

V Курс
Система компьютерной математики Mathematica

Контрольная работа
Вариант № 14

Задание №1

Построить трехмерный график поверхности, заданной в параметрическом виде уравнениями

$$\begin{cases} x(u, v) = \cos(u)u(1 + \cos(v)/2), \\ y(u, v) = \sin(v)u/2, \\ z(u, v) = \sin(u)u(1 + \cos(v)/2) \end{cases}$$

при изменении параметров u, v в диапазоне $[0, 2\pi]$. Пример оформления графика приведен на Рис. 1.

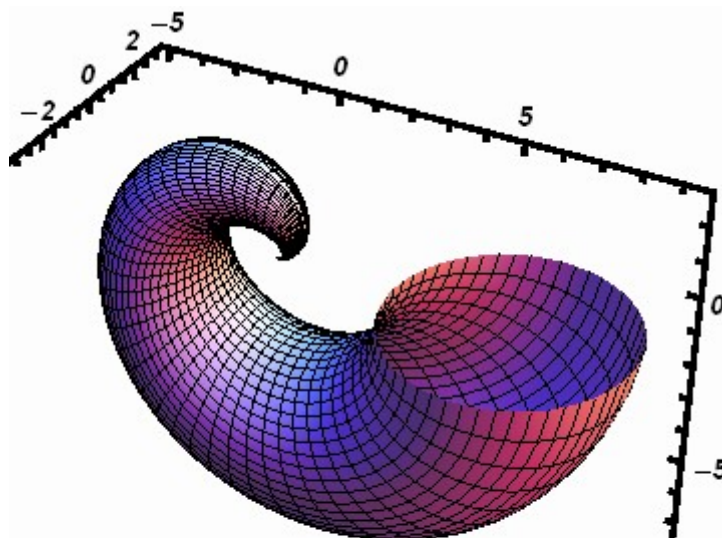


Рисунок 1. Пример оформления графика

Задание №2

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема, то производная в направлении вектора \vec{e} вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos(\alpha) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin(\alpha),$$

где α — угол, образованный вектором \vec{e} с осью Ox .

Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1, 1)$ в направлении \vec{e} , составляющем угол $\alpha = 60^\circ$ с положительным направлением оси Ox .

Задание №3

Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ — гладкая, (т.е. производная $y' = f'(x)$ — непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой равна:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \, dx.$$

Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$.

Задание №4

Найти решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0, \\ y - x - 1 = 0, \end{cases}$$

расположенные в области, ограниченной прямыми: $y=0$, $y=x$, $x=0.5$. Выполните проверку. Для локализации корня используйте функцию ContourPlot.

Задание №5

Для $t \in [0, 8]$ найти численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = x - xy, \\ y' = -y + xy. \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = 4, \quad y(0) = 1.$$

Построить график. Построить таблицу значений функций x и y при $t = 0, 0.2, 0.4, \dots, 8.0$.