УДК 537 (076.1)
ББК 22.33 я 73 – 4
Г 41

Гірка В.О., Гірка І.О. **Механіка.** Навчальний посібник / Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2013. – 340 с.

Посібник написано на основі лекцій з механіки, які автори читали упродовж багатьох років у Харківському університеті студентам Інституту високих технологій. Його зміст відповідає програмі з загальної фізики для студентів класичних університетів, які навчаються за напрямами «фізика» та «прикладна фізика». Значну увагу приділено математичним аспектам розв'язання задач класичної механіки: вибору моделі, що заміняє реальний фізичний об'єкт, та зручної системи координат, процедурам здобуття та розв'язання відповідних диференціальних рівнянь тощо. До кожного розділу додано питання для самоконтролю, а також задачі для проведення модульних контрольних робіт.

ISBN



ЗМІСТ

# Передмова

Підручник написаний професорами Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, які багато років читали лекції з загальної фізики студентам фізико-технічного факультету, а також фізико-енергетичного факультету та з фізики – студентам факультету комп'ютерних наук.

Наукові дослідження, які були і лишились невід'ємною, більше того, однією з основних складових виховання студентів на фізико-технічному факультеті, завжди вимагали автоматизації експерименту, якнайкращого віддаленого електронного керування фізичними процесами, вишуканого володіння математичними, в тому числі числовими, методами обробки здобутих експериментальних результатів. Все це обумовило високий рівень комп'ютеризації наукового пошуку на фізико-технічному факультеті. Але обчислювальна техніка ніколи не розглядалась на факультеті як самоціль, а лише як інструмент, хоча й дуже важливий і потужний, інструмент науковця. Багатий досвід участі випускників факультету у міжнародному науковому розподілі праці підтверджує, що зазвичай із двох дослідників успішнішим є не той, хто краще володіє обчислювальною технікою, що її застосовують для дослідження фізичного процесу, а той, хто краще розуміється на предметі дослідження.

Запропонований підручник ставить на меті не лише ознайомити студента із сукупністю знань з механіки, але й озброїти його набором прийомів і методів дослідження навколишнього світу. Ми намагались прищепити майбутнім дослідникам уважне, тремтливе ставлення до числа, яке виражає значення фізичної величини. Коли комп'ютер видає результат обчислень фізичної задачі, не слід поспішати записати його як остаточну відповідь. Спочатку слід проаналізувати його, подумати, як співвідноситься здобуте число із відомою картиною устрою світу. Комп'ютер ніколи не помиляється, але інколи помиляється програміст: чи то під час написання програми, чи то при виборі моделі фізичного явища. Здобутий результат є більш переконливим, якщо його підтверджено аналітичною оцінкою або числовим результатом, що його здобуто іншим методом.

Значну увагу при викладанні даного курсу ми намагалися приділити методу аналогій. Корисний та плідний сам по собі, метод аналогій якнайкраще пасує до тих ситуацій, коли за браком часу необхідно без застосування рутинних математичних процедур здобути потрібну математичну формулу, що описує досліджуваний фізичний процес. Крім того, цей метод добре ілюструє споріднeність фізичних явищ, які спостерігаються в різних галузях фізики, а отже, його застосування привчає студентів не боятися самостійно вивчати різні фізичні явища, застосовуючи вже звичні математичні процедури. Це прищеплює студентові смак до творчої наукової праці.

Анрі Пуанкаре[1] писав: «Учений досліджує природу не тому, що це корисно, – він займається вивченням природи, бо він у захваті від неї; і він у захваті, бо вона красива. Коли б природа не була красивою, вона не була б гідною бути досліджуваною, та коли б природа не була гідною бути досліджуваною, не варто було б жити».

Механіка – це найстаріша галузь фізики. Її закони одержано з експерименту. Але для з'ясування подробиць того, як відбуваються ті чи інші складні явища, як в найпростіший спосіб описати ці явища, в нагоді стає математика. Цікаво, що Ньютон, займаючись проблемами створення основних засад механіки, одночасно брав активну участь у розробці основ диференціального та інтегрального числення.

Механіка – наука про рух та рівновагу тіл. Рух матерії (в широкому розумінні) – це будь-яка її зміна в часі. Механічний рух – це найпростіша форма руху, яка відповідає переміщенню механічного тіла відносно інших тіл у просторі з часом. В нашому курсі при теоретичному вивченні законів механіки

[1] Пуанкаре́ (Poincaré) Жуль Анрі́ (1854-1912) – французький математик, фізик, філософ і теоретик науки. Голова Паризької академії наук і Французької академії. Член Лондонського королівського товариства, Петербурзької АН, президент Французького астрономічного товариства, член Бюро довгот у Парижі.



використовуватимуться дві математичні абстракції замість конкретних механічних тіл: матеріальна точка та абсолютно тверде тіло.

Матеріальна точка – це макроскопічне механічне тіло (його розміри можна визначити простими механічними методами порівняння з еталоном довжини), форма якого не має значення, а розміри якого є нехтовно малими (їх можна не брати до уваги) в тому русі, який досліджується у даній задачі. При цьому важливими є відносні розміри тіла у порівнянні з характерними розмірами задачі, наприклад, довжиною траєкторії, вздовж яких відбувається рух, а також характер руху. Більше того, один і той самий механічний об'єкт у різних задачах може описуватися різними абстракціями. Цікаво, що при вивченні прямолінійного поступального руху завжди можна не брати до уваги розміри тіла, спостерігаючи за рухом однієї точки, яка знаходиться, наприклад, у центрі мас цього тіла. Розглянемо для прикладу складний обертальний рух Землі: вона бере участь в обертальному русі навколо Сонця (при цьому радіус земної орбіти $R_{ЗС} \approx 1{,}5\times10^8$ км) та в обертальному русі навколо власної осі (при цьому характерним масштабом є радіус Землі $R_З \approx 6{,}4\times10^3$ км). Розглянемо дві різні задачі: Земля рухається по орбіті навколо Сонця та Земля обертається навколо власної осі. В умовах першої задачі Земля є матеріальною точкою, бо $R_{ЗС} >> R_З$, а для випадку обертання навколо власної осі Земля вже є не матеріальною точкою, а може описуватися (з певною точністю) як абсолютно тверде тіло, тобто як сукупність матеріальних точок, відстань між якими не змінюється з часом (у нульовому наближенні) у процесі руху (визначення та детальне обговорення термінів: центр мас, абсолютно тверде тіло буде надано пізніше).

Рух матеріальної точки є повністю описаним, якщо заданий її закон руху, або іншими словами, відомо її положення в будь-який момент часу, тобто задано її радіус-вектор, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, як функцію часу. Радіус-вектором матеріальної точки називають вектор, що поєднує початок системи відліку з матеріальною точкою.

Щоб задати положення матеріальної точки, слід спочатку визначитися з системою відліку. Для того, щоб задати систему відліку, слід, по-перше, визначити тіло відліку, по-друге, прив'язати до нього систему координат, визначивши масштаб (одиницю довжини), а також установити хронометр (прилад для вимірювання часу). Тілом відліку зветься спеціально обране тіло або система кількох тіл, відносно яких в обраній системі координат, використовуючи обраний масштаб, визначається розташування досліджуваного тіла. Разом з обраною системою координат тіло відліку утворює просторову систему відліку. Оскільки в даному курсі вивчається класична нерелятивістська механіка, то вважається, що час тече однаково в усіх системах відліку. Тому, додавши до просторової системи відліку прилад вимірювання часу, отримуємо повну систему відліку.

Найчастіше для опису положення матеріальної точки в просторі використовують одну з ортогональних систем координат (їхні осі є взаємно перпендикулярними): декартову, циліндричну або сферичну. Вибір системи координат визначається з міркувань симетрії задачі та найбільшої зручності для користувача: що менше скалярних рівнянь потрібно для опису руху, то краще. В даному курсі механіки буде використано праву координатну систему, для ортів (одиничних базисних векторів) якої має місце наступний зв'язок у вигляді векторного добутку: $\left[\vec{e}_1, \vec{e}_2\right] = \vec{e}_3$ (детальніше про векторний добуток ітиметься в параграфі 1.1.1 цих лекцій). Через тривимірність навколишнього простору положення кожної матеріальної точки в обраній декартовій системі відліку можна задати трьома координатами, наприклад, проекціями радіус-вектора точки на осі обраної системи координат: *X*, *У*, *Z*.

Згідно з програмою навчального курсу "загальна фізика" до підручнику включено наступні теми: 1) основні поняття кінематики, 2) основні поняття та закони динаміки матеріальної точки, 3) вільний рух системи матеріальних точок, 4) силове поле, 5) механічний рух матеріальної точки в неінерціальних системах відліку, 6) обертальний рух абсолютно твердого тіла, 7) механічні коливання. Незважаючи на те, що перші теми з вище зазначених вивчалися певною мірою в середній школі, не



слід думати, що у запропонованому курсі немає чого вчити, що сесію можна пройти, користуючись тільки "шкільним багажем знань". Класичну механіку (механіку Ньютона) слід буде заново вивчити на якісно новому математичному ґрунті. Це корисно як з точки зору глибшого розуміння механіки, так і з точки зору отримання практичного досвіду із застосування математичних знань, закріплення теоретичного матеріалу, який викладається в курсах математичного аналізу та аналітичної геометрії. Це дасть можливість побачити внутрішній зв'язок між різними підрозділами механіки, побачити, що ці різні її підрозділи є єдиною наукою, яку побудовано на спільних принципах, що різні типи механічного руху описуються спільними математичними методами. Аналізуючи результати навчання багатьох випусків студентів, хотілося б застерегти першокурсників від спрощеного розуміння мети навчання, від такої думки: що, буцімто, для здобуття знань з фізики на рівні, дещо вищому за середній, досить буде вивчити тільки основні формули та знати, у яких випадках слід використовувати ту чи іншу формулу. Навпаки, найбільшу цінність становить знання методики розв'язання задач із різних розділів механіки. Видатний вчений Арнольд Зоммерфельд[2] казав: «Формули мають бути сумою, результатом наших знань про об'єкт дослідження, а не джерелом цих знань».

Досвід багатьох поколінь першокурсників свідчить, що однією з основних проблем під час навчання на першому курсі є невміння застосовувати математичні знання до розв'язання фізичних задач. Часто важко зрозуміти з першого разу, що швидкість матеріальної точки це є перша похідна від координати матеріальної точки за часом, бо у середній школі швидкість визначалась за допомогою операції ділення (а те, що то були середні значення швидкості, вже забулося). Тому курс механіки

[2] Зоммерфельд (Sommerfeld) Арнольд Іоганнес Вільям (1868-1951) – німецький фізик, основоположник атомної та квантової фізики, педагог. Учнями Зоммерфельда були нобелівські лауреати В. Гейзенберг та В. Паулі. Зоммерфельд бул членом баварської академії наук, Лондонського королівського товариства в Лондоні. Його відзначено медалями Гельмгольца, Макса Планка та Лоренца.

починається з вивчення «Кінематики», де добре відомі механічні терміни (швидкість, прискорення і таке інше) подано в новій редакції, спираючись на поняття про похідну та первісну функції, про вектори та їхні властивості, що дасть можливість, окрім усього іншого, здобути певні практичні навички з кількох основних розділів аналітичної геометрії та диференціального числення.

## *1. Основні поняття кінематики*

Кінематика матеріальної точки визначає зв'язок між положенням, швидкістю та прискоренням тіл, використовуючи для цього математичний апарат теорії диференціального числення та аналітичної геометрії. Інакше кажучи, кінематика вивчає характеристики та особливості механічного руху, не беручи до уваги: які фізичні причини цього руху, яка маса та форма того механічного об'єкта, рух якого вивчається. При цьому вважається, що розмірами та формою об'єкта за умов конкретної задачі можна знехтувати.

### *1.1. Про використання знань вищої математики при розв'язанні фізичних задач*

Як відомо, мовою фізики є математика. Цікаво відзначити, що засновник класичної механіки (об'єкти дослідження якої мають характерні розміри значно більші за атомні, а швидкість руху яких є значно меншими за швидкість світла у вакуумі) І. Ньютон зробив також величезний внесок у різні галузі вищої математики.

Більшість механічних величин є векторами, тобто об'єктами, що характеризуються не лише довжиною (модулем) вектора, але й його орієнтацією у просторі відносно базисних осей обраної системи координат. Так, положення матеріальної точки в обраній системі координат задається радіус-вектором, зміну радіус-вектора з часом визначає вектор швидкості. При дослідженні обертального руху користуються, наприклад, векторами кутової швидкості, моментом імпульсу тощо. Для практичних цілей зручно користуватися проекціями цих векторів на осі обраної системи координат, які є скалярними величинами. Проекція вектора $\vec{R}$ на орт $\vec{e}_j$ обраної системи координат визначається скалярним добутком $\left(\vec{R},\vec{e}_j\right)=R_j$ $=\left|\vec{R}\right|\left|\vec{e}_j\right|cos(\angle\vec{R},\vec{e}_j)$.

Взагалі, за допомогою скалярного добутку можна визначити проекцію будь-якого вектора $\vec{A}$ на напрямок довільного вектора $\vec{B}$: $A_{\vec{B}}=(\vec{A},\vec{B})/\left|\vec{B}\right|$. Скалярний добуток будь-яких двох векторів $\vec{C}$ та $\vec{D}$ у тривимірній ортогональній системі координат визначається як сума: $\left(\vec{C},\vec{D}\right)=C_1D_1+C_2D_2+C_3D_3$, тут $C_j$ і $D_j$ – проекції векторів на відповідні базисні осі $\vec{e}_j$ обраної системи координат. Через скалярний добуток у механіці обчислюється також і робота $\delta A=(\vec{F},d\vec{l})$, де $d\vec{l}$ – це вектор елементарного переміщення, $\vec{F}$ – це сила, що виконує дану роботу.

Операція векторного добутку широко використовується в задачах про обертальний рух. Наприклад, момент зовнішньої сили $\vec{M}$, що діє на абсолютно тверде тіло (АТТ), яке здатне обертатися навколо закріпленої осі, визначається як векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}$, що проведено в найкоротший спосіб від осі обертання до точки АТТ, до якої прикладено силу $\vec{f}$: $\vec{M}=\left[\vec{r},\vec{f}\right]=\vec{e}_\perp\left|\vec{r}\right|\left|\vec{f}\right|sin(\angle\vec{r},\vec{f})$, де $\vec{e}_\perp$ – це одиничний вектор, що направлений перпендикулярно до площини, в якій розташовано вектори $\vec{r}$ та $\vec{f}$. При цьому з кінця вектора $\vec{e}_\perp$ найкоротший поворот від вектора $\vec{r}$ до вектора $\vec{f}$ виглядає як такий, що виконується в додатному напрямку кутів, тобто проти стрілки годинника. Як кажуть, вектори $\vec{r}$, $\vec{f}$ та $\vec{e}_\perp$ складають праву трійку (див. рис. 1.1). З визначення видно, що абсолютна величина векторного добутку дорівнює площі паралелограма, сторони якого утворені векторами, що перемножуються.

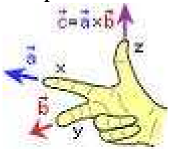



Рис. 1.1. Вектори $\vec{a}$ , $\vec{b}$ і $\vec{c}$ складають праву трійку

Зверніть увагу, що перестановка місць векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у векторному добутку призводить до зміни напрямку результуючого вектора на протилежний, тобто: $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$.

