Билет № 24

24.1

Теорема Гюйгенса-Штейнера: «Момент инерции данного абсолютно твердого тела относительно произвольной оси а равно сумме его момента инерции относительно другой оси, является параллельной а и проходит через центр масс этого абсолютно твердого тела, произведению массы данного абсолютно твердого тела на квадрат расстояния между указанными осями ».24.1

Порахуємо моменти інерції абсолютно твердого тіла відносно двох різних паралельних осей. Нехай ці осі проходять крізь точки O та A (рис. 6.1), тоді за теоремою косинусів квадрат відстані між точкою A та i-ю складовою абсолютно твердого тіла (на рис. 6.1 її позначено як MT_i) дорівнює: $r_1^2 = r_2^2 + a^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{r}_2)$. Це надає можливість обчислити момент інерції даного абсолютно твердого тіла відносно осі, що проходить крізь точку A перпендикулярно до площини рисунку:

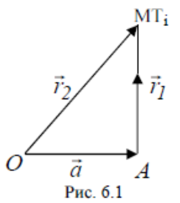

Рис. 6.1

$$\sum_i m_i r_{1i}^2 = \sum_i m_i (r_{2i}^2 + a^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{r}_{2i}). \qquad (6.6)$$

Перепишемо це так:

$$I_A = I_O + ma^2 - 2m\vec{a}\cdot\vec{R}_C, \qquad (6.7)$$

де $\vec{R}_C = \sum \vec{r}_{2i} m_i / m$ – це радіус-вектор центру мас відносно точки O. Якщо вісь «O» проходить крізь центр мас, то $\vec{R}_C = 0$, і попередня формула (6.7) спрощується:

$$I_A = I_O + ma^2. \qquad (6.8)$$

24.2

Дано

Найти

Найдем скорость нижнего снаряда.

$$H = v_H t + \frac{gt^2}{2} \Rightarrow v_H = \frac{H - \frac{gt^2}{2}}{t}$$ Из закона сохранения импульса следует, что центр масс снаряда будет двигаться также как и до взрыва.

$v_v = v_H$ Тогда конечная скорость состоит из горизонтальной и вертикальной $\vec{v} = \vec{v}_v + \vec{V}$

$$v = \sqrt{v_v^{\,2} + V^2} \quad tg\alpha = \frac{v_v}{V}$$

Масу стрижня в однаковий спосіб розташовано відносно осей x і y, тому моменти інерції стрижня відносно цих осей дорівнюють один одному, $I_x = I_y$. Порахуємо момент інерції стрижня відносно осі x на основі визначення (6.2). У ньому для стрижня квадрат відстані від елементарної маси до осі $r_{\perp i}^2 = z^2$; маса окремого елементу є добутком густини стрижня $\rho = m/(Sl)$ (тут S – це площа поперечного перерізу стрижня) та об'єму $dV = Sdz$ цього елементу, $m_i = \rho dV = (m/l)dz$. Інтегрування ведеться по всьому об'єму стрижня від краю з координатою $(-l/2)$ до іншого краю з координатою $(l/2)$:

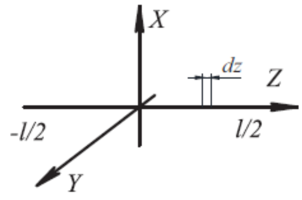

Рис. 6.2. До обчислення моменту інерції стрижня

$$I_x = \int_{-l/2}^{l/2} z^2 \frac{m}{l} dz = \frac{m}{l}\frac{z^3}{3}\Bigg|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m}{3l}\left(\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(\frac{-l}{2}\right)^3\right) = \frac{ml^2}{12}. \qquad (6.9)$$

Цей результат відповідає вимогам розмірності, $[I]$=кг·м^2.

2). Порахуємо тепер моменти інерції однорідної прямокутної **пластини** масою m, довжиною a, шириною b та малою товщиною c, $c \ll a,b$, як суми моментів інерції окремих стрижнів, з яких складається пластина (рис. 6.3).

Момент інерції окремого i-го стрижня I_{xi} відносно осі x дорівнює, як було показано вище, $I_{xi} = m_i b^2/12$. Момент інерції пластини I_{xi} відносно осі x дорівнює

$$I_x = \sum_i \frac{m_i b^2}{12} = \frac{b^2}{12}\sum_i m_i = \frac{mb^2}{12}. \qquad (6.10)$$

Момент інерції i-го стрижня I_{yi} відносно осі y дорівнює добутку маси стрижня m_i на квадрат x^2 відстані від стрижня до осі y, $I_{yi} = m_i x^2$. Маса m_i i-го стрижня дорівнює добутку густини пластини $\rho = m/(abc)$ та об'єму $dV = bcdx$ i-го стрижня, $m_i = m/(a)dx$. Додавання моментів інерції окремих стрижнів відносно осі y полягає в інтегруванні за координатою x від лівого краю з координатою $x = -a/2$ до правого краю з координатою $x = a/2$:

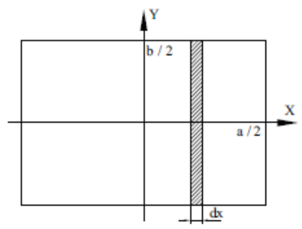

Рис. 6.3. До обчислення моменту інерції прямокутної пластини

$$I_y = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \frac{m}{a} dx = \frac{m}{a}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-a/2}^{a/2} = \frac{m}{3a}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{-a}{2}\right)^3\right) = \frac{ma^2}{12}. \qquad (6.11)$$