

# Mathematica 4.0

## Занятие №1

5 сентября 2008 г.

### Аннотация

На первом занятии необходимо познакомиться с интерфейсом системы. Рассмотреть основные приемы работы с базовыми типами данных, и некоторыми встроенными функциями системы. Необходимо познакомиться с понятием *подстановки*, рассмотреть возможность создания функций пользователя.

### Простейшие вычисления

#### Задание №1

Получить остаток и целую часть от частного двух целых чисел.

#### Задание №2

Получить список делителей заданного целого числа.

#### Задание №3

Получить наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель последовательности целых чисел.

#### Задание №4

Найти  $n$ -е простое число.

#### Задание №5

Вычислить факториал заданного целого числа.

#### Задание №6

Получить несколько раз одну и ту же последовательность вещественных псевдослучайных чисел  $x$  в диапазоне  $x \in [0, 1]$ .

#### Задание №7

Получить несколько раз одну и ту же последовательность последовательность целых псевдослучайных чисел  $x$  в диапазоне  $x \in [-10, 10]$ .

## Задание №8

Вычислить выражения:

a). Что больше и насколько:  $e^\pi$  или  $\pi^e$ ?

b).  $0,75\sqrt{0,5} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ ;

c).  $100\frac{1}{2}\text{Ln}(9) - \text{Ln}(2)$ ;

d).  $\frac{8,15\sqrt[3]{14,36}}{24,36\sqrt{8,734}}$ ;

e).  $\sin\left(\arctg\left(\frac{1}{2}\right) + \text{arcc tg}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ ;

f).  $\sqrt{\frac{12,4 + 0,6\sqrt[3]{0,0548}}{0,38972}}$ ;

g).  $\cos(3 \cdot \arctg(3))\text{Ln}(1 + \sqrt[7]{10})$ .

Каждое выражение необходимо вычислить в двух стилях:

- в «обычном» входном формате — выражение записывается в одну строку по правилам, сходным с правилами любого языка программирования;
- в «современном» входном формате — выражение записывается с помощью шаблона ввода по правилам, сходным с правилами редактора Equation Editor.

Сравнить полученные результаты. Добиться того, чтобы они были одинаковы.

## Задание №9

Выполнить вычисления по формулам, присвоив переменным  $x$ ,  $y$ ,  $z$  некоторые определенные значения. Для каждой формулы вычисления провести с помощью немедленного и отложенного присваивания, при этом переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  получают начальные значения сначала до, а затем после определения переменных  $a$  и  $b$ . Проследить, в каких случаях переменные  $a$  и  $b$  «заново пересчитываются». После каждого вычисления убрать из памяти *Mathematica* определения всех переменных. Вычислить  $a$  и  $b$ , если:

a).  $a = \frac{\sqrt{|x-1|} - \sqrt[3]{|y|}}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}}$ ;

$$b = x \cdot (\arctg(z) + e^{-(x+3)});$$

b).  $a = y + \frac{x}{y^2 + \left| \frac{x^2}{y + \frac{x^3}{3}} \right|}$ ;

$$b = \left(1 + \text{tg}^2\left(\frac{z}{2}\right)\right);$$

c).  $a = \frac{1 + \sin^2(x+y)}{2 + \left| x - \frac{2x}{1 + x^2 y^2} \right|} + x$ ;

$$b = \cos^2\left(\arctg\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

### Задание №10

Выполнить вычисления, используя комплексную арифметику. Пусть  $x = a + i \cdot b$ ,  $y = c + i \cdot d$ . Вычислить:

$$\sqrt[3]{x} \operatorname{tg}(x+1) (y - e^{-x}) \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\sqrt{1+y^2}$$

Записать вещественную и мнимую части результата. Вычислить модуль и аргумент полученного комплексного числа. Получить число, комплексно сопряженное к результату.

### Функции пользователя

#### Задание №11

Написать функцию, которая численно вычисляет выражение:

$$\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+3}-1} e^{1-x} + \cos(x)$$

#### Задание №12

Написать функцию, которая бы вычисляла целое псевдослучайное число по правилам, заданным пользователем. Генератор псевдослучайных чисел:

$$x_{i+1} = (a \cdot x_i + b) \bmod MAX_x$$

Здесь  $a$  и  $b$  — некоторые константы.  $MAX_x$  — верхняя граница диапазона генерации. Примем  $a$  равным 123,  $b$  равным 12345, а  $MAX_x$  равным 255. Возьмем  $x_1$  равным 23.

Вычислить несколько первых псевдослучайных чисел в последовательности. Найти период полученного генератора. Изменить значения  $a$  и  $MAX_x$ . Проверить, как это повлияло на «качество» генератора.

#### Задание №13

Написать функцию, которая возвращала бы значение **True**, если ее аргумент находится в заштрихованной области на Рис. 1, и **False**, если нет.

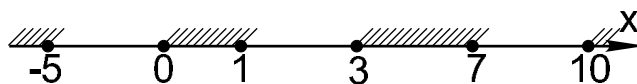


Рис. 1:

#### Задание №14

Написать функцию, которая принимает координаты декартовы  $x$   $y$  точки и возвращает значение **True** если точка принадлежит заштрихованной области на Рис. 2, и **False**, если не принадлежит.

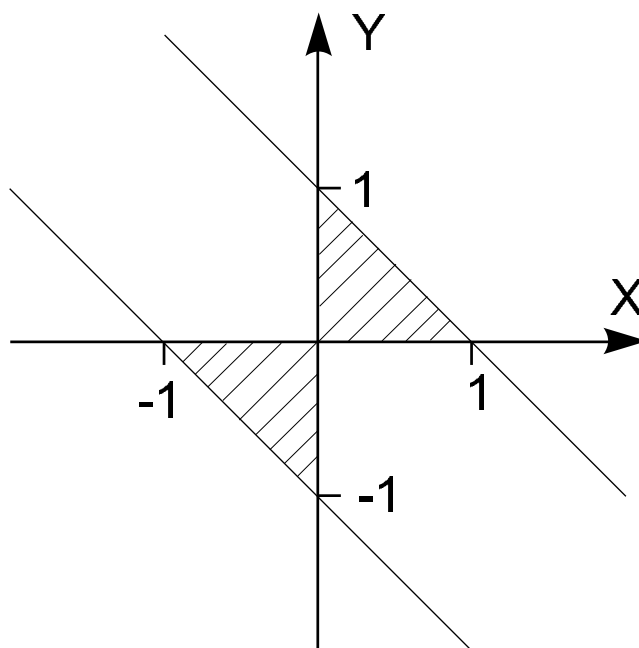


Рис. 2:

### Задание №15

Написать функцию, которая:

- для целых аргументов возвращает список десятичных цифр аргумента;
- для вещественных аргументов возвращает список цифр в машинном представлении аргумента, совместно с количеством цифр, находящихся слева от десятичной точки.

Проверить как работает полученная функция с целыми, вещественными, рациональными и символьными (неопределенные символы и константы) аргументами.

### Задание №16

Написать функцию, которая:

- для положительных аргументов определяет дробную часть числа;
- для отрицательных аргументов вычисляет значение синуса аргумента.

Проверить как работает полученная функция.

### Задание №17

Написать функцию **isUnder**, которая проверяет, находится ли точка, заданная своими декартовыми координатами на плоскости