Як порахувати результат векторного добутку по відомих векторах, що перемножуються? Нехай нам задані проекції векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у декартових координатах: $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)\equiv\ a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)\equiv b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y+b_z\vec{e}_z$. Тут $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ і $\vec{e}_z$ – це орти, тобто одиничні вектори, довжина кожного з них дорівнює одиниці, а напрямок співпадає з напрямком відповідної осі, наприклад, орт $\vec{e}_x$ має напрямок осі $x$. Інколи в підручниках можна зустріти інші позначення ортів декартової системи координат: $\vec{i}$ , $\vec{j}$ і $\vec{k}$ . Так прийнято позначати ті самі іксовий, ігрековий та зетовий орти: $\vec{i}\equiv\vec{e}_x$, $\vec{j}\equiv\vec{e}_y$, $\vec{k}\equiv\vec{e}_z$. Тоді результат векторного добутку $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ можна порахувати за допомогою визначника:

$$\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

який розкривається за такими простими правилами, які вивчаються в курсі вищої математики. За визначенням:

$$\vec{c}=\begin{matrix}\vec{e}_x\left(a_yb_z-a_zb_y\right)+\\ \vec{e}_y\left(a_zb_x-a_xb_z\right)+\\ \vec{e}_z\left(a_xb_y-a_yb_x\right).\end{matrix}$$

Ми навмисне записали тут три доданки один над одним, аби показати наступне. Кожен наступний доданок можна отримати з попереднього, провівши циклічну перестановку індексів: $x\to y$,



$y\to z$, $z\to x$. (Така перестановка дістала назву циклічної, бо її можна представити у вигляді ланцюжка (див. рис. 1.2). Дійсно, коли взяти, наприклад, іксову складову векторного добутку, $\vec{e}_x\left(a_yb_z-a_zb_y\right)$ і замінити в ній індекс $x$ на $y$, $y$ на $z$ і $z$ на $x$, то дістанемо наступну, ігрекову складову: $\vec{e}_y\left(a_zb_x-a_xb_z\right)$… Додаткова інформація про операції з векторами міститься у параграфі 1.3. Зазначимо, що жодною циклічною перестановкою праву трійку векторів не можна звести до лівої, тобто такої, в якій найкоротший поворот від першого вектора до другого з кінця третього виглядає таким, що відбувається за стрілкою годинника, тобто, у від'ємному напрямку кутів (див. рис. 1.3).

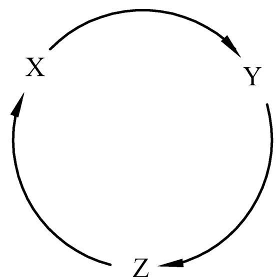



Рис. 1.2. Циклічна перестановка

Коли розв'язуєш задачі про механічний рух, доводиться мати справу з диференціальними рівняннями. Наприклад, основне рівняння динаміки поступального руху, тобто, другий закон Ньютона, $d\vec{p}/dt=\sum\vec{F}$, є диференціальним рівнянням першого порядку. Задачі про механічний рух залежно від умов можна поділити на дві групи: прямі та зворотні задачі механіки. Такий поділ пов'язано з використанням або прямої, або зворотної математичної дії, тобто знаходиться або похідна функція від відомої функції шляхом диференціювання, або означений інтеграл від відомої функції.

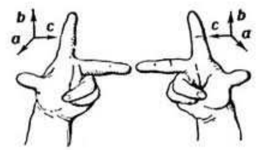



Рис. 1.3. Ліва і права трійки векторів принципово не зводяться одна до одної

Нехай, наприклад, з умов задачі відома швидкість $\vec{v}$ прямолінійного руху матеріальної точки, а потрібно знайти її прискорення. Це випадок прямої задачі кінематики, її розв'язують шляхом диференціювання вектора швидкості за часом: $\vec{a}=d\vec{v}/dt$. При цьому слід пам'ятати, що при оптимальному виборі системи координат буде отримано одне скалярне рівняння для проекції швидкості на обрану вісь. А в інших випадках буде два або три вирази для проекцій швидкості на осі координат в обраній системі відліку, і процедуру диференціювання потрібно буде застосовувати до всіх цих виразів, щоб обчислити явні вирази для усіх проекцій прискорення.

Якщо ж у задачі потрібно знайти залежність координати матеріальної точки від часу за відомою залежністю швидкості від часу, то така задача є зворотною, і розв'язується вона шляхом інтегрування рівняння: $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$. Для цього спочатку запишемо вираз для елементарного переміщення $d\vec{r}$ (диференціала радіус-вектора): $d\vec{r} \equiv \vec{\upsilon}dt$. Далі, обчислюючи неозначений інтеграл $\int d\vec{r} = \int \vec{\upsilon}dt$, отримуємо: $\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}dt + \vec{r}(t_0)$, де $\vec{r}(t_0)$ – стала інтегрування, яка має в цьому випадку простий фізичний зміст: положення матеріальної точки у початковий момент часу.

При розв'язанні зворотних задач слід пам'ятати, що неозначений інтеграл обчислюється з точністю до константи, тобто розв'язок диференціального рівняння *n*-го порядку містить *n* констант інтегрування. Для визначення цих констант слід застосувати початкові умови. Наприклад, нехай для випадку одновимірного руху відомо, що в момент часу $t_0$ координата матеріальної точки мала значення $x(t_0)=x_0$, а механічний рух є рівномірним, тобто, відбувся зі сталим значенням швидкості $\upsilon(t) = \upsilon_1$. Тоді $x = \int \upsilon_1 dt = \upsilon_1 t + const$. Використання початкових умов дозволяє записати: $x(t_0) = \upsilon_1 t_0 + const$. Звідси $const = x_0 - \upsilon_1 t_0$. Таким чином, залежність координати від часу для даної задачі має такий вигляд: $x(t) = (t - t_0)\upsilon_1 + x_0$.

Розв'язуючи механічні задачі експериментальним шляхом (або в числовий спосіб), слід рахуватися з тим, що всі фізичні величини при цьому визначаються внаслідок вимірювання, а всі фізичні вимірювання супроводжуються



похибками. А при числовому способі розв'язання задачі всі величини та процедури обчислення виконуються з певною точністю. Ця обставина унеможливлює граничний перехід від малих значень часу $\Delta t$ та координати $\Delta x$ до нуля. В експериментальній практиці, починаючи з певного малого значення $\Delta t$, частка $\Delta x / \Delta t$ в межах досягнутої точності вимірювання $\Delta x$ перестає змінюватися монотонно або навіть починає змінюватися хаотично. Тому подальше зменшення проміжку часу $\Delta t$ не має сенсу. Це обумовлено тим, що відносна точність довільного вимірювання є тим меншою (тим гіршою), чим меншою є величина, що вимірюється. Наприклад, досить легко виміряти 1 *м* з точністю до 1 *мм*, тобто відносна точність такого вимірювання становить: $10^{-3}$. А спробуйте-но виміряти 1 *мм* з такою ж відносною точністю! Для цього знадобиться мікрометр, прилад з поділками в $10^{-6}$ м.

Через похибки вимірювання експериментальне визначення дійсної швидкості (на відміну від математичної границі: $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$) можна здійснити лише приблизно, ототожнюючи цю величину з часткою малих, але скінченних приростів $\upsilon \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Ці скінченно малі прирости координати та часу, частка яких з певною точністю апроксимує похідну $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, у фізиці називають фізично нескінченно малими величинами та оперують з ними, як з математичними диференціалами.

Наведемо ще один приклад, який ілюструє різницю аналітичного та експериментального підходів до визначення фізичних величин у механіці. З точки зору математики густина речовин визначається так: $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$, тут $V$ – це об'єм. З точки зору фізики це визначення втрачає сенс через атомну будову речовин. Об'єм речовини має бути ***макро***величиною, щоб у ньому знаходилося багато частинок (атомів). А з іншого боку це має бути ***мікро***величина, щоб значення $\rho$ не залежало від форми, розмірів та об'єму речовини. Таким чином, зменшення величини частини досліджуваного механічного об'єкта має критичну межу, що має чисто фізичну природу: розміри об'єктів класичної механіки мають перевищувати характерні молекулярні розміри.

## *1.2. Швидкість та прискорення під час прямолінійного руху*

Прямолінійним називають такий механічний рух, при якому усі точки об'єкта, який бере участь в такому русі, рухаються вздовж прямих ліній, що є паралельними одна до одної. Тому у цьому випадку, незалежно від маси об'єкта, його форми та розподілу маси по об'єму, дослідження руху конкретного механічного об'єкта можна замінити дослідженням руху матеріальної точки.

Для прямолінійного руху положення матеріальної точки у просторі можна визначити однією координатою, наприклад, $x = x(t)$, бо такий рух відбувається вздовж прямої лінії. При цьому ми обираємо вісь *x* такою, що співпадає за напрямком із напрямком руху тіла. Звичайно, якщо невдало обрати просторову систему координат, то може знадобитися дві або навіть три координати. Тоді слід буде розв'язувати систему, відповідно, двох або трьох скалярних рівнянь, які отримують шляхом знаходження проекцій вектора, який задано в конкретній задачі, на обрані осі координат і які, зрештою, виявляються лінійно залежними. Але будемо вважати, що систему координат вибрано в оптимальний спосіб.

Якщо в момент часу $t_0$ положення матеріальної точки визначалося координатою $x_0 = x(t_0)$, то за часовий проміжок $\Delta t = t_2 - t_0$ матеріальна точка в процесі прямолінійного руху здійснить переміщення: $\Delta x = x_2 - x_0$, де $x_2 = x(t_2)$ (див. рис. 1.4). Переміщення вважається позитивним, якщо координата кінцевого положення матеріальної точки є більшою за величину її координати в початковому положенні, $x_2 > x_0$, та негативним – у



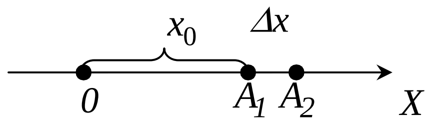



Рис. 1.4. До визначення швидкості при прямолінійному русі

протилежному випадку. Оскільки в даному підрозділі досліджується прямолінійний рух, то всі векторні величини, що описують механічний рух за цих умов, матимуть абсолютну величину, яка співпадатиме з модулем їхньої проекції на вісь $\vec{x}$, а напрямок визначатиметься знаком проекції.

Частка переміщення $\Delta x$, яке виконано механічним матеріальною точкою, до проміжку часу $\Delta t$, протягом якого воно відбулося, зветься середньою швидкістю руху цієї матеріальної точки:

$$\langle \upsilon_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \upsilon_x(t)\,dt . \qquad (1.1)$$

При цьому $\Delta t \neq 0$, бо в іншому випадку операція ділення є невизначеною. Проте $\Delta t$ може прямувати до нуля, тому середня швидкість $\langle \upsilon_x \rangle = f(t, \Delta t)$ є функцією не лише моменту часу $t_0$, але й величини проміжку часу $\Delta t$, протягом якого відбувалося переміщення.

Цікаво, що коли $\Delta t \to 0$, то величина переміщення $\Delta x \to 0$ також прямує до нуля (це добре зрозуміло, якщо проаналізувати інтегральний вираз для середньої швидкості). Але при цьому значення частки $\Delta x / \Delta t$ прямує до певної граничної величини, яка залежить від моменту часу $t_0$, для якого виконується обчислення величини цієї частки, але не залежить від величини проміжку часу $\Delta t$, протягом якого відбувалося переміщення! Ця гранична величина зветься дійсною (або миттєвою) швидкістю матеріальної точки в момент часу $t_0$ :

$$\upsilon_x(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\Big|_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}\Big|_{t_0} \equiv \frac{dx}{dt}\Big|_{t_0} . \qquad (1.2)$$

Швидкість вимірюється в метрах за секунду: $[\upsilon]$=м/с.

Такого типу граничні величини часто зустрічаються в математичному аналізі, звуться вони похідними від функції $x(t)$ за її аргументом $t$ в момент часу $t_0$. Похідну від координати саме за часом прийнято позначати точкою над символом координати: $\dot{x}(t)$. Слід наголосити, що швидкість матеріальної точки – це є похідна від $x$ саме за часом, бо взагалі кажучи, координата може бути функцією кількох змінних, тоді у студентів, які не мали достатньої практики з фізики та математики в середній школі, можуть виникати непорозуміння при вживанні такого важливого терміна, як похідна, особливо на початку курсу.

При прямолінійному русі напрямок переміщення механічного об’єкта не змінюється (воно відбувається вздовж заданої координатної осі), тому швидкість такого руху в певний довільний момент часу визначатиметься функцією, що є похідною тільки від цієї координати за часом. Оскільки зміна часу є величиною додатною, то напрямок швидкості прямолінійного руху визначається знаком переміщення. Якщо координата механічного об’єкта зросла в процесі руху, то $\upsilon(t) > 0$ (це спостерігається за умов додатного переміщення, $\Delta x > 0$), а при від’ємному переміщенні $\Delta x < 0$ маємо, відповідно, $\upsilon(t) < 0$.

Прискорення матеріальної точки в момент часу $t_*$ при прямолінійному русі визначається як похідна від швидкості руху за часом:

$$a_x(t_*) = \frac{d\upsilon_x}{dt}\bigg|_{t_*} = \frac{d^2x}{dt^2}\bigg|_{t_*} . \qquad (1.3)$$

Тобто для прямолінійного руху прискорення є першою похідною від швидкості за часом і другою похідною від координати за часом. Для прямолінійного руху прискорення може бути направлено паралельно або антипаралельно до вектора швидкості, в залежності від того, чи зростає швидкість з часом, чи зменшується, відповідно. Вимірюють його в метрах на секунду в квадраті: [$a$]=м/с$^2$.

Ще раз звертаємо увагу на необхідність зазначати змінну, за якою відбувається знаходження похідної функції. Як



видно з формули (1.1.2), швидкість можна розглядати як функцію або часу, або координати. Тому для уникнення можливих непорозумінь слід вказувати, за якою змінною відбувається диференціювання. Саме через цю обставину для позначень похідних функцій в нашому курсі використовуються позначки Лейбниця, з яких, по-перше, дуже чітко видно: від якої функції обчислюється похідна та за яким параметром це відбувається, і по-друге, можна чітко побачити зв'язок похідної функції з її диференціалом та диференціалом її аргументу, за яким визначається зміна функції. При цьому похідну в жодному разі не можна розглядати як частку диференціалів.

На практиці часто не вдається задати координату та швидкість руху у вигляді аналітичних виразів, функцій від часу. Тоді на допомогу приходить графічний спосіб описання цих функцій. Якщо намалювати графік координати $x = x(t)$ (див. рис. 1.5), а потім провести дотичну до кривої $x = x(t)$ в певній точці $x_0 = x(t_0)$, тоді, обчисливши тангенс кута нахилу $\alpha$ між віссю абсцис (віссю часу) та дотичною, можна вирахувати швидкість в цей момент часу

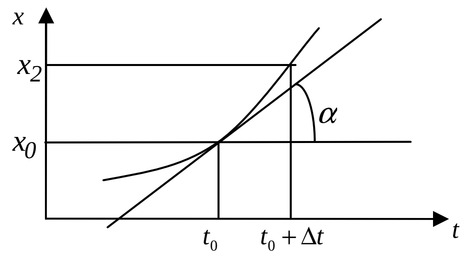



Рис. 1.5. До питання про геометричний зміст похідної

$$\upsilon_x(t_0) = tg(\alpha) = dx/dt\big|_{t_0} . \qquad (1.4)$$

Аналогічно, маючи графік швидкості $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$, таким методом можна побудувати графік прискорення. Якщо провести дотичну лінію до кривої $\upsilon_x(t)$ в обраний момент часу $t = t_0$, то кут $\beta$ між віссю часу та дотичною можна використати для обчислення прискорення:

$$a_x(t_0) = tg(\beta) = d\upsilon_x/dt\big|_{t_0} . \qquad (1.5)$$

Таким чином, геометричний сенс похідної функції як тангенс кута нахилу між дотичною лінією до графіка даної функції та віссю часу може бути успішно використаним при знаходженні швидкості та прискорення прямолінійного руху, якщо відома графічна залежність координати цього руху від часу.

Приклади графічного розв'язання задач кінематики наведено в параграфі 1.8.

