точок, визначений як точка з координатами

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k; \qquad \overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k; \tag{8.11}$$

2) сума квадратів відхилень дослідних точок від прямої має бути мінімальною

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_k-bX_k-a\right)^2=min. \tag{8.12}$$

У теорії помилок доведено, що цим умовам задовольняє пряма з наступними параметрами:

$$a=\overline{Y}-b\overline{X}; \qquad b=\frac{\overline{XY}-\overline{X}\times\overline{Y}}{\overline{X^2}-\left(\overline{X}\right)^2}, \tag{8.13}$$

$$\overline{XY}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_kY_k; \quad \overline{X^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k^2. \tag{8.14}$$

Відповідні похибки розрахунків параметрів прямої визначаються наступними виразами:

$$S_y=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_k bX_k-a\right)^2}; \quad S_a=\sqrt{\frac{\overline{X^2}}{\overline{X^2}-\left(\overline{X}\right)^2}};$$

$$S_b=\sqrt{\frac{1}{\overline{X^2}-\left(\overline{X}\right)^2}}, \tag{8.15}$$

де S_y – це похибка функції Y (смуга помилок), S_a і S_b – похибка визначення коефіцієнтів a і b відповідно.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кунце Х.-И. Методи фізичних вимірювань. М.: Мир, 1989.
2. Тейлор Дж. Вступ до теорії помилок. М.: Мир, 1985.
3. Фізичний практикум. Механіка та молекулярна фізика/ Під редакцією В.І. Івероновой. – М.: Наука, 1967.
4. Яноши Л. Теорія і практика обробки результатів вимірювань. М.: Мир, 1968.