

Система компьютерной математики *Mathematica*

Практическое занятие №3

На этом практическом занятии необходимо рассмотреть основные возможности системы *Mathematica* для численного и аналитического решения стандартных задач.

Задание №1

Получить в наиболее простом виде аналитическое выражение для первой производной следующей функции:

$$y(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \ln\left(\frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}\right)$$

Написать функция пользователя, которая получает два числа — значение аргумента x и порядок производной n , и возвращает численное значение n -той производной функции y в точке x . Построить график. Для решения задачи воспользоваться функцией `D[]`.

Задание №2

Неявная функция $y(x)$ определяется уравнением $x \cdot y^3 - (x+1)^2 \cdot y + 3 = 0$ и условием $y(0)=3$. Найдите значения первой и второй производной функции $y(x)$ при $x=0$. Построить график. Для решения задачи воспользоваться функциями `Solve[]`, `D[]` или `Dt[]`.

Задание №3

Найти $y' = \frac{d y}{d x}$, $y'' = \frac{d^2 y}{d x^2}$, если:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3(t) \\ y = a \cdot \sin^3(t) \end{cases}$$

Построить график функции $y'' = \frac{d^2 y}{d x^2}$ при $a=0.1$. Для решения задачи воспользоваться функцией `D[]`.

Задание №4

Пусть задана функция $z = y \cdot \ln(x)$. Найти: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Для решения задачи воспользоваться функцией `Dt[]`.

Задание №5

Исходя из определения производной (не пользуясь формулами дифференцирования), найти производную функции: $y = 2 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 4$. Для решения задачи воспользоваться функцией `Limit[]`.

Задание №6

Среднее значение функции f на интервале $[a, b]$ может быть вычислено по

формуле:

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Вычислить среднее значение функций

$$f(x) = 10 + 2\sin(x) + 3\cos(x),$$

$$g(x) = \sin(x)\sin(x+\varphi)$$

на интервале $[0, 2\pi]$. Для решения задачи воспользоваться функцией `Integrate[]`.

Задание №7

Среднее значение функции f на интервале $[0, +\infty)$ может быть вычислено по формуле:

$$M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) d\xi$$

Вычислить среднее значение функции $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2})$. Для решения задачи воспользоваться функциями `Limit[]` и `Integrate[]`.

Задание №8

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в декартовых координатах:

$$y = x^2, \quad x + y = 2.$$

Построить график. Для решения задачи воспользоваться функциями `Solve[]` и `Integrate[]`.

Задание №9

Площадь фигуры, заданной в параметрическом виде можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt.$$

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными параметрически:

$$x = a \cos t, \quad y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin t}.$$

Построить график. Для решения задачи воспользоваться функциями `Solve[]` и `Integrate[]`.

Задание №10

Численно решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + 2y &= 1.6, \\ \cos(y-1) + x &= 1. \end{cases}$$

Графическим способом найти интервал локализации корня. Отобразить решение на графике. Выполнить проверку. Для решения задачи воспользоваться функцией `FindRoot[]`.

Задание №11

Задана система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 16t \exp(t), \\ y' = 2x - 2y. \end{cases}$$

Найти ее аналитическое решение. Получить выражения констант интегрирования в зависимости от значений $x(0)$, $y(0)$. Найти решение системы при $x(0)=0$, $y(0)=1$. Построить график решения при $t \in [0, 1]$. Для решения задачи воспользоваться функциями DSolve[] и Solve[]. Для упрощения аналитического выражения применить функцию Simplify[].

Задание №12

Задана система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y. \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0)=0.2$, $y(0)=0.5$. Численно решить систему уравнений на интервале $0 \leq t \leq 2$. Сравнить численные результаты с аналитическим решением. Построить графики $x(t)$, $y(t)$ и $y(x)$. Для решения задачи воспользоваться функциями DSolve[] и NDSolve[].