Визначення швидкості за відомою залежністю координати від часу разом із визначенням прискорення за відомою залежністю швидкості від часу складають зміст прямої задачі кінематики. Зворотна задача кінематики полягає у визначенні поточної швидкості $\upsilon_x(t)$ за відомими початковою $\upsilon_x(t_0)$ швидкістю та залежністю прискорення від часу $a_x(t)$ та/або визначенні поточної координати $x(t)$ за відомими початковою координатою $x(t_0)$ та залежністю швидкості від часу $\upsilon_x(t)$:

$$\upsilon_x(t)=\upsilon_x(t_0)+\int_{t_0}^{t} a_x(t)dt; \quad x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} \upsilon_x(t)dt. \tag{1.6}$$

У разі, коли залежності $a_x(t)$ та/або $\upsilon_x(t)$ задано графічно, для визначення поточної швидкості $\upsilon_x(t)$ та/або поточної координати $x(t)$ можна скористатися геометричним змістом означеного інтеграла як площі під кривою, якою графічно описується підінтегральна функція.

## *1.3. Швидкість та прискорення при довільному криволінійному русі*

У випадку довільного тривимірного руху матеріальної точки визначення кінематики, які наведено у попередньому параграфі для частинного випадку прямолінійного руху узагальнюються в наступний спосіб.

Якщо відомий закон руху матеріальної точки $\vec{r}(t)$, то середня швидкість, з якою рухалась матеріальна точка від моменту часу $t_0$ протягом проміжку $\Delta t$, визначається аналогічно



до (1.1) як частка переміщення, яке здійснила матеріальна точка протягом $\Delta t$, до цього проміжку часу:

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle=\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\vec{\upsilon}(t)dt\,. \tag{1.7}$$

Зазначимо, що коли тіло за час $\Delta t$ повернулося до вихідної точки простору, переміщення $\Delta\vec{r}(t_0,\Delta t)=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$ дорівнює нулю, внаслідок чого значення вектора середньої швидкості також дорівнює нулю.

Миттєва (дійсна) швидкість у випадку довільного тривимірного руху визначається за законом руху (порівняйте з (1.2)) в наступний спосіб:

$$\vec{\upsilon}(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\Big|_{t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}\Big|_{t_0}\equiv\frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_{t_0}. \tag{1.8}$$

Таке визначення спричиняє те, що швидкість є дотичною до траєкторії. Траєкторією називають геометричне місце точок, які проходить матеріальна точка при своєму русі.

Прискорення за визначенням дорівнює (порівняйте з (1.3)):

$$\vec{a}(t_0)=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\Big|_{t_0}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_{t_0}. \tag{1.9}$$

Якщо відома початкова швидкість $\vec{\upsilon}(t_0)$ (швидкість, з якою матеріальна точка рухалась в момент часу $t_0$), а також залежність прискорення від часу $\vec{a}(t)$, то швидкість в довільний момент часу визначається в наступний спосіб (порівняйте з (1.6)):

$$\vec{\upsilon}(t)=\vec{\upsilon}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)dt\,. \tag{1.10}$$

Якщо відоме початкове положення матеріальної точки $\vec{r}(t_0)$, а також залежність швидкості від часу $\vec{\upsilon}(t)$, то положення матеріальної точки в довільний момент часу визначається так (порівняйте з (1.6)):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}(t)dt\,. \quad (1.11)$$

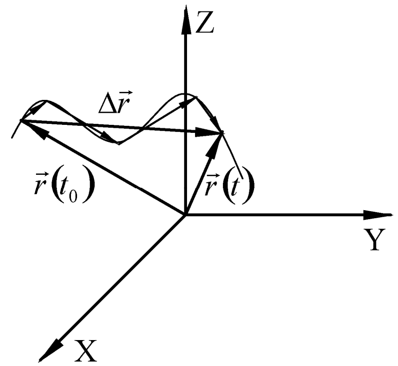


Рис. 1.6. До розв'язання зворотної задачі кінематики

Вираз (1.11) має простий і наочний зміст (див. рис. 1.6). Положення матеріальної точки $\vec{r}(t)$ можна знайти, якщо до радіус-вектора $\vec{r}(t_0)$, що характеризує її положення в початковий момент часу $t_0$, додати переміщення $\Delta\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}(t)dt$, що його здійснила матеріальна точка протягом проміжку часу $t_0 \div t$. Розіб'ємо проміжок часу $t_0 \div t$ на нескінченно велику кількість нескінченно коротких інтервалів: $t_0 \div t_1$, $t_1 \div t_2$, $t_2 \div t_3$… Протягом кожного з цих коротких інтервалів матеріальна точка здійснює нескінченно малі переміщення: $\Delta\vec{r}_1$, $\Delta\vec{r}_2$, $\Delta\vec{r}_3$… Ці інтервали є настільки короткими, що протягом окремого інтервалу швидкість матеріальної точки можна вважати незмінною, тому кожне окреме переміщення можна порахувати за формулами рівномірного руху: $\Delta\vec{r}_1 = \vec{\upsilon}(t_1)\times(t_1 - t_0)$, $\Delta\vec{r}_2 = \vec{\upsilon}(t_2)\times(t_2 - t_1)$, $\Delta\vec{r}_3 = \vec{\upsilon}(t_3)\times(t_3 - t_2)$… Якщо позначити інтервали часу: $(t_1 - t_0) \equiv \Delta t_1$, $(t_2 - t_1) \equiv \Delta t_2$, $(t_3 - t_2) \equiv \Delta t_3$…, то ці малі переміщення: $\Delta\vec{r}_1 = \vec{\upsilon}(t_1)\times\Delta t_1$, $\Delta\vec{r}_2 = \vec{\upsilon}(t_2)\times\Delta t_2$, $\Delta\vec{r}_3 = \vec{\upsilon}(t_3)\times\Delta t_3$… стають зовсім схожими на підінтегральний вираз $\vec{\upsilon}(t)dt$ в (1.11).



Вираз $\int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}(t)dt$ є інтегралом, тобто (за визначенням) сумою, яка складається яз нескінченно великої кількості нескінченно малих доданків. У даному випадку переміщення, що його здійснила матеріальна точка протягом усього проміжку часу $t_0 \div t$, складається з нескінченно великої кількості нескінченно малих переміщень, які здійснила матеріальна точка протягом нескінченно коротких інтервалів : $t_0 \div t_1$, $t_1 \div t_2$, $t_2 \div t_3$…, з яких складається $t_0 \div t$.

Довжину траєкторії називають пройденим шляхом:

$$s(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{\upsilon}(t)|\,dt\,. \quad (1.12)$$

Визначення (1.12) у вигляді інтегралу означає, що пройдений шлях є сумою, яка складається з нескінченно великої кількості доданків, кожен із яких є довжиною нескінченно короткого переміщення: $|\Delta\vec{r}_1| = |\vec{\upsilon}(t_1)|\times\Delta t_1$, $|\Delta\vec{r}_2| = |\vec{\upsilon}(t_2)|\times\Delta t_2$, $|\Delta\vec{r}_3| = |\vec{\upsilon}(t_3)|\times\Delta t_3$…

Звернемо увагу на аналогію між радіус-вектором і швидкістю. Для цього почнемо з того, що введемо простір, у якому вздовж осей відкладено проекції швидкостей $\upsilon_x$, $\upsilon_y$ і $\upsilon_z$ на осі декартової системи (див. рис. 1.7). Такий простір прийнято

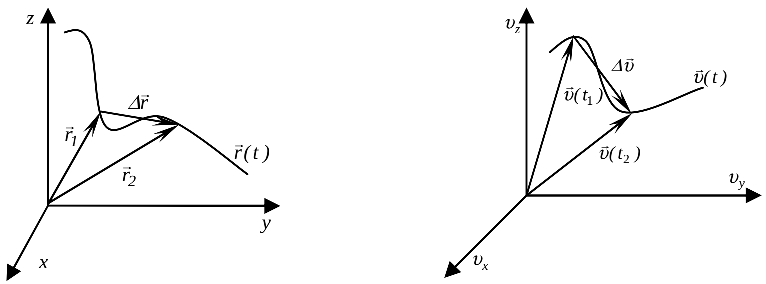


Рис. 1.7. Аналогія між радіус-вектором і вектором швидкості

називати фазовим простором швидкостей. Швидкість матеріальної точки виглядає в такому фазовому просторі як точка з координатами $\vec{v}(t)=(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$, про яку кажуть, що це – швидкісна точка.

Геометричне місце точок, як проходить швидкісна точка у фазовому просторі, називають годографом швидкості. Якщо тіло є нерухомим, годограф швидкості – це точка в початку координат фазового простору. Коли тіло рухається рівномірно, годограф швидкості є точка, яка не співпадає з початком координат. Годограф у вигляді променя відповідає рівноприскореному руху. Коли матеріальна точка рухається рівномірно по окружності радіусу $R$, її годограф виглядає як окружність із радіусом $\omega R$, де $\omega$ – це кутова швидкість руху. Аналогічно до того, як швидкість є дотичною до траєкторії, так і прискорення є дотичним до годографа.

Отже, можна казати про аналогію між радіус-вектором і вектором швидкості:

реальний простір ↔ фазовий простір,
радіус-вектор ↔ вектор швидкості,
траєкторія ↔ годограф,
швидкість ↔ прискорення.

## *1.4. Кут як зручна координата при вивченні руху матеріальної точки по колу*

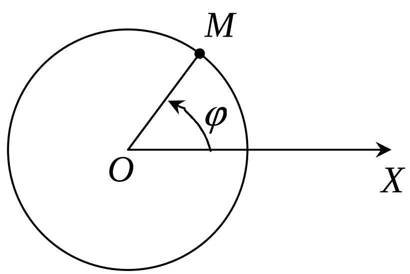


Рис. 1.8. До визначення кутової швидкості

Довільний криволінійний рух можна уявити собі як рух по колу зі змінними центром і радіусом. Коли матеріальна точка $M$ рухається по колу (див. рис. 1.8), то її положення визначається азимутальним кутом $\varphi(t)$ в полярній системі координат. Кут



$\varphi$ відраховується від певної осі, що з'єднує центр кола та початкове положення матеріальної точки на колі, та обраховується в радіанах: [$\varphi$]=рад. Тоді кутовою швидкістю $\omega$ зветься перша похідна від $\varphi(t)$ за часом: $\omega = d\varphi / dt$. Кутова швидкість вимірюється в радіанах за секунду: [$\omega$]=рад/с. Зверніть увагу на те, що вектори $\vec{\varphi}$ та $\vec{\omega}$ мають напрямок, перпендикулярний до площини, в якій лежить траєкторія руху даної матеріальної точки. Якщо при такому русі зміна $\varphi(t)$ відбувається в напрямку за стрілкою годинника, то напрямок вектора $\vec{\omega}$ співпадає з напрямком погляду спостерігача на площину обертання («входить» у неї). А якщо зміна $\varphi(t)$ відбувається в напрямку проти руху стрілки годинника, то вектор $\vec{\omega}$ орієнтовано на спостерігача, перпендикулярно площині обертання, тобто вектор $\vec{\omega}$ «виходить» з цієї площини. За фізичним змістом вектор $\vec{\omega}$ вказує напрямок осі, навколо якої відбувається обертання, а модуль $|\vec{\omega}|$ задає кут в радіанах, на який відбувається поворот за одиницю часу.

Аналогічно до випадку прямолінійного руху можна ввести для руху по колу термін «кутове прискорення»:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (1.13)$$

Вектор кутового прискорення (аналогічно до випадку прямолінійного руху) орієнтовано паралельно вектору $\vec{\omega}$, якщо модуль кутової швидкості зростає з часом, або антипаралельно вектору $\vec{\omega}$ у випадку зменшення модуля кутової швидкості з часом. Кутове прискорення вимірюється в радіанах на секунду в квадраті: [$\varepsilon$]=рад/с$^2$.

Зворотна задача у випадку руху по колу полягає у визначенні поточної кутової швидкості $\omega(t)$ за відомими початковою кутовою швидкістю $\omega(t_0)$ та залежністю кутового прискорення $\varepsilon(t)$ від часу та/або визначенні поточного кута $\varphi(t)$

за відомими початковим значенням кута $\varphi(t_0)$ та залежністю кутової швидкості $\omega(t)$ від часу:

$$\omega(t)=\omega(t_0)+\int_{t_0}^{t}\varepsilon(t)dt,\quad \varphi(t)=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}\omega(t)dt. \qquad (1.14)$$

Наприкінці параграфу 1.1.3 ми розглядали аналогію між радіус-вектором і швидкістю. У фізиці, на відміну від більшості інших точних наук, часто вживають метод аналогій. Метод аналогій, зокрема, широко використовують у механіці. Він полягає у тому, що рівняння руху з точністю до заміни змінних є подібними одне одному для різних типів руху, співвідношення між основними та похідними змінними, що описують механічний рух, є подібними одне одному для різних типів руху. Як бачимо, існують аналогії між поступальним та обертальним рухами:

1. аналогія між лінійними та кутовими координатами $x\leftrightarrow\varphi$,
2. аналогія між лінійною та кутовою швидкостями

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt}\leftrightarrow\omega=\frac{d\varphi}{dt},$$

3. аналогія між лінійним та кутовим прискоренням

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}\leftrightarrow\varepsilon=\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

## *1.5. Рівномірний рух матеріальної точки по колу*

Для подальшого поглибленого вивчення довільного криволінійного руху розглянемо його граничний випадок: рівномірний рух матеріальної точки по колу (рис. 1.9). Термін «рівномірний» використано тут у значенні, що кутова швидкість її обертання є сталою. Розв'яжемо пряму задачу, тобто за відомою траєкторією здобудемо точні вирази для векторів



швидкості та прискорення матеріальної точки в цьому випадку.

Радіус-вектор $\vec r$ матеріальної точки можна записати як добуток його модуля на одиничний вектор $\vec e_r(t)\equiv\vec r(t)/r$: $\vec r(t)=r\vec e_r(t)$. Цей одиничний вектор можна представити в декартових координатах: $\vec e_r(t)=\vec e_x\cos\varphi+\vec e_y\sin\varphi$. Оскільки за умовою матеріальна точка рухається рівномірно, її кутова швидкість є сталою. Це пояснюється тим, що кут $\Delta\varphi$, на який точка повертається за проміжок часу $\Delta t$, дорівнює частці від ділення довжини дуги $S$ на радіус кола $r$: $\Delta\varphi=S/r$. При рівномірному русі довжина дуги пропорційна проміжку часу $\Delta t$: $S=\upsilon\Delta t$. Отже, кут $\Delta\varphi$ також є прямо пропорційним до проміжку до проміжку часу, протягом якого цей поворот відбувся, тобто кутова швидкість матеріальної точки є сталою: $d\varphi/dt=\omega=const$. Іншими словами, $d\varphi=\omega dt$. Після інтегрування здобуваємо, що $\varphi=\omega t+\alpha(t_0)$. Для спрощення наступних обчислень уважатимемо, що в момент часу $t_0$ матеріальна точка лежала на осі $X$: $\varphi(t_0)=0$. Тоді одиничний вектор змінюється з часом у наступний спосіб: $\vec e_r(t)=\vec e_x\cos\omega t+\vec e_y\sin\omega t$. Цей запис є зручним з огляду на те, що орти декартової системи координат не змінюються з часом не лише за модулем, але й за напрямком. Модуль радіус-вектора – це відстань від матеріальної точки до початку координат, тобто, радіус кола.

