

Mathematica 4.2

Занятие №2

24 сентября 2008 г.

Аннотация

На данном занятии необходимо познакомиться с сложной структурой данных «список», освоить особенности его применения, рассмотреть встроенные функции, предназначенные для работы со списками. Также необходимо рассмотреть реализацию основных операций линейной алгебры.

Основные функции для работы со списками

Задание №1

Создать одномерный список со значениями $-10, -9.9, \dots, 10$. Задание выполнить несколькими способами.

Задание №2

Создать одномерный список с 50 значениями, представляющими собой псевдослучайные целые числа в диапазоне $[0; 9]$.

Задание №3

Создать список значений функции $\sin(xy)$ при изменении переменной x в пределах $[0, \pi]$ с шагом 0.5, а переменной y в пределах $[0, 3\pi]$ с шагом 0.2.

Задание №4

Осуществить вывод списка, полученного в **Задании №3** в виде матрицы и в виде таблицы, столбцы которой выровнены по левому краю. В таблице строки должны нумероваться автоматически, а столбцы должны быть озаглавлены строками “One”, “Two”, “Three”, ..., соответственно.

Задание №5

Определить количество элементов в одномерном списке, полученном в **Задании №1** и размерность списка, полученного в **Задании №3**. Определить размеры списка по каждой из размерностей.

Задание №6

Определить положение числа 1.0 в одномерном списке, полученном в **Задании №1** и положение числа 0 в матрице, полученной в **Задании №3**.

Задание №7

Создать список, из одномерного списка, полученного в **Задании №1**, из которого удалены первые 100 элементов. Создать список, из матрицы, полученной в **Задании №3**, из которой удалены две верхние строки.

Задание №8

Вставить строку, состоящую из единиц между третьей и четвертой строкой матрицы, полученной в **Задании №3**.

Задание №9

Преобразовать матрицу, полученную в **Задании №3** в одномерный список. Добавить полученный список в начало одномерного списка, полученного в **Задании №1**. В результате должен также получиться одномерный список. Определить количество элементов в полученном списке.

Задание №10

Создать список $\{\{201\}, \{\{4\}, 6\}\}$. Получить первый и второй элементы этого списка. “Вытащить” каждое число из этого списка.

Задание №11

По списку $lst = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ постройте новый список $lstNew$, содержащий каждый третий элемент списка lst . Из списка lst удалите каждый третий элемент.

Задание №12

Из списка $lst = \{a, 1, b, 0, c, 0, 0, d\}$ исключите все нулевые элементы.

Задание №13

В списке $lst = \{3, -2, -5, 7\}$ найдите элемент с минимальным абсолютным значением.

Задание №14

Найдите позицию первого отрицательного элемента в числовом списке lst .

Задание №15

Даны матрица m и столбец l . Как вставить l k -м столбцом в матрицу?

Задание №16

Как с помощью функции **Table** получить список:

$$\{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 1, 4, 9\}, \{0, 1, 4, 9, 16\}\}$$

Задание №17

Создать таблицу с тремя столбцами: значение переменной x (I столбец), значения функций $\sin(x)$ (II столбец) и $\cos(x)$ (III столбец) в пределах $x \in [0, 2\pi]$ с шагом 0.1. Из этой таблицы извлечь два первых столбца (значения x и $\sin(x)$) и в этой новой таблице неотрицательные значения во втором столбце увеличить в два раза, а отрицательные — занулить.

Задание №18

Создать список из $ptNum$ координат точек на плоскости (x_i, y_i) . Значения x_i — псевдослучайные вещественные числа из диапазона $[0, \pi]$, y_i — псевдослучайные вещественные числа из диапазона $[0, 4]$. Определить, сколько точек находится под кривой, заданной уравнением $y = x^2 \sin(x)$. Используя полученные результаты оценить значение интеграла $\int_0^{\pi} y(x) dx$. Исследовать, как изменяется результат в зависимости изменения значения $ptNum$.

Задание №19

Задана таблица значений функции вида: $\{\{x_1, f(x_1)\}, \{x_2, f(x_2)\}, \dots, \{x_n, f(x_n)\}\}$. При необходимости отсортировать ее по возрастанию значений x_i . С помощью простейшей разностной формулы найти приближенное значение производной:

$$f'(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Задачу решить в предположении, что элементы первого столбца таблицы расположены неравномерно. Сравнить с точным, аналитически полученным значением. Найти максимальную абсолютную ошибку и соответствующее значение x_i .

Задание №20

Построить таблицу функции $\sin(x)$ вида $\{\{x_1, f(x_1)\}, \{x_2, f(x_2)\}, \dots, \{x_n, f(x_n)\}\}$. Пусть $x_{beg} = 0$, $x_{end} = 2\pi$, $x_{step} = 0.4$. Для внутренней точки x интервала $[x_{beg}, x_{end}]$, лежащей между узлами таблицы, с помощью линейной интерполяции получить значение функции.

Формула линейной интерполяции в форме Лагранжа имеет вид:

$$y = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2,$$

где x_1, x_2, y_1 и y_2 — заданные точки, а интерполируемое значение x расположено между x_1 и x_2 .

Задание №21

Провести процедуру отделения корней для заданной функции одной переменной $f(x)$. Отдельно рассмотреть случаи:

- “обычных” корней (взять функцию $f(x) = \sin(x)/x$, $x \in [0, 9]$);
- “необычных” корней (взять функцию $f(x) = |\sin(x)/x|$, $x \in [0, 9]$).