Задание №13

Найдите численное решение задачи Коши для следующей системы Лоренца трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = -3 \cdot (x(t) - y(t)), \\ y'(t) = -x(t) \cdot z(t) + 30 \cdot x(t) - y(t), \\ z'(t) = x(t) \cdot y(t) - z(t). \end{cases}$$

для промежутка времени $t \approx 30$ при помощи встроенной функции NDSolve. Начальные значения для интегрирования принять равными $x(0)=0$, $y(0)=1$, $z(0)=0$. Результат использовать для наглядного представления траектории. Рисунок демонстрирует наличие так называемого *странного аттрактора* у траекторий системы Лоренца. Исследуйте, как изменится рисунок в зависимости от изменений коэффициентов 3 и 30, а также от интервала интегрирования. Сколько времени занимает численное интегрирование на вашем компьютере? Для решения задачи воспользоваться функциями NDSolve[] и Timing[].

Задание №14

Используя стандартные средства пакета Mathematica, найти решение краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t),$$

$$0 < x < l,$$

$$0 < t < \infty,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = \varphi(t), \quad u(l, t) = \psi(t).$$

Пусть заданы $F(x, t)=0$, $a^2=1$, $f(x)=\sin \pi x/4$ и $\varphi(t)=\psi(t)=0$. Построить график решения. Построить график решения, соответствующий решению при $x=2$. Построить график решения для выбранного момента времени t ($t=1$). Построим на одном рисунке

графики решений (с подписями) для различных моментов времени $t=0.5$, $t=1.0$, $t=1.5$ и $t=2.0$. Для решения задачи воспользоваться функциями `NDSolve[]`.

Задание №15

Найти положение локального минимума функции

$$f(x) = x + \frac{3}{x^2}$$

на интервале $x \in [0.5, 3]$ двумя способами. Сравнить результаты. Построить график, отобразить на нем решение. Для решения задачи воспользоваться функциями `FindMinimum[]`, а также `D[]` и `Solve[]`.

Задание №16

При каком подборе коэффициентов a и b величина

$$x - (a + b \cos(x)) \sin(x)$$

будет бесконечно малой 5-го порядка относительно x ? Для решения задачи воспользоваться функциями `Series[]`, `Normal[]` и `SolveAlways[]`.

Задание №17

Задана таблица значений функции

$$f(x) = \exp(x) \cos^2(x)$$

на интервале $x \in [0, \pi]$. Построить интерполяционную функцию. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi} f(x) dx$$

при помощи интерполяционной функции и вычислить его точное значение. Определить ошибку. Как ошибка зависит от числа разбиений отрезка. Построить графики. Для решения задачи воспользоваться функциями `Interpolation[]`, `Integrate[]` и `NIntegrate[]`.

Задание №18

Задана таблица значений функции

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

на равномерной сетке значений $x \in [-1, 1]$.

Построить интерполяционный полином, проходящий через эти точки. Нарисовать графики. Найти ошибки интерполяции. Оценить качество интерполяции при разном количестве точек. Для решения задачи воспользоваться функцией `InterpolatingPolynomial[]`.

Задание №19

Приведена таблица экспериментальных данных зависимости теплоемкости воды (c_p) от температуры (t), причем теплоемкость при 15°C принята за единицу.

c_p	1.00762	1.00392	1.00153	1.00000	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818
-------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

t	0	5	10	15	20	25	30	35
c_p	0.99828	0.99849	0.99878	0.99919	0.99967	1.00024	1.00091	1.00167
t	40	45	50	55	60	65	70	75
c_p	1.00253	1.00351	1.00461	1.00586	1.00721			
t	80	85	90	95	100			

При помощи метода наименьших квадратов построить полином, аппроксимирующий данную зависимость. Найти наибольшее отклонение расчетного значения от экспериментального и значение температуры, при котором найдено это отклонение. Построить графики. Для решения задачи воспользоваться функцией Fit[.]