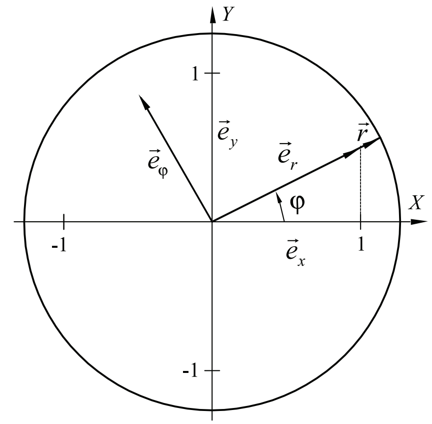


Рис. 1.9. Співвідношення декартових і полярних координат

Скористаємось визначенням швидкості як похідної від радіус-вектора за часом:

$$\vec\upsilon=\frac{d\vec r}{dt}=\frac{d}{dt}\left(r\vec e_r(t)\right)=\frac{d}{dt}\,[r(\vec e_x\cos\omega t+\vec e_y\sin\omega t)]=$$

$$=r[\vec{e}_x \frac{d}{dt}\cos\omega t+\vec{e}_y \frac{d}{dt}\sin\omega t]=r[\vec{e}_x(-\omega\sin\omega t)+\vec{e}_y(\omega\cos\omega t)]=$$

$$=\omega r(-\vec{e}_x\sin\omega t+\vec{e}_y\cos\omega t). \qquad (1.15)$$

Покажемо, що модуль швидкості $\upsilon=\omega r$, тобто вектор $(-\vec{e}_x\sin\omega t+\vec{e}_y\cos\omega t)$ є одиничним. Для цього порахуємо скалярний добуток цього вектора на нього самого, що дорівнює квадрату модуля вектора:

$$(-\vec{e}_x\sin\omega t+\vec{e}_y\cos\omega t)(-\vec{e}_x\sin\omega t+\vec{e}_y\cos\omega t)=\sin^2\omega t+\cos^2\omega t=1.$$

При цьому ми скористались із того, що вектори $\vec{e}_x$ і $\vec{e}_y$ мають одиничну довжину: $\vec{e}_x\,\vec{e}_x=1$, $\vec{e}_y\,\vec{e}_y=1$, і є перпендикулярними один до одного: $\vec{e}_x\,\vec{e}_y=0$. Отже при рівномірному русі матеріальної точки по колу заданого радіусу її швидкість $\upsilon=\omega r$.

А який напрямок має $\vec{\upsilon}$? Швидкість у цьому випадку, як і завжди, є дотичною до траєкторії, тобто $\vec{\upsilon}\perp\vec{r}$. Для перевірки цієї обставини скористаємось визначенням скалярного добутку, який дорівнює нулю в разі, коли перемножуються перпендикулярні вектори: $\vec{e}_r\,\vec{\upsilon}=(\vec{e}_x\cos\omega t+\vec{e}_y\sin\omega t)$ $\omega r(-\vec{e}_x\sin\omega t+\vec{e}_y\cos\omega t)=\omega r(-\cos\omega t\sin\omega t+\sin\omega t\cos\omega t)=0.$

Прискорення матеріальної точки в цьому випадку також визначимо, виходячи з загального визначення як похідної від швидкості за часом:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d}{dt}(\omega r(-\vec{e}_x\sin\omega t+\vec{e}_y\cos\omega t)]=\omega r(-\omega\vec{e}_x\cos\omega t-$$

$$-\omega\vec{e}_y\sin\omega t)=-\omega^2 r(\vec{e}_x\cos\omega t+\vec{e}_y\sin\omega t)=-\omega^2 r\,\vec{e}_r=-\omega^2\,\vec{r}\,. \qquad (1.16)$$

Явний вигляд виразу прискорення указує, що воно спрямоване протилежно до радіус-вектора, тобто прискорення спрямоване від точки до центру кола. Іншими словами, рівномірний рух точки по колу супроводжується доцентровим прискоренням. Модуль прискорення



$$a=\omega^2 r=\upsilon^2/r. \qquad (1.17)$$

У випадку рівномірного руху матеріальної точки по окружності, як було щойно показано, $\upsilon=\omega r$. Узагальнимо цей результат на випадок, коли довільний вектор, наприклад, радіус-вектор $\vec{r}$, обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, не змінюючи свого абсолютного значення. Покажемо, що в цьому випадку вираз для лінійної швидкості $\vec{\upsilon}$ матеріальної точки можна записати, користуючись поняттям про «векторний добуток»:

$$\vec{\upsilon}=[\vec{\omega},\vec{r}], \qquad (1.18)$$

За визначенням кутової швидкості її напрямок задає пряму, навколо якої відбувається обертання в даний момент часу, а модуль задає кут (у радіанній мірі), на який відбувається обертання за одиницю часу. За модулем формула (1.18) дає

$$|\vec{\upsilon}|=|\vec{\omega}|\cdot|\vec{r}|\cdot\sin(\angle\vec{\omega},\vec{r}), \qquad (1.19)$$

Справедливість цього співвідношення стає зрозумілою, якщо розглянути довжину елементарного переміщення $|\vec{\upsilon}|dt$. Воно дорівнює довжині хорди окружності радіусу $|\vec{r}|\cdot\sin(\angle\vec{\omega},\vec{r})$, яку стягує кут $|\vec{\omega}|dt$. Що коротший

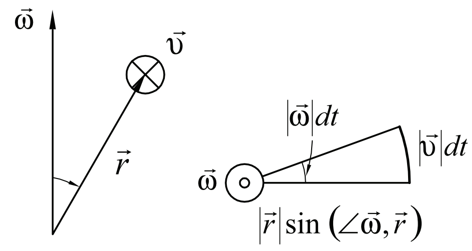



Рис. 1.10. До визначення векторного добутку

проміжок часу $dt$, то менше довжина хорди відрізняється від довжини дуги, яка за визначенням кута дорівнює добутку кута на радіус окружності, $|\vec{\omega}|dt\;|\vec{r}|\cdot\sin(\angle\vec{\omega},\vec{r})$. Тим самим ми довели справедливість формули (1.19), тобто підтвердили коректність формули (1.18) по відношенню до абсолютного значення миттєвої швидкості в разі обертання радіус-вектора $\vec{r}$ із кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Покажемо, що напрямок вектора, визначений формулою (1.18), також є правильним. Якщо в даний момент часу вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$ лежать в площині рис. 1.10, то кінець радіус-вектора рухається в аркуш; направимо великий палець правої руки вздовж першого вектора добутку (1.18), тобто вздовж $\vec{\omega}$, і вказівний – уздовж другого вектора, тобто вздовж $\vec{r}$, тоді середній палець (у конфігурації правої трійки векторів, наведеній на рис. 1.1, 1.3) дивитиметься як раз в аркуш, що й доводить справедливість використання формули (1.18) для визначення напрямку швидкості.

### *1.6. Нормальне та тангенціальне прискорення*

Повернемося до визначення характеристик довільного криволінійного руху матеріальної точки. Довільність руху означає, що змінюється не лише відстань від початку координат до матеріальної точки, тобто довжина *r(t)* радіус-вектора $\vec{r}(t)$, який визначає положення матеріальної точки в координатному просторі. Довільність руху означає, що довільним чином змінюється також і його орієнтація у просторі. Швидкість матеріальної точки визначається шляхом диференціювання вектора $\vec{r}(t)$ за часом, $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$. Її зручно представити як добуток $\vec{\upsilon}(t) = \vec{e}_\tau(t)\upsilon(t)$, в якому множник $\upsilon(t)$ визначає модуль швидкості, а множник $\vec{e}_\tau(t) = \vec{\upsilon}(t)/\upsilon(t)$ є вектор одиничної довжини, який співпадає за напрямком із швидкістю. Зазначимо, що при довільному криволінійному русі швидкість може змінюватись із часом як за модулем, так і за напрямком. Тобто обидва множники ($\vec{e}_\tau(t)$ і $\upsilon(t)$) в загальному випадку залежать від часу.

Визначимо прискорення при довільному криволінійному русі як похідну від швидкості. За правилом диференціювання добутку вектор прискорення складатиметься з двох доданків:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d[\vec{e}_\tau(t)\upsilon(t)]}{dt} = \vec{e}_\tau(t)\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon(t)\frac{d\vec{e}_\tau}{dt}. \qquad (1.20)$$



Ці доданки мають доволі прозорий фізичний зміст. Наприклад, якщо матеріальна точка рухається прямолінійно, то напрямок вектора швидкості та орта $\vec{e}_\tau(t)$ лишаються незмінним, $d\vec{e}_\tau/dt = 0$. За цих умов другий доданок в (1.20) дорівнює нулю, і $\vec{a} = \vec{a}_\tau = \vec{e}_\tau d\upsilon/dt$. Вектор $\vec{a}_\tau$ називають **тангенціальним прискоренням**, воно орієнтовано вздовж дотичної до траєкторії руху (при цьому воно направлене паралельно або антипаралельно вектору швидкості в залежності від знака похідної $d\upsilon/dt$: якщо $d\upsilon/dt > 0$, то тангенціальне прискорення співпадає за напрямком із вектором швидкості, і навпаки). Тангенціальне прискорення відповідальне за зміну швидкості саме за абсолютною величиною.

Гладку траєкторію матеріальної точки завжди можна уявно поділити на нескінченно короткі дуги змінної (у часі) кривини, які мають змінні (у часі) центри. У випадку прямолінійного руху радіус кривини дорівнює нескінченності. Якщо матеріальна точка рухається по кривій траєкторії зі сталою за абсолютною величиною швидкістю, $d\upsilon/dt = 0$, то другий доданок в правій частині формули (1.20) дорівнює нулю. А рух матеріальної точки при цьому являє собою рівномірний рух по колу, який детально вивчено у попередньому параграфі. Там було показано, що при цьому прискорення має напрямок до центра кола, елементом якого є дана дуга і яке можна вписати в дану траєкторію руху так, щоб воно торкалося траєкторії саме в тій точці, де в даний момент часу перебуває матеріальна точка. Отже, прискорення матеріальної точки, що рухається по колу зі сталим модулем швидкості, дорівнює, за формулою (1.20), $\vec{a} = \upsilon(t)\dfrac{d\vec{e}_\tau}{dt}$. Як було показано у попередньому параграфі, це прискорення є доцентровим: $\vec{a} = -\vec{e}_R\upsilon^2/R$, тут $\vec{e}_R$ – це одиничний вектор, який поєднує центр окружності, елементом якої ми вважаємо дугу, вздовж якої в даний момент часу рухається матеріальна точка, та цю матеріальну точку. Тобто, $\vec{e}_R$ є перпендикулярним до швидкості, яка є дотичною до траєкторії, $R$ – це радіус цієї окружності, який, взагалі кажучи, змінюється з часом. Цю складову прискорення називають **нормальним прискоренням** (яке, як зазначено в параграфі 1.5, ще називають доцентровим), $\vec{a}_{норм} = -\vec{e}_R \upsilon^2 / R$.

Зазначимо, що для обчислення радіусу кривизни $R$ траєкторії матеріальної точки при довільному криволінійному русі можна порахувати проекцію швидкості на напрямок, перпендикулярний до швидкості, тобто $|\vec{a}_{норм}|$ і модуль швидкості $\upsilon$. Тоді $R=\upsilon^2/|\vec{a}_{норм}|$.

Таким чином, при довільному русі у **вектора повного прискорення** є дві складові: тангенціальне прискорення та нормальне прискорення:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_{норм}. \quad (1.21)$$

### 1.7. Типові задачі кінематики. Зворотна задача

Зворотна задача кінематики полягає в знаходженні швидкості та координат матеріальної точки за відомим прискоренням та початковими умовами (див. параграф 1.3). Для прикладу розглянемо відому зі шкільного курсу задачу про рух тіла поблизу поверхні Землі в полі сили тяжіння. Здобудемо її розв'язки з використанням загальних визначень кінематики, які спираються на поняття про первісну функцію, і покажемо, що вони співпадають із результатами, які є відомими зі шкільного курсу, де розглянуто випадок рівноприскореного руху.

Розпочнемо з вибору системи координат. Оберемо декартову систему, оскільки поверхню Землі вважаємо плаunion і прискорення вільного падіння вважаємо перпендикулярним до поверхні Землі. Початок системи координат розташуємо у точці, з якої починає рух матеріальна точка (див. рис. 1.11), тому $x(0)=y(0)=z(0)=0$. Вісь $OZ$ спрямуємо вгору, тобто антипаралельно до прискорення вільного падіння. Вісь $OX$ направимо паралельно поверхні Землі так, аби вектор початкової швидкості матеріальної точки лежав у площині $XOZ$. У цьому



випадку жодної сили не діє на матеріальну точку вздовж осі $OY$, отже, відсутня проекція швидкості на цей напрямок, і жодне переміщення не відбувається вздовж цієї осі. В обраній системі координат компоненти вектора прискорення мають наступні значення: $a_x=a_y=0$, $a_z=-g$. Оскільки висоту підйому матеріальної точки над поверхнею Землі ми вважаємо малою, зміною прискорення під час руху нехтуємо, тобто вважаємо прискорення сталим. Горизонтальна складова прискорення дорівнює нулю, бо ми нехтуємо силою опору повітря, що є справедливим для випадку невеликих швидкостей руху.

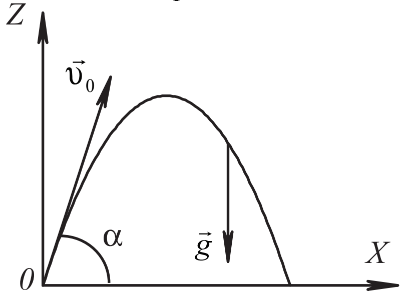



Рис. 1.11. До задачі про рух матеріальної точки поблизу поверхні землі

Зазвичай задачу про рух тіла поблизу поверхні Землі формулюють так, що відомі модуль швидкості $\upsilon_0$ на початку руху та кут $\alpha$, який становить вектор швидкості з горизонтом, тобто кут між вектором швидкості та віссю $OX$. Тоді компоненти початкової швидкості матеріальної точки дорівнюють: $\upsilon_{0x}=\upsilon_0\cos\alpha$, $\upsilon_{0z}=\upsilon_0\sin\alpha$.

Оскільки прискорення вздовж осі $OX$ дорівнює нулю, то швидкість у цьому напрямку є сталою, $\upsilon_x=\upsilon_{0x}$,

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = a_x = 0, \Rightarrow \upsilon_x = Const = \upsilon_x(t=0) \equiv \upsilon_{x0}, \quad (1.22)$$

і відповідна координата змінюється з часом лінійно:

$$x = x(t=0) + \int_0^t \upsilon_x dt = 0 + \int_0^t \upsilon_{x0} dt = \upsilon_{x0} t. \quad (1.23)$$

Дослідимо тепер вертикальний рух тіла. Оскільки прискорення у вертикальному напрямку є сталим, $a_z=d\upsilon_z/dt=-g$, то вертикальна складова швидкості зменшується з часом лінійно:

$$d\upsilon_z=-gdt;\ \upsilon_z=\upsilon_{z0}+\int_0^t d\upsilon_z=\upsilon_{z0}-\int_0^t gdt=\upsilon_{z0}-gt. \qquad (1.24)$$

Відповідно вертикальна координата змінюється з часом квадратично:

$$z=z(0)+\int_0^t(\upsilon_{z0}-gt)dt=\upsilon_{z0}t-\frac{gt^2}{2}. \qquad (1.25)$$

Формально на цьому задачу можна вважати розв'язаною. Проте за гарний смак вважається в фізичній задачі проаналізувати здобутий розв'язок, щонайменше, перевірити його на розмірність.

Крім того, зауважимо, що задача про рух тіла поблизу поверхні землі має безліч різновидів. Зокрема, можна порахувати час $t_1$, протягом якого тіло досягає найвищої точки траєкторії. Для цього слід усвідомити, що в цій точці тіло перестає рухатись угору, тобто, вертикальна швидкість тіла дорівнює нулю, $\upsilon_z(t_1)=0$. Підставивши явний вигляд для залежності вертикальної складової швидкості від часу, дістаємо: $\upsilon_{z0}-gt_1=0$, звідки $t_1=\upsilon_0\sin\alpha/g$. Якщо тіло впало на тому ж горизонтальному рівні, з якого воно стартувало, можна визначити час $t_2$, протягом якого воно рухалось. З фізичних міркувань дістаємо, що час, протягом якого тіло рухалось від початку до верхньої точки траєкторії, дорівнює часу, протягом якого воно падало, тобто $t_2=2t_1=2\upsilon_0\sin\alpha/g$. Ту саму відповідь можна здобути прямим розрахунком з умови, що тіло під час руху досягло рівня землі, тобто $z(t_2)=0$. Скориставшись явним виглядом залежності вертикальної координати від часу, дістаємо рівняння $\upsilon_{z0}t-0.5gt^2=0$. Це рівняння має два розв'язки: $t_2=0$, яке відповідає моменту початку руху, коли тіло дійсно було на



нульовому вертикальному рівні, та $t_2=2\upsilon_{z0}/g$, що співпадає з щойно здобутим із фізичних міркувань розв'язком.

### *1.8. Приклади розв'язання задач кінематики*

Для розв'язання задач із кінематики слід мати базові знання з математичного аналізу та аналітичної геометрії. Кінематика базується на застосуванні прямої та зворотної задачі диференціального числення, оскільки основні параметри, які описують механічний рух в кінематичному наближенні, пов'язано між собою в диференціальний спосіб, наприклад, для руху вздовж осі $\vec{z}$: $\upsilon_z=dz/dt$, $a_z=d\upsilon_z/dt=d^2z/dt^2$. Тому з точки зору математики при розв'язанні таких задач потрібно для певної відомої функції або знайти похідну функцію, або первісну функцію. З курсу аналітичної геометрії для розв'язання задач із механіки обов'язково слід знати, що таке скалярний та векторний добутки векторів. У третьому розділі даного підручника наведено таблицю даних про найпростіші похідні та первісні функції та про основні операції з векторами.

У загальному випадку механічний рух описується в термінах тензорів (у даному курсі це величини від нульового до другого рангу). Тензор нульового рангу – це скаляр, тобто одне число, що описує таку величину, значення якого не залежить від вибору системи координат. Тензор першого рангу – це вектор, тобто, зазвичай, три числа, що описують таку величину, наприклад, три проекції вектора на осі ортонормованого базису у тривимірному координатному просторі (якщо рух відбувається у дво- або одновимірному просторі, то відповідні зайві проекції, звичайно, дорівнюють нулю, що спрощує задачу). Тензор другого рангу можна записати як двовимірну матрицю: такими величинами є, наприклад, тензор інерції абсолютно твердих тіл та тензор механічного напруження, яке виникає в середовищі, зокрема, через наявність внутрішнього тертя.

### *Задача 1*

*Дано:* Виходячи з геометричного змісту похідної та інтегралу, накресліть графіки залежності від часу для прискорення, координати та шляху, який пройдено. Залежність швидкості від часу подано на рис. 1.12. Початкову координату вважати такою, що лежить в початку координат.

*Розв'язання:*

Почнемо з графіка прискорення як функції часу. Від початку руху до другої секунди швидкість матеріальної точки зростала, отже прискорення було додатним. Швидкість зростала лінійно, $\upsilon_x=C_1t+C_2$, отже, прискорення було сталим: $a_x= d\upsilon_x/dt=C_1$. Константу $C_1$ визначаємо як тангенс кута нахилу прямої на графіку: за дві секунди швидкість зросла на 2 м/с. Отже, прискорення дорівнює: $a_x$=2/2=1 м/с$^2$.

Від другої до третьої секунди швидкість була сталою, тобто прискорення дорівнювало нулю. Дійсно, кут між горизонтальною прямою та віссю абсцис дорівнює нулю.

Від третьої до сьомої секунди швидкість зменшувалась, отже, прискорення було від'ємним. Швидкість зменшувалась лінійно, отже, прискорення було сталим. За чотири секунди швидкість зменшилась на 4 м/с. Отже, прискорення дорівнює: $a$=–4/4=–1 м/с$^2$.

Побудуємо графік залежності координати від часу. Від початку руху до другої секунди швидкість матеріальної точки була додатною, отже координата зростала. Швидкість зростала лінійно, $\upsilon_x=C_1t+C_2$, отже, координата зростала квадратично: $x= x_0 + \int\upsilon_x dt= 0.5C_1t^2+C_2t+C_3$. Оскільки швидкість (похідна від координати) дорівнює нулю при $x$=0, то в цій точці графік залежності координати від часу має мінімум. Координата зростає від початку руху до другої секунди від нуля до значення, яке дорівнює площі під кривою – площі прямокутного трикутника з катетами 2 і 2. Тобто, ця площа дорівнює двом, що наочно видно на графіку швидкості, оскільки зазначений трикутник складається з однієї цілої клітинки та двох половинок.



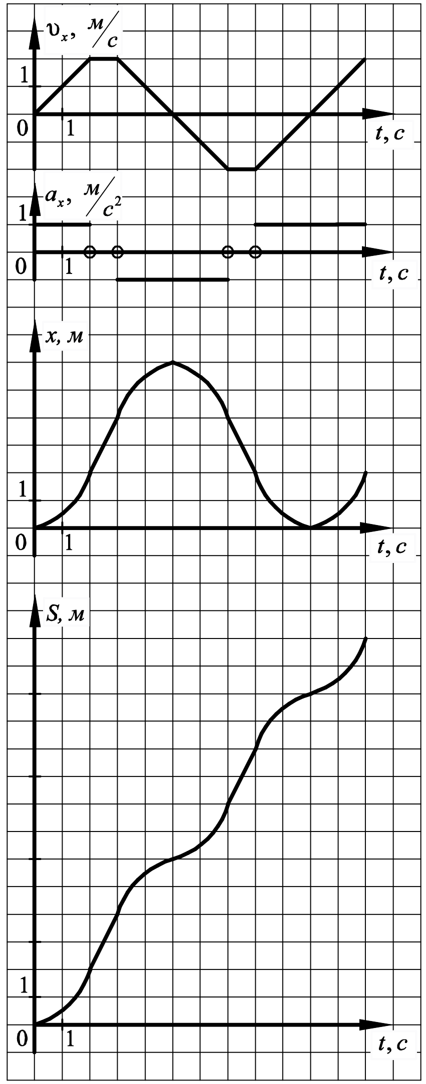



Рис. 1.12 (до задачі 1)

Від другої до третьої секунди швидкість була сталою, тобто координата зростала лінійно. За цю секунду координата зросла на величину, що дорівнює площі прямокутника зі сторонами 1 і 2. Тобто, координата зросла на 2 м.

Від третьої до п'ятої секунди швидкість залишалася додатною, отже, тіло рухалось вперед, і координата зростала. В точці $t$=5 с швидкість (похідна від координати!) дорівнювала нулю, отже, в цей момент часу координата досягла максимального значення. Після моменту часу $t$=5 с швидкість стала від'ємною, отже, координата стала зменшуватися. Від третьої до сьомої секунди швидкість зменшувалася лінійно, отже, координата залежала від часу квадратично. Її графік виглядає як частина квадратичної параболи ріжками донизу з вершиною в точці $t$=5 с. Висота цього максимуму дорівнює площі всієї трапеції, яку можна порахувати як добуток пів суми основ на висоту: 0.5(1+5)×2=6. До сьомої секунди ця парабола зменшується на величину, що дорівнює площі прямокутного трикутника з катетами 2 на 2, тобто, координата зменшується до 6–2=4 м.

Від сьомої до восьмої секунди швидкість була від'ємною, тому координата продовжувала зменшуватися. Швидкість була сталою, тому координата зменшувалася лінійно. За цю секунду координата зменшилася на величину, що дорівнює площі прямокутника зі сторонами 1 на 2, тобто, координата зменшилася до 4–2=2 м.

Від восьмої до десятої секунди швидкість була від'ємною, тому координата продовжувала зменшуватися. В точці *t*=10 с швидкість стала нульовою, отже, координата має в цій точці мінімум. Від восьмої до десятої секунди координата зимне шилася на величину, яка дорівнює площі прямокутного трикутника з катетами 2 на 2, тобто, координата зменшилася до 2–2=0 м.

Графік пройденого шляху простіше всього побудувати, спираючись на дані з графіку *x(t)* та $\upsilon(t)$. Зазначимо, що для будь-якого руху *S(t)* є додатною функцією, більше того, ця функція зростає незалежно від напрямку руху. Якщо ж у процесі складного руху є проміжок часу, упродовж якого $\upsilon$=0, тоді *S(t)* у цьому інтервалі часу залишається незмінним, дорівнюючи своєму попередньому значенню. Для тих проміжків часу, де $\upsilon(t)>0$, графік *S(t)* можна здобути з графіка *x(t)* паралельним переносом уздовж осі ординат. Якщо ж для певного проміжку часу $\upsilon(t)<0$, то для нього графік *S(t)* також можна здобути паралельним переносом графіка *x(t)* $x(t)$ з тією відмінністю, що відповідну частину графіка $x(t)$ слід попередньо повернути навколо уявної осі, що є паралельною до абсциси. На останок підкреслимо, що графік *S(t)* має бути неперервним, тому всі наступні ділянки цього графіка мають бути приєднані до відповідних попередніх ділянок.

Оскільки швидкість у цій задачі весь час є додатною, координата весь час не зменшується, отже, збігається із шляхом, що пройдено.



### *Задача 2*

*Дано:* Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $V(t) = V_0 \sin(\alpha t)$, де $V_0$ та $\alpha$ – сталі додатні величини. Початкова умова: $x(t=0)=0$.

*Знайти:* прискорення *a(t)*, координату *x(t)*, пройдений шлях *S(t)*.

*Розв'язання:*

Прискорення – це похідна від швидкості за часом:

$$a(t) = dV/dt = \alpha V_0 \cos(\alpha t). \tag{1.26}$$

Зверніть увагу, що екстремальним значенням швидкості відповідають нульові значення прискорення (рис. 1.13).

Координату знаходимо шляхом інтегрування:

$$x(t) = \int V(t)dt = C - V_0 \alpha^{-1} \cos(\alpha t), \tag{1.27}$$

де *C* – константа інтегрування, фізичний сенс якої – це значення координати в певний момент часу. Знайти її можна з початкових умов: $x(0)=0 \Rightarrow 0 = -V_0/\alpha + C$. Отже, явний вигляд залежності координати від часу є таким: $x(t) = -V_0\alpha^{-1}\cos(\alpha t) + V_0/\alpha$. Зверніть увагу, що: $V(t)>0$, коли $x(t)$ зростає, та, відповідно, $V(t)<0$, коли $x(t)$ зменшується; моментам обнуління значення швидкості відповідають ті моменти часу, коли $x(t)$ має якесь екстремальне значення. Слід додати, що графік $x(t)$ має бути неперервним та достатньо гладким, щоб можна було обчислити похідну від координати за часом.

Пройдений шлях визначається як інтеграл від модуля швидкості за часом: $S(t) = \int |\vec{V}| dt$. В нашому випадку $S(t) = \alpha^{-1}\int |\vec{V}| d(t\alpha)$. Відзначимо ще раз, що *S(t)* – це функція, яка з часом не зменшується, вона може бути, в крайньому випадку, незмінною величиною, якщо тільки в цей проміжок часу швидкість дорівнює нулю, тобто матеріальна

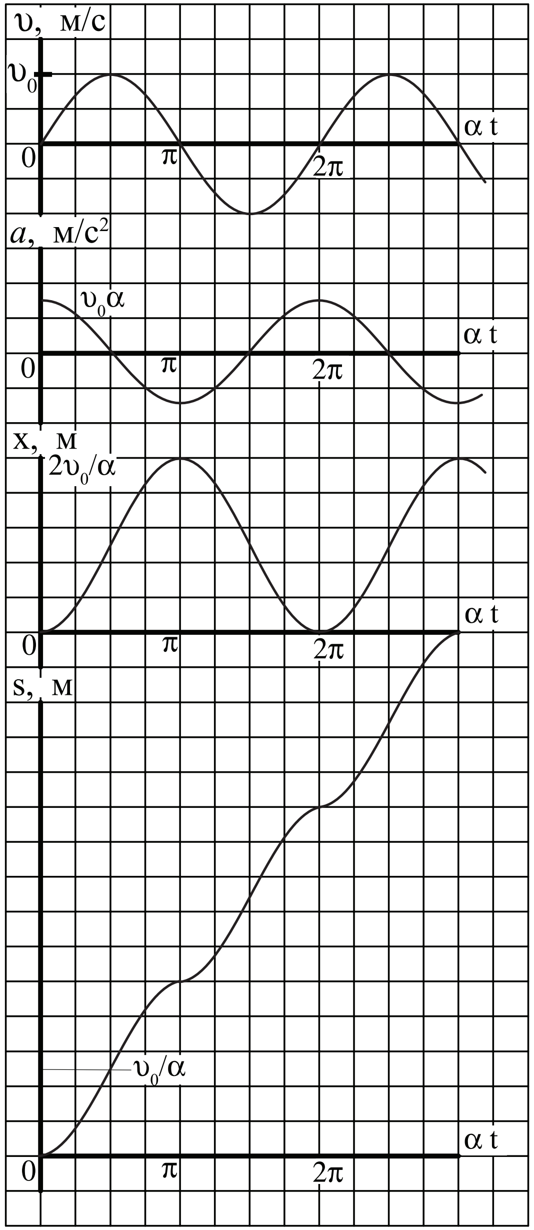



Рис. 1.13. До задачі 2



точка при цьому не рухається. Таким чином, графік пройденого шляху співпадає з графіком $x(t)$ в ті проміжки часу, коли координата не зменшується, та є дзеркальним відображенням графіка $x(t)$ відносно горизонтальної осі часу, коли координата зменшується з часом.

### *Задача 3*

*Дано*: дві матеріальні точки одночасно почали рух в спільній вертикальній площині в полі тяжіння. При цьому: значення їхніх швидкостей було однаковим за модулем $V_0=20$ *м/с*, рух почався з однієї координатної точки під кутами $\alpha_1=90°$ та $\alpha_2=60°$ до горизонту, відповідно.
*Знайти:* відстань між цими матеріальними точками через $\tau=2c$, нехтуючи силами тертя.
*Розв'язання:*

Введемо систему координат, початок якої пов'язано з початковим розташуванням даних матеріальних точок. Завдяки цьому маємо тривіальні початкові умови для координат першої та другої матеріальної точки. Вісь абсцис зорієнтуємо паралельно горизонту, а вісь ординат – вертикально вгору, тобто антипаралельно до прискорення вільного падіння.

Розглянемо рух першої матеріальної точки, для неї: $\vec{V_0}\,||\,\vec{e}_y$; тому її швидкість $V_1=V_0-gt$, а координата $y_1=V_0t-gt^2/2$.

Для другої матеріальної точки швидкість має дві складові; одну – вздовж осі $\vec{x}$: $V_{2x}=V_0\cos\alpha_2$, а другу – вздовж осі $\vec{y}$: $V_{2y}=V_0\sin\alpha_2-gt$.

Шляхом інтегрування, враховуючи початкової умови $\vec{r}_2(t=0)=0$, знайдемо вираз для двох проекцій вектора $\vec{r}_2(t)$ на осі координат: $x_2=V_0t\cos\alpha_2$ та $y_2=V_0t\sin\alpha_2-gt^2/2$. Відстань між двома точками в координатному просторі визначається за теоремою Піфагора:

$$L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,. \qquad (1.29)$$

Підставимо сюди знайдені вирази для координат досліджуваних точок:

$$L(\tau) = \sqrt{V_0^2 \tau^2 \cos^2 \alpha_2 + V_0^2 \tau^2 (1 - \sin\alpha_2)^2} =$$

$$V_0 \tau \sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx V_0 \tau \sqrt{2 - 1.7} \approx V_0 \tau \sqrt{0.3} \approx V_0 \tau / 2 \approx 20\,м\,. \qquad (1.30)$$

Звертаємо увагу, що відстань знайдено приблизно, з точністю, яка визначається точністю величин, що задані в умові задачі.

Відповідь: $L(\tau) \approx 20\,м.$

## ***Задача 4***

*Дано:* з пункту *A*, що знаходиться на шосе, потрібно потрапити до пункту *B*, який розташовано у полі (рис. 1.14). Відстань від пункту *B* до шосе дорівнює $l$ ($DB = l$). Швидкість руху по полю в *N* разів менша за швидкість руху по шосе.

*Знайти:* в якій точці *C*, що знаходиться на шосе між точками *A* та *D*, слід з'їхати з шосе у поле, щоб потрапити з пункту *A* до пункту *B* за мінімальний час?

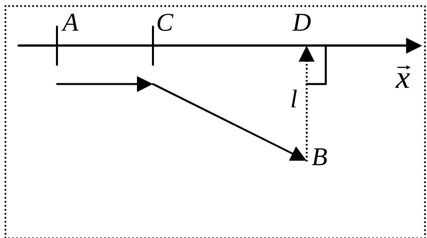



Рис. 1.14. До задачі 4

*Розв'язання:*

Намалюємо схему руху та оберемо зручну систему координат, яка пов'язана з шосе. Введемо позначки: $V_ш$ – це швидкість руху по шосе, $t_{AB} = t_1 + t_2$ – це час руху від *A* до *B*, він складається з інтервалів руху по шосе та по полю, відповідно: $t_1 = AC / V_ш$ – це час руху по шосе, $t_2 = \sqrt{CD^2 + l^2} / (V_ш / N)$ – це час руху по полю.

Ця задача є типовою задачею на знаходження екстремальних значень. Тому здобудемо аналітичний вираз для повного часу руху від точки *A* до точки *B*, а потім обчислимо похідну від $t_{AB}$ за довжиною відстані $CD$. Те значення $CD = CD_*$, яке обнулить цю похідну, і буде оптимальним, тобто відповідатиме мінімальному значенню $t_{AB}$. Отже:

$$t_{AB} = \frac{AC}{V_ш} + N\frac{\sqrt{CD^2 + l^2}}{V_ш} = \frac{AD - CD + N\sqrt{CD^2 + l^2}}{V_ш}\,, \qquad (1.31)$$

$$\frac{dt_{AB}}{d(CD)} = -\frac{1}{V_ш} + \frac{d}{d(CD)}\frac{N}{V_ш}\sqrt{CD^2 + l^2} = \frac{N}{V_ш}\frac{CD}{\sqrt{CD^2 + l^2}} - \frac{1}{V_ш}\,, \qquad (1.32)$$

$$\left.\frac{dt_{AB}}{d(CD)}\right|_{optim} = 0; \quad \frac{N \cdot CD_*}{\sqrt{CD_*^2 + l^2}} - 1 = 0; \qquad (1.33)$$

$$N^2 CD_*^2 = CD_*^2 + l^2; \quad CD_* = l / \sqrt{N^2 - 1}. \qquad (1.34)$$

Таким чином, довжина $CD_*$ визначається відстанню $l$ від пункту *B* до шосе, а також співвідношенням між швидкостями руху по шосе та по полю $N$. Зростання величини $l$ та наближення $N \to 1$ призводить до збільшення довжини $CD_*$, тобто точка повороту відсувається ближче до стартової точки *A*. При цьому слід розуміти, що точка повороту з шосе на поле не може бути розташована лівіше за стартову точку, тому за умови $l / \sqrt{N^2 - 1} > AD$ з шосе слід з'їжджати одразу.

## *1.9. Абсолютно тверде тіло*

Окрім такого фізичного об'єкта, як матеріальна точка, іншим добре дослідженим об'єктом в механіці є «абсолютно тверде тіло». Абсолютно тверде тіло – це сукупність матеріальних точок, відстань між якими не змінюється в процесі руху. Цей термін використовується, зокрема, при описанні обертального руху механічного об'єкта навколо певної осі. Одна матеріальна точка, її положення в координатному просторі описується трьома незалежними скалярними функціями $x(t), y(t), z(t)$, або як кажуть: одна матеріальна точка має три ступені вільності.

Кількість ступенів вільності дорівнює кількості незалежних узагальнених координат (незалежних функцій або незалежних змінних), які належить задати, щоб охарактеризувати положення механічного об'єкта у просторі.

Механічна система, що складається з $N$ матеріальних точок, між якими немає жорстких зв'язків, має $3N$ ступенів вільності.

Дві матеріальні точки, відстань між якими є фіксованою, мають п'ять ступенів вільності. Ці п'ять координат можна визначити в різний спосіб, і їхня кількість не залежить від способу обрахунку. Наприклад, можна вчинити в такий спосіб. Положення кожної матеріальної точки задається трьома координатами: $(x_1, y_1, z_1)$ і $(x_2, y_2, z_2)$, тобто для визначення їхнього положення слід знати 2×3=6 координат. Але за умовою «відстань $l$ між ними є фіксованою», тобто існує умова зв'язку, $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$. Отже одна із зазначених вище координат є зайвою, її з умови зв'язку можна визначити через інші п'ять координат. Тому кількість ступенів вільності у досліджуваному випадку дорівнює 6–1=5. Ці п'ять координат можна визначити і в інший спосіб. Наприклад, положення однієї матеріальної точки можна визначити трьома декартовими координатами. Тоді друга матеріальна точка має бути на сферичній поверхні з центром у першій матеріальній точці і з радіусом $l$. Положення точки на сфері визначається двома координатами, наприклад, двома кутами сферичної системи координат. В такий спосіб отримуємо, що положення досліджуваної системи визначається 3+2=5 координатами.



Порахуємо кількість ступенів вільності абсолютно твердого тіла, що складається з трьох точок, які лежать не на одній прямій. Як показано вище, положення двох із них можна задати п'ятьма координатами. Тоді третя матеріальна точка має лежати на окружності, центр і радіус якої однозначно визначається через відомі відстані від перших двох точок до цієї третьої. А положення точки на кривій однозначно задається ще однією координатою, наприклад, кутом. Отже, абсолютно тверде тіло, що складається з трьох точок, у загальному випадку має шість ступенів вільності. Той самий результат можна здобути і в інший спосіб. Наприклад, так. Положення кожної з трьох матеріальних точок задається трьома декартовими координатами. Але в цієї механічної системи, як в абсолютно твердого тіла, наявні три умови зв'язку: задано три відстані між точками. Отже, кількість ступенів вільності дорівнює 3×3–3=6.

Продовжимо – порахуємо кількість ступенів вільності абсолютно твердого тіла, що складається з чотирьох точок, які лежать не на одній прямій. Як ми щойно порахували двома способами, в перших трьох точок є шість ступенів вільності. Оскільки відомі відстані між четвертою точкою та трьома першими, то її положення можна визначити на основі знань з геометрії – ця четверта точка посідає місце в вершині трикутної піраміди. Тому досліджуване тут абсолютно тверде тіло має так само шість ступенів вільності.

Подальше збільшення кількості елементарних мас, з яких складається абсолютно тверде тіло, не впливає на кількість ступенів вільності. Отже, в загальному випадку абсолютно тверде тіло має шість ступенів вільності: з них три, наприклад, – це координати центра мас, а ще три – це кути, що визначають просторову орієнтацію абсолютно твердого тіла.

## *1.10. Поступальний рух абсолютно твердого тіла*

Поступальним називатимемо такий рух, при якому всі точки абсолютно твердого тіла рухаються з часом за однаковими траєкторіями. Іншими словами, будь-яка пряма, що проведена між двома точками абсолютно твердого тіла, при такому русі пересувається паралельно сама собі. Орієнтація абсолютно твердого тіла у просторі при цьому не змінюється. У цьому випадку траєкторії руху усіх точок абсолютно твердого тіла можна отримати одну з одної шляхом паралельного переносу. Тому такий рух абсолютно твердого тіла повністю визначено, якщо задано рух однієї з його точок. Щоб описати такий рух, достатньо трьох координат. У кінематичному відношенні поступальний рух абсолютно твердого тіла є еквівалентним руху матеріальної точки. Тому ми не досліджуватимемо його далі більш детально.

## *1.11. Плоский рух абсолютно твердого тіла*

Плоским називають такий рух абсолютно твердого тіла, при якому траєкторії усіх матеріальних точок, що його складають, лежать в паралельних площинах. У цьому випадку абсолютно тверде тіло має три ступені вільності: дві координати задають положення, наприклад, центра мас абсолютно твердого тіла на площині, ще одна координата задає кут, на який абсолютно тверде тіло повернено відносно осі, що є перпендикулярною до площини і проходить крізь центр мас. Іншими словами, плоский рух абсолютно твердого тіла є еквівалентним плоскому руху двох точок цього тіла або плоскому руху абсолютно твердого стержня. Його положення однозначно визначається положенням його кінців. Положення кожної з цих двох точок на площині визначається двома координатами, але відстань між ними є відомою, тобто, вона відіграє роль умов зв’язку. Отже, у цьому випадку кількість ступенів вільності дорівнює $2\times2-1=3$.



Доведемо теорему Ейлера про те, що в процесі плоского руху абсолютно твердого тіла його переміщення з початкового положення в інше довільне положення можна виконати за допомогою одного тільки повороту навколо певної осі, яку ми називатимемо миттєвою віссю обертання. При цьому розглядатимемо плаский рух стрижня.

Нехай стрижень $AB$ (див. рис. 1.15) перейшов з початкового положення у положення $A_1B_1$. З’єднаємо точку $A$ з точкою $A_1$, а точку $B$ – з $B_1$. Потім проведемо серединні перпендикуляри відрізків $AA_1$ та $BB_1$. Ці серединні перпендикуляри перетинаються у точці $O$. Точка $O$ є однаково віддаленою від точок $A$ та $A_1$: $OA=OA_1$, а також від $B$ та $B_1$: $OB=OB_1$. Тобто точки $A$ та $A_1$ лежать на одному колі з центром в точці $O$, так само, як точки $B$ та $B_1$ лежать на іншому колі з центром в тій самій точці $O$. З рівності трикутників $OAB$ та $OA_1B_1$ випливає, що кути $\angle AOA_1$ та $\angle BOB_1$ також є рівними. Отже, відрізок $AB$ можна повернути навколо осі $O$ так, щоб точка $A$ опинилася у точці $A_1$, і водночас точка $B$ перейшла в точку $B_1$.

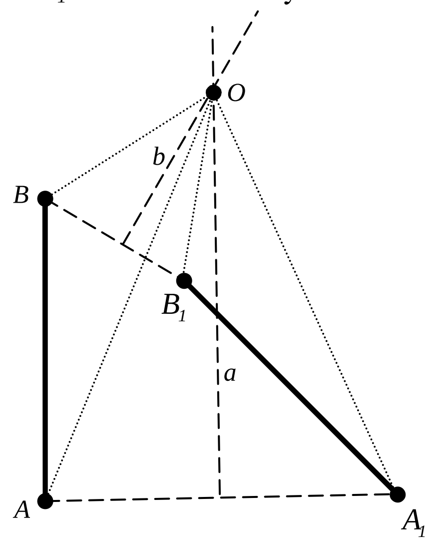
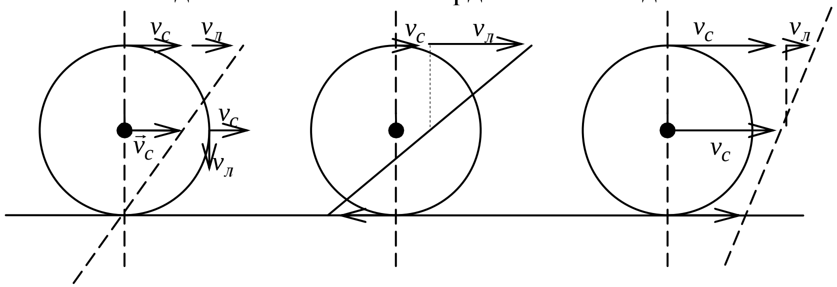


Рис. 1.15. Схема знаходження миттєвої осі обертання

Отже, плоский рух у певній площині можна описати як обертання навколо певної осі, що є перпендикулярною до цієї площини. В такий спосіб ми довели існування миттєвої осі обертання: в цій задачі вона є перпендикулярною до площини рисунка і проходить крізь точку $O$.

## *1.12. Миттєва вісь обертання*

Довільний рух абсолютно твердого тіла у площині можна уявити як суперпозицію поступального та обертального рухів. До того ж реалізувати цю суперпозицію можна у безкінечну кількість способів. Але кут обертання не залежить від вибору варіанта суперпозиції (від вибору положення осі обертання). Будь-яку вісь, що є перпендикулярною до площини руху, можна розглядати як вісь обертання. Миттєвою віссю обертання є та з них, для якої поступальна швидкість в даний момент дорівнює нулю. Швидкість усіх точок абсолютно твердого тіла у будь-який момент часу можна уявити як швидкість обертання навколо миттєвої осі. З плином часу положення миттєвої осі обертання змінюється відносно абсолютно твердого тіла та відносно



а) б) в)

Рис. 1.16. До визначення миттєвої осі обертання колеса

обраної системи координат. Миттєва вісь обертання є уявним об'єктом, вона не має матеріального носія. Фізичне значення має те, що усі точки абсолютно твердого тіла, які лежать в даний момент на цій осі, є нерухомими, і рух абсолютно твердого тіла можна звести до обертання навколо цієї миттєвої осі.

Визначимо положення миттєвої осі обертання для частинного випадку плоского руху – коченні колеса.

Якщо колесо котиться без ковзання та пробуксовки (рис. 1.16 а)), то точка на ободі колеса, якою воно торкається поверхні в даний момент часу, є нерухомою відносно поверхні. Саме крізь неї перпендикулярно до площини рисунка і проходить миттєва вісь обертання.



Швидкість центра колеса відносно поверхні та відносно точки торкання визначається як швидкість обертання навколо цієї осі: $\vec{\upsilon}_C = [\vec{\omega},\vec{r}]$, де кутову швидкість обертання направлено в площину рисунка, якщо колесо котиться праворуч, і радіус-вектор направлений від точки торкання колесом поверхні вгору до центра колеса. За правилами обчислення векторного добутку швидкість колеса направлено праворуч, її абсолютне значення дорівнює $\upsilon_C = \omega r$, тут $r$ – це радіус колеса.

Швидкість верхньої точки колеса має той самий напрямок, що і центр колеса, бо радіус-вектор, який визначає положення цієї точки відносно точки торкання колесом поверхні, співпадає за напрямком із радіус-вектором у попередньому випадку. За абсолютною величиною ця швидкість удвічі перевищує швидкість центра колеса, бо верхня точка розташована вдвічі далі від поверхні, ніж центр колеса. Той самий результат здобудемо, якщо обчислювати цю швидкість як векторну суму швидкості центру колеса відносно поверхні та швидкості верхньої точки колеса відносно його центру.

Якщо ж колесо котиться з пробуксовкою (Рис. 1.16 б)), тоді точка на ободі колеса, якою воно в даний момент часу торкається поверхні, рухається в напрямку, протилежному швидкості руху колеса як цілого. При цьому миттєва вісь обертання лежить на вертикальному відрізку, що поєднує точку торкання колеса з поверхнею та центр колеса. Відстань від миттєвої осі обертання до центра колеса пропорційна його швидкості, відстань від миттєвої осі обертання до поверхні пропорційна швидкості руху точки на ободі колеса, якою воно в даний момент часу торкається поверхні. Це твердження є наслідком визначення миттєвої осі обертання: швидкість будь-якої точки абсолютно твердого тіла можна визначити формулою $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega},\vec{r}]$, де $\vec{r}$ – це вектор, проведений від миттєвої осі обертання до цієї точки.

Якщо ж тіло котиться праворуч і при цьому ще й проковзує, (Рис. 1.16 в)), то точка на ободі колеса, якою воно в даний момент часу торкається поверхні, рухається в напрямку руху колеса як цілого. При цьому миттєва вісь обертання лежить на вертикальній прямій, що проходить крізь центр колеса. Як в усіх попередніх випадках, відстань від миттєвої осі обертання до центра колеса пропорційна його швидкості, і відстань від миттєвої осі обертання до поверхні пропорційна швидкості руху точки на ободі колеса, якою воно в даний момент часу торкається поверхні.

### *1.13. Абсолютний характер кутової швидкості при довільному плоскому русі абсолютно твердого тіла*

Оберемо в абсолютно твердому тілі довільну точку *O*. Нехай у даний момент часу вона рухається зі швидкістю $\vec{V}_0$, а саме абсолютно тверде тіло обертається із кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі, що є перпендикулярною до площини, в якій відбувається рух, і проходить крізь точку *O*. Довільний плоский рух абсолютно твердого тіла можна уявити як суперпозицію поступального (зі швидкістю $\vec{V}_0$) та обертального (із кутовою швидкістю $\vec{\omega}$) рухів. Тобто для швидкості довільно обраної точки *A*, що належить до цього твердого тіла, маємо такий вираз:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_0 + \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right], \qquad (1.35)$$

де $\vec{r}$ – це радіус-вектор, що проведено з точки *O* до точки *A*. Підкреслимо, що величина $\vec{\omega}$ не залежить від вибору точки *O* – у цьому і полягає абсолютний характер кутової швидкості.

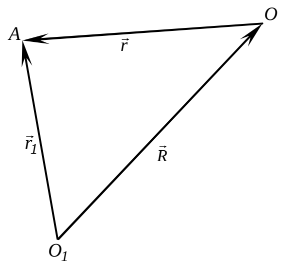


Рис. 1.17. До доведення абсолютного характеру кутової швидкості обертання

Доведемо це твердження. Оберемо іншу точку $O_1$ (рис. 1.17) та будемо описувати довільний плоский рух, спираючись на її характеристики: лінійну $\vec{V}_1$ та кутову $\vec{\omega}_1$ швидкості. Тоді швидкість $\vec{V}_A$ точки *A*, радіус-вектор якої відносно точки $O_1$ дорівнює $\vec{r}_1$, складається зі



швидкості $\vec{V}_1$ поступального руху точки $O_1$ відносно системи відліку та швидкості обертального руху точки *A* відносно точки $O_1$:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_1 + \left[\vec{\omega}_1, \vec{r}_1\right]. \qquad (1.36)$$

Різницю між радіусами-векторами точки *A* відносно точок $O_1$ та *O* позначимо $\vec{R}$ так, що $\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{R}$ (див. рис. 1.17):

$$\vec{V}_A = \vec{V}_1 + [\,\vec{\omega}_1, \vec{r}_1\,] = \vec{V}_1 + [\,\vec{\omega}_1, \vec{r}\,] + [\,\vec{\omega}_1, \vec{R}\,]\,. \qquad (1.37)$$

Крім того, точку *O* нічим не виділено серед інших точок абсолютно твердого тіла, тому для неї аналогічно до (1.36) також можна записати:

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_1 + [\,\vec{\omega}_1, \vec{R}\,]\,. \qquad (1.38)$$

Скористаємося цим для виключення першого і третього доданків в (1.37):

$$\vec{V}_A = \vec{V}_0 + \left[\vec{\omega}_1, \vec{r}\right]. \qquad (1.39)$$

Порівнюючи вирази (1.35) та (1.39) для швидкості $\vec{V}_A$, здобуваємо рівняння $\left[\vec{\omega}_1, \vec{r}\right] = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$. Оскільки точки *O* та *A* вибрано у довільний спосіб, то $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}$. Саме у цьому і полягає математичне формулювання фізичного твердження про абсолютний характер кутової швидкості обертального руху.

Ця фізична обставина широко використовується при розв'язанні задач. Наприклад, кутову швидкість обертання колеса автомобіля можна визначити за відомими швидкістю руху авто та радіусом колеса. Тоді швидкість будь-якої точки колеса можна визначити за формулою, аналогічною (1.35), як суму швидкості поступального руху, наприклад, осі колеса (яка дорівнює швидкості поступального руху авто в цілому) та швидкості обертального руху навколо цієї осі.

Кращому усвідомленню абсолютного характеру кутової швидкості обертання, на наш погляд, сприяє наступний рис. 1.18, на якому показано, як переміщення відрізку при плоскому русі з одного положення $A_0B_0$ в інше $AB$ можна виконати двома різними способами.

Перший спосіб полягає в тому, аби спочатку виконати паралельний перенос $A_0B_0$ в $A`B`$, і потім повернути відрізок $A`B`$ навколо осі $O`$, доки він не співпаде з $AB$.

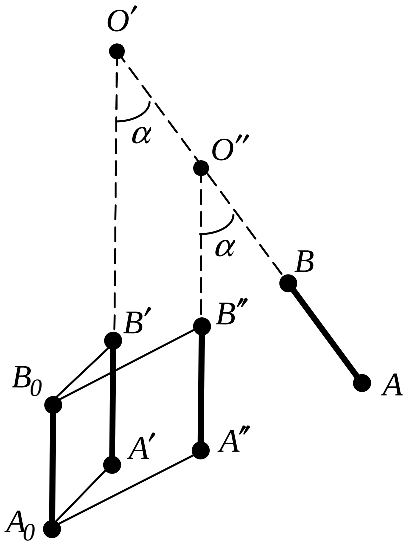


Рис. 1.18. Різні способи реалізації плоского руху

Другий спосіб полягає в тому, аби після паралельного переносу $A_0B_0$ в $A``B``$ повернути цей відрізок навколо осі $O``$ до співпадання з $AB$.

Обидва способи – це комбінація паралельного переносу та повороту навколо осі. В цих способах відрізняються осі повороту, вектори паралельного переносу, але кут, на який відбувається поворот, співпадає (бо це є кут між паралельними прямими та січною прямою). Коли час, протягом якого відбувається таке переміщення з $A_0B_0$ в $AB$, прямує до нуля, тоді незмінність кута повороту перетворюється на незмінність кутової швидкості обертання.

Наочним підтвердженням абсолютного характеру кутової швидкості обертання є також схема розподілу швидкостей на рис. 1.19. Плоский рух вертикального стержня можна уявити як поступальний рух як цілого зі швидкістю $\vec{v}_0$ та обертання навколо точки $O$ або як поступальний рух як цілого зі



швидкістю $\vec{v}_0'$ та обертання з тією самою кутовою швидкістю навколо точки $O`$.

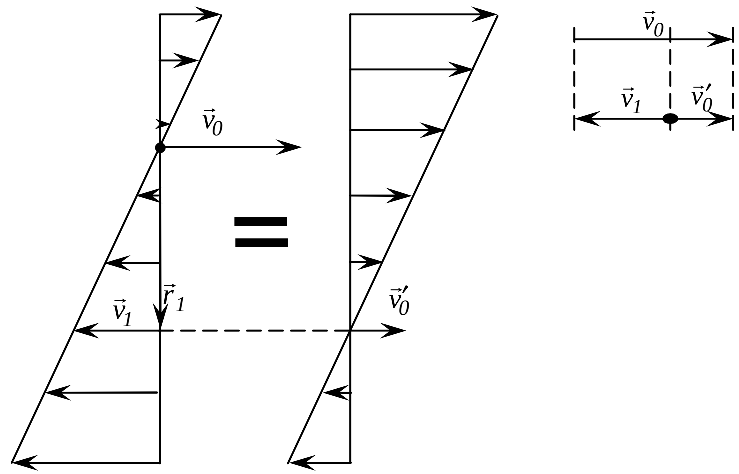


Рис. 1.19. До питання про абсолютний характер кутової швидкості

***Питання для самоконтролю до розділу***
***1. Основні поняття кінематики***

1. Що означає "задати систему відліку"?
2. Що таке «матеріальна точка»?
3. Що таке «кількість ступенів вільності механічної системи»?
4. Що таке «радіус-вектор»?
5. Що таке «траєкторія»?
6. Чим відрізняється «шлях, який пройдено» від «переміщення»?
7. Як визначається швидкість за відомою залежністю радіус-вектора від часу?
8. Як визначається прискорення за відомою залежністю швидкості від часу?
9. Як визначається швидкість за відомою залежністю прискорення від часу?

10. Як визначається положення матеріальної точки за відомою залежністю швидкості від часу?
11. Що таке «нормальне прискорення»?
12. Що таке «дотичне прискорення»?
13. Що таке «годограф швидкості»?
14. Що таке «абсолютно тверде тіло»?
15. Який рух абсолютно твердого тіла називається плоским?
16. Який рух абсолютно твердого тіла називається поступальним?
17. Що таке «миттєва вісь обертання»?
18. Як за відомими швидкостями двох точок абсолютно твердого тіла визначити положення миттєвої осі обертання?
19. Де розташовані миттєві осі обертання коліс, що рухаються без ковзання, з ковзанням і з пробуксовкою?

## *2. Динаміка матеріальної точки*

Динаміка вивчає механічний рух з позиції встановлення причин, з яких цей рух відбувається та чому він змінюється.

Обговоримо спочатку вибір системи відліку, бо це є важливим питанням при розв’язанні задач динаміки. Один і той самий механічний рух виглядає по-різному відносно різних систем відліку (або відносно різних механічних об’єктів). Разом із тим вибір системи відліку дослідником є довільним, що означає рівноправність різних систем відліку. Тому спроба обрати таку систему відліку, в якій механічний рух виглядав би та описувався б математичними формулами в найбільш простий спосіб, виглядає природною. Для знаходження такої системи відліку розглянемо механічний об’єкт, який знаходиться настільки далеко від інших механічних об’єктів, що вони не впливають на його рух. Такий об’єкт називають вільною матеріальною точкою. Звичайно, умови вільного руху на практиці реалізувати можна тільки приблизно, але принципово можна уявити собі такі умови, які забезпечують вільний рух матеріальної точки з потрібною точністю.



Вільний рух, як і решта типів механічного руху, виглядає в різний спосіб у різних системах відліку. Але якщо в якості системи відліку обрати систему, що пов’язана з певною вільною матеріальною точкою, то в такій системі відліку вільний рух виглядатиме дуже просто: це буде рівномірний прямолінійний рух. Це твердження складає зміст закону інерції, який встановив Галілей[3]. Система відліку, що пов’язана з вільною матеріальною точкою, називається **інерціальною системою відліку.**

Цікаво, що введення інерціальної системи відліку як такої, що характеризується такими специфічними властивостями, однаково не дозволяє ввести стани абсолютного спокою, абсолютного руху та абсолютного простору. Справа в тім, що інерціальних систем відліку існує нескінченна кількість. Дійсно: будь-яка система відліку, що рухається прямолінійно та рівномірно відносно інерціальної системи відліку, також є інерціальною системою відліку. Вивчаючи вільний рух, неможливо відрізнити різні інерціальні системи відліку. Більше того: всі фізичні явища відбуваються в різних інерціальних системах відліку в подібний спосіб. Всі закони природи проявляються в однаковий спосіб у різних інерціальних системах відліку. Тому всі інерціальні системи відліку є еквівалентними (тобто такими, що їх не можна ніяким фізичним способом відрізнити одну від одної). Цей постулат про

[3] Галіле́й (Galilei) Галіле́о (1564-1642) – італійський мислитель епохи Відродження, засновник класичної механіки, фізик, астроном, математик. Галілей сформулював принцип відносності руху для прямолінійного і рівномірного руху, закон вільного падіння тіл, ідею про ізохронізм коливання маятника, ідею інерції (1609), поняття про інертну та гравітаційну маси. Винайшов гідростатичні ваги для швидкого визначення складу металевих сплавів; визначив питому вагу повітря. Винайшов термоскоп, що є прообразом термометра. Створив перший телескоп. Висунув ідею застосування маятника в годиннику. Галілей здійснив низку важливих астрономічних відкриттів – гори і кратери на Місяці, розміри зірок та їхня колосальна віддаленість, плями на Сонці, 4 супутники Юпітера, фази Венери, кільця Сатурна. Галілею належить ідея скінченності швидкості поширення світла.

інерціальні системи відліку, що є одним із фундаментальних у механіці, називають принципом відносності руху.

Звичайно, існування інерціальних систем відліку не обмежує право дослідника обрати будь-яку іншу систему відліку: просто в усіх інерціальних системах відліку закони механіки формулюються однаково та в найбільш простий спосіб. Тому надалі ми вивчатимемо механічний рух саме відносно інерціальних систем відліку, і лише один окремий розділ нашого курсу буде спеціально присвячено механічному руху відносно неінерціальних систем відліку, які рухаються з прискоренням відносно інерціальних систем відліку. Необхідність у цьому пов’язана, по-перше, з тим, аби знати, наскільки важливою є інерціальність системи відліку; в по-друге, існують такі задачі механіки, в яких рух простіше виглядає з неінерціальної системи відліку.

## *2.1. Фізичні величини, якими оперує розділ “Динаміка матеріальної точки”*

На додаток до основних термінів, якими оперує кінематика, при описанні механічного руху в динаміці вводяться ще три терміни: основний – маса, і такі, що є похідними: імпульс і сила.

Маса – це міра інертності механічних об’єктів. Вона характеризує властивість тіл опиратись зміні їхньої швидкості. Що більша маса тіла, то менше змінюється його швидкість за однакових інших умов.

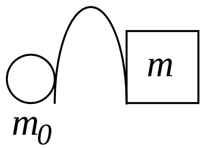


Рис. 2.1. До вимірювання маси

Якщо вести мову про певний еталон маси, наприклад, $m_0 = 1\,кг$, то це є маса одного літра чистої води при тиску в одну атмосферу та температурі $t=4^\circ\,C$. Тоді невідому масу можна експериментально визначити через дослід із взаємодії невідомої $m$ та еталонної $m_0$ мас. Поставимо на горизонтальну поверхню два невагомі возики. На один покладемо еталон, на інший – тіло невідомої маси. Стиснемо возиками пружинку і відпустимо возики – вони



покотяться у протилежних напрямках (див. рис. 2.1). Вимірявши модулі швидкостей еталонної та невідомої мас $\upsilon_0$ і $\upsilon$, відповідно, обчислимо невідому масу: $m=m_0\upsilon_0/\upsilon$.

Імпульс – це добуток маси матеріальної точки на її швидкість: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. Імпульс вимірюється в таких одиницях: $[p]$=кг×м/с.

В процесі руху вільної матеріальної точки її імпульс відносно інерціальних систем відліку залишається незмінним. Якщо ж матеріальна точка взаємодіє з іншими матеріальними точками, то імпульси взаємодіючих матеріальних точок з часом змінюються, але при цьому імпульси та їхні зміни пов’язані між собою в певний спосіб.

Замкненою системою матеріальних точок (або замкненою механічною системою) називають сукупність матеріальних точок, які взаємодіють тільки між собою та не взаємодіють із зовнішніми механічними об’єктами. Для замкнених систем існує низка таких величин, які визначаються через імпульс, і при цьому не змінюються з часом. Наприклад, не змінюється з часом повний (сумарний) вектор імпульсу замкненої системи. Тому поняття про імпульс та його властивості є дуже важливими в задачах про динаміку системи матеріальних точок.