Начало секции дополнительных заданий

Задание №22

Найдите сумму отрицательных чисел в списке $l = \{a, 2, -1, b, c, -3\}$.

Задание №23

Найдите среднее арифметическое квадратов элементов списка $l = \{-3, 4, -7, 0, 11\}$.

Задание №24

Преобразуйте числовой список l в *True*, если в нем есть простые числа, или в *False* в противном случае.

Задание №25

(Случайное блуждание по двумерной решетке). Получите список m из двадцати пар, порождаемых по следующему закону. Элементами первой пары являются случайно выбранные числа из множества $\{-1, 1\}$. Элементы второй пары получаются прибавлением к первой аналогичной случайной пары и т.д. После того, как список m будет получен, вычислите выражение:

`Show[Graphics[{Line[m]}]]`

Задание №26

Пусть $f(x, y) = x + y^3$, $g(x, y) = x^2 - y^2 - y$. Подсчитайте якобиан этих функций в точке $(0, 0)$.

Задание №27

Дана функция $f(x, y, z) = xy + z$. Подсчитайте градиент этой функции, т.е. получите список ее первых частных производных, с помощью функций **Outer** и **D**.

Задание №28

Дано векторное поле v в трехмерном пространстве:

$$v = \{f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)\}.$$

Получите выражение для дивергенции этого векторного поля с помощью функций **Inner** и **D**.

Задание №29

Даны список переменных $l = \{x, y, z\}$ и список их значений $m = \{1, 2, 3\}$. Получите список подстановок $r = \{x \rightarrow 1, y \rightarrow 2, z \rightarrow 3\}$.

Задание №30

Даны матрица $m = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, список неизвестных $l = \{x, y\}$ и список правых частей линейной системы уравнений $r = \{0, 1\}$. Получите линейную систему алгебраических уравнений с данной матрицей коэффициентов и списком правых частей.

Конец секции дополнительных заданий

Операции линейной алгебры

Задание №31

Для $x = 0, 0.1 \dots 3.0$ вычислить функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x & x & x \\ 1 & x & 0 & x & x & x \\ 1 & x & x & 0 & x & x \\ 1 & x & x & x & 0 & x \\ 1 & x & x & x & x & 0 \end{vmatrix}$$

Замечание: Матрицу получить с помощью вычислений.

Задание №32

Для $x = 0, 0.2 \dots 3.0$ вычислить функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 4} \begin{vmatrix} 2x & x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

Результат представить в виде таблицы с заголовками.

Замечание: Матрицу получить с помощью вычислений.

Задание №33

Для $x = 0, 1.0 \dots 5.0$ вычислить значение определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 + n \end{vmatrix}$$

Результат вычисления представить в виде таблицы с заголовками.

Задание №34

С точностью 10^{-1} табличным методом локализовать корень уравнения

$$\begin{vmatrix} 3 - 2x & 2 - x & 1 \\ 2 - x & x & 3x - 2 \\ 1 & 1 & 4x - 3 \end{vmatrix} = 0$$

на интервале $0 < x < 2$.

Задание №35

Для $n = 1, 2, \dots, 6$ вычислить A^n , где

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание №36

Для $a = 0; 0.1; 0.2$ вычислить A^{-1} , если:

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 32 & 9 & 12 \\ 40 & 56 & 15 & 21 \\ 15 & 20 & 6 & 8 \\ 25 & 35 & 10 & 14 + a \end{pmatrix}$$

Задание №37

Решить систему линейных алгебраических уравнений (двумя способами с проверкой):

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + 3y - 2z = 7 \\ x + 2y + 3z = 10 \end{cases}$$

Задание №38

Решить систему линейных алгебраических уравнений (двумя способами с проверкой):

$$\begin{cases} 10x + y + z = 1 \\ 2x + 10y + z = 2 \\ 3x + 5y + 15z = 3 \end{cases}$$

Задание №39

Для $n = 0, 1, 2$ решить систему линейных алгебраических уравнений (с проверкой):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 - n \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 + n^2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases}$$

Задание №40

Найти собственные векторы и собственные значения матрицы и непосредственным умножением проверить равенство $Ax = \lambda x$:

$$\begin{pmatrix} -147,0 & 384,5 & 97,6 & -40,7 \\ 384,5 & 50,6 & 12,0 & 27,0 \\ 97,6 & 12,0 & 157,6 & -108,6 \\ -40,7 & 27,0 & -108,6 & -136,9 \end{pmatrix}$$

Задание №41

Для $n = 0, 1, 2, 3$ найти собственные векторы и собственные значения симметричной матрицы и непосредственным умножением проверить равенство $Ax = \lambda x$:

$$\begin{pmatrix} 11+n & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Задание №42

Вычислить комплексные собственные значения и собственные векторы матрицы и непосредственным умножением проверить равенство $Ax = \lambda x$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Задание №43

Пусть задана некоторая квадратная матрица A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 15 & -4 \\ 3 & 11 & -2 & 9 \\ -6 & 4 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Построить следующую матрицу и найти ее определитель.

$$\begin{pmatrix} A & -A \\ 3A & A^2 \end{pmatrix}$$