Сила – це векторна фізична величина, яка характеризує інтенсивність взаємодії механічних об’єктів. Силу (англійською *force*) зазвичай позначають як $\vec{F}$. Унаслідок взаємодії тіл з фізичними об’єктами, що їх оточують, відбувається зміна імпульсу цих тіл. Тому інтенсивність взаємодії між даними тілами та фізичними об’єктами оцінюють по тому, як змінюється імпульс тіл внаслідок цієї взаємодії. Вимірюючи зміну імпульсу тіла $\Delta\vec{p}$ протягом фізично короткого проміжку часу $\Delta t$, можна визначити величину і напрямок сили, яка діє на тіло: $\vec{F} = lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \equiv \dfrac{d\vec{p}}{dt}$. Сила вимірюється в Ньютонах: $[F]$=кг×м/с$^2$ ≡Н. На цьому принципі побудовано дію приладу, яким вимірюють силу, – динамометра. Найпростіший динамометр влаштовано так: один кінець пружини закріплено на

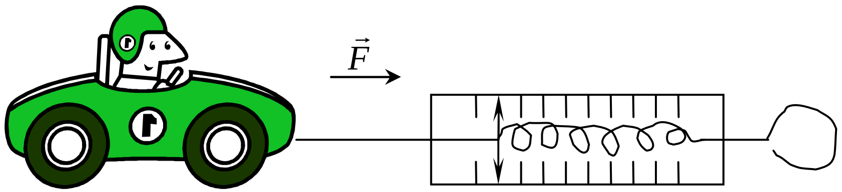



Рис. 2.2

пластині, до другого кінця прикладають силу. Що більша сила, то сильніше розтягується пружина. До одного з витків пружини прикріпимо стрілочку (див. рис. 2.2). Приєднаємо до другого кінця пружини тіло одиничної маси. Якщо під дією пружини тіло набуває одиничного прискорення, то напроти стрілочки зробимо позначку «1 Н». Потягнемо за динамометр із більшою силою. Коли під дією пружини тіло набуде прискорення в 2 м/с$^2$, зробимо напроти стрілочки позначку «2 Н» – так побудуємо шкалу, і динамометр готовий до використання.

Швидкості механічних рухів у класичній механіці є дуже малими порівняно зі швидкістю світла, тому у цьому наближенні можна вважати, що механічна взаємодія відбувається просто миттєво.

В усіх механічних явищах взаємодію обумовлено двома типами сил: гравітаційними та електромагнітними (детально про класифікацію взаємодій дивись розділ 4). Сила гравітації визначає інтенсивність, з якою усі механічні об'єкти притягуються один до одного в залежності від відстані між ними. Інші сили у задачах класичної механіки мають електромагнітну природу: це – сили пружності та тертя (сили інерції виникають у неінерціальних системах відліку – дивись розділ 5). Для визначення інтенсивності цих двох сил у механіці використовують феноменологічний підхід: моделюють аналітичні вирази для них за результатами експериментів.



## *2.2. Закони Ньютона*

Теоретичну основу класичної механіки складають три закони Ньютона[4].

Перший закон Ньютона стверджує: «Існують такі системи відліку, що називаються інерціальними, в яких матеріальна точка або перебуває у стані спокою, або рухається прямолінійно та рівномірно, якщо векторна сума всіх зовнішніх сил, що діють на матеріальну точку, дорівнює нулю».

Другий закон Ньютона визначає, що: «В інерціальних системах відліку швидкість зміни імпульсу матеріальної точки з часом дорівнює векторній сумі усіх зовнішніх сил, що діють на дану матеріальну точку, $d\vec{p}\,/\,dt = \sum_j \vec{F}_j^{\,зовн}$ ».

Третій закон Ньютона свідчить, що: «Взаємодія матеріальних точок між собою відбувається в такий спосіб, що сила $\vec{F}_{12}$, з якою перша матеріальна точка діє на другу матеріальну точку, дорівнює за модулем і протилежна за напрямком силі $\vec{F}_{21}$, що діє з боку другої матеріальної точки на першу: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$».

Осмислення першого закону Ньютона дозволяє дійти висновку, що це є дещо розширений варіант ***закону інерції Галілея***. Важливим у цьому законі є вказівка на векторний характер сил, що саме за умови рівності нулю результуючої сили (як векторної суми усіх зовнішніх сил) можливим стає реалізація рівномірного прямолінійного руху матеріальних точок. З іншої

[4] Нью́то́н (Newton) Ісаа́к (1643 -1727) – видатний англійський фізик. Очолював кафедру в Кембриджському університеті (1669-1701). З 1699 – директор Королівського монетного двору. Член Паризької Академії Наук. Ньютон увів основні поняття та аксіоматику класичної механіки, зокрема, поняття маси, кількості руху, сили, прискорення; три закони руху, закон всесвітнього тяжіння, пояснив особливості руху Місяця, явище прецесії; розвинув теорію форми Земної кулі, теорію припливів і відпливів, встановив закон опору та основний закон внутрішнього тертя в рідинах і газах, дав формулу для швидкості поширення хвиль.

точки зору, цей закон Ньютона можна розглядати як частинний випадок другого закону Ньютона, якщо не брати до уваги вказівку на інерціальність систем відліку, в яких є справедливими закони Ньютона. Слід також узяти до уваги історичний аспект значення першого закону Ньютона. До Ньютона у фізиці панувала інша точка зору, яка йшла ще з учення Аристотеля[5]: «Механічний об'єкт рухається тільки внаслідок дії зовнішньої сили. Якщо $\vec{F}_{рез} = 0$, то і швидкість його $\vec{V} = 0$». Це, на перший погляд, співпадає з повсякденним побутовим досвідом, але насправді є помилковим враженням.

Використовуючи другий закон Ньютона для розв'язання задач з механіки, потрібно пам'ятати, що він є справедливим для інерціальних систем відліку, динаміка руху матеріальних точок відносно неінерціальних систем відліку описується іншим законом. З векторного характеру другого закону Ньютона (тобто через те, що $d\vec{p}/dt = \sum_j \vec{F}_j^{зовн}$) випливає принцип незалежності механічних рухів. Сутність цього принципу полягає в тому, що, спроектувавши рівняння, яке є математичним формулюванням другого закону Ньютона, на три незалежні напрямки і представивши його у вигляді трьох скалярних рівнянь, дійдемо висновку, що зміна імпульсу вздовж певної осі координат залежить тільки від суми тих сил, що мають складові саме вздовж цієї осі, але не залежить від суми інших сил, що мають ненульові значення проекції на інші осі даної системи координат. Особливо слід підкреслити, що другий

[5] Арисmóтель (Ἀριστοτέλης; 384 до н. е.- 322 до н. е.) – давньогрецький учений-енциклопедист. У 367-347 до н. е. навчався в академії Платона в Афінах, у 343-335 до н. е. був вихователем сина царя Македонії Філіппа — Александра. Систематизував розвиток античної науки впродовж 15 століть. Найбільш довершеним елементом матерії Аристотель вважав ефір. Вказав, що зміна властивостей призводить до зміни агрегатного стану речовини. Звук Аристотель пояснював «струсом» повітря звучним тілом, луну — відбиванням звуку. Аристотель не зумів збагнути принцип інерції.



закон Ньютона ні в якому разі не є визначенням сили. Це фундаментальний закон механіки, бо:

1) у визначенні йдеться про одну силу, а в другому законі Ньютона важливою обставиною є присутність суми усіх зовнішніх сил,

2) другий закон Ньютона передбачає адитивність мас (маса складного тіла дорівнює сумі мас складових). Це, на перший погляд, здається очевидним, але нагадаємо, що всі теоретичні твердження стосовно властивостей природи потребують перевірки на справедливість різними незалежними експериментами.

Другий закон Ньютона може бути використаний: по-перше, для розв'язання задач динаміки, якщо відомо, як $\vec{F}_{рез}$ залежить від координат взаємодіючих механічних об'єктів, а по-друге, для доведення ***закону збереження повного імпульсу замкненої системи матеріальних точок***.

Другий закон Ньютона вказує на причину зміни імпульсу, на причину прискорення тіла – цією причиною є ненульова рівнодіюча сил.

У випадку незмінної маси тіла, другий закон Ньютона спрощується і набуває вигляду $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_j^{зовн}$. Під дією однакових сил легше тіло набуває більшого прискорення, і важче тіло – меншого прискорення. Або, що те саме, для того, аби надати певного прискорення тілу меншої маси, потрібна менша сила, ніж для того, аби надати того самого прискорення тілу більшої маси.

Випадок, коли маса тіла змінюється з часом, ми розглянемо окремо, оскільки цей випадок відповідає реактивному руху.

Другий закон Ньютона допускає оборотність часу, яка є властивою класичній механіці. Коли замінити напрямок часу: $t \to -\tau$, другий закон Ньютона лишиться справедливим: $m\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = \sum_j \vec{F}_j^{зовн}$.

Третій закон Ньютона свідчить, що сума усіх внутрішніх сил, що діють у замкненій системі, дорівнює нулю: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... = 0$. Це просте рівняння виражає фундаментальний принцип механіки: «Механічні об’єкти взаємодіють між собою так, щоб їхня енергія була мінімальною, тобто $\sum_j \vec{F}_j^{\,внут} = 0$». Аналізуючи третій закон Ньютона, приходимо до висновку, що внутрішні сили не є причиною руху системи матеріальних точок як цілого. Саме наявність зовнішньої сили $\vec{F}^{\,зовн} \neq 0$ призводить до руху системи матеріальних точок.

Інколи в окремих підручниках автори наполягають на тому, що за третім законом Ньютона сили, з якими взаємодіють два тіла, діють вздовж прямої, що поєднує ці тіла. Хибність цього твердження легко продемонструвати на прикладі взаємодії пішохода та Землі. Доки людина є нерухомою, вона відчуває лише силу тяжіння та нормальної реакції поверхні Землі, і сили взаємодії дійсно спрямовані вздовж прямої, що поєднує центри мас людини і Землі. Але якщо людина починає рухатись, її прискорення вздовж поверхні Землі зумовлює сила тертя, яка є дотичною до поверхні Землі. У цьому випадку сили взаємодії людини і Землі лишаються антипаралельними, але вже не спрямовані вертикально – не поєднують центри мас людини і Землі.

Таким чином, усі три закони Ньютона є взаємно пов’язаними та складають теоретичну базу, на якій побудовано класичну механіку.

## *2.3. Методика розв`язання задач динаміки механічного руху*

Можна виділити два основні методи розв`язання задач з динаміки руху матеріальної точки. Перший метод полягає в прямому інтегруванні другого закону Ньютона за умов, коли відома залежність зовнішньої результуючої сили від координат та часу, якщо така існує, а також дві початкові умови: на швидкість та координату. Другий метод полягає у використанні



законів збереження (законів збереження імпульсу та енергії), які мають бути відомі зі шкільного курсу фізики. Більш детально про закони збереження написано у параграфі 2.6 та у розділах 3 та 4, відповідно.

### *Задача 1*

*Дано:* Конічний маятник – це тіло маси $m$, яке підвісили на ідеальній (невагомій і нерозтяжній) мотузці довжиною $L$; його розміри є нехтовно малими порівняно з $L$. Конічний маятник рівномірно рухається по колу навколо вертикальної осі, що проходить крізь точку підвісу. Силами тертя можна знехтувати.

*Знайти:* період обертання конічного маятника, тобто час, протягом якого маятник виконує повний оберт.

*Розв`язання:*

Намалюємо рисунок, що показує в обраній системі координат (вигляд маятника збоку представлено на рис. 2.3) напрямки дії усіх зовнішніх сил. На рис. 2.3 позначено: $R$ – радіус траєкторії, $R = L\sin\Theta$, кут $\Theta$ відраховується від вертикалі до мотузки, на якій обертається маятник.

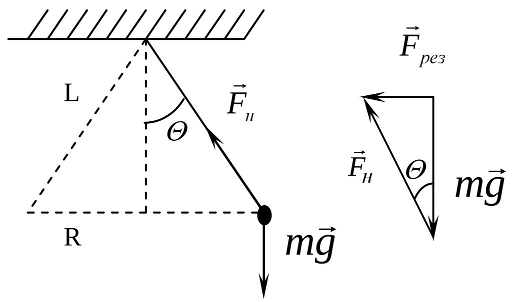


Рис. 2.3. До задачі 1

Визначимо сили, що діють на маятник. Оскільки маятник рухається в полі тяжіння Землі, то одна з цих сил – це сила тяжіння $m\vec{g}$, що діє вертикально вниз. Інший об’єкт, з яким взаємодіє маятник, – це мотузка, на якій його підвішено, тому друга сила – це сила натягу мотузки $\vec{F}_Н$, що діє вздовж мотузки. Оскільки за умовами задачі немає інших об’єктів, з якими взаємодіє маятник, то немає й інших сил.

Оскільки в напрямку руху маятника ніякі сили не діють, то лінійна швидкість маятника є незмінною за модулем: $V = const$; а отже, і кутова швидкість є сталою: $\omega = d\varphi / dt = const$ .

Оскільки за умовами задачі маятник рівномірно рухається по колу, то його прискорення, а отже і результуюча сила, спрямовані до центру кола (горизонтально). Це дає можливість побудувати трикутник сил (див. рис. 2.3), з якого знаходимо зв'язок результуючої сили та сили тяжіння:

$$F_{рез} = mg\, tg\Theta . \qquad (2.1)$$

Проекція другого закону Ньютона на радіальний напрямок має вигляд:

$$F_{рез} = ma , \qquad (2.2)$$

де доцентрове прискорення дорівнює

$$a=\omega^2 R=\omega^2 L sin\Theta. \qquad (2.3)$$

Після підстановки явних виразів (2.1) та (2.3) до другого закону Ньютона (2.2) дістаємо: $g{\cdot}tg\Theta=\omega^2 L{\cdot}sin\Theta$, звідки $\omega^2 = g/(L\cos\Theta)$ . Оскільки $\omega T = 2\pi$ , то для періоду коливань маємо:

$$T = 2\pi\sqrt{L\cos\Theta / g} . \qquad (2.4)$$

Проаналізуємо здобутий вираз (2.4). Період конічного маятника є тим більший, чим довша мотузка, а також чим більший $\cos\Theta$ (тобто, чим менший $\Theta$). Це зрозуміло: що швидше рухається маятник, то більший кут $\Theta$ утворює мотузка з вертикаллю, а період є зворотно пропорційним до швидкості. При $\Theta = 0$ з (2.4) дістаємо знайомий зі шкільного курсу вираз для періоду математичного маятника, тому цього разу не будемо перевіряти кінцеву формулу на розмірність. Але нагадаємо про



високу ефективність і простоту цього методу перевірки справедливості тих чи інших формул.

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{L\cos\Theta / g}$ .

### *Задача 2*

*Дано:* Матеріальна точка падає з висоти $h$ на абсолютно гладку пружну площину, яка утворює кут $\alpha \le \pi / 4$ з рівнем горизонту.
*Знайти:* траєкторію руху матеріальної точки після пружного відбиття від даної похилої площини, нехтуючи опором повітря.
*Розв`язання:*

Намалюємо рисунок, що відображує геометрію задачі (див. рис. 2.4). Оберемо декартову систему координат. Покажемо на рис. 2.4 напрямки швидкостей при вертикальному падінні та одразу після пружного відбиття, напрямок дії єдиної зовнішньої сили – сили тяжіння $m\vec{g}$ .

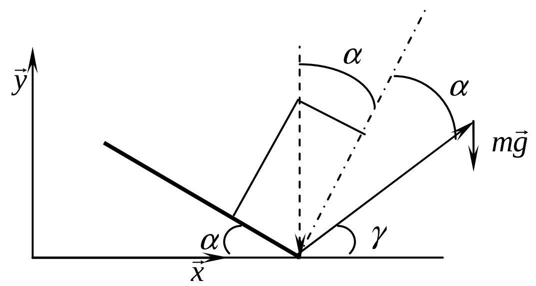


Рис. 2.4. До задачі 2

Оскільки відбулося пружне відбиття, то кути між напрямками швидкостей та нормаллю до похилої площини перед та після удару мають бути однаковими. Тобто кут відбиття та кут падіння дорівнюють $\alpha$ . З аналізу рисунка видно, що утворилося два прямі кути: перший, похила площина-нормаль до неї; другий, вертикаль-рівень горизонту. Далі можна зробити висновок: сума двох кутів $\alpha$ та невідомого кута $\gamma$ складає $\pi/2$, тому $\gamma=\pi/2-2\alpha$

Щоб розв`язати задачу про траєкторію польоту після відбиття матеріальної точки від похилої площини, слід спочатку знайти величину швидкості $\upsilon_0$, з якою матеріальна точка падає на похилу площину. Бо саме з таким модулем швидкості і почнеться рух матеріальної точки після її пружного відбиття від похилої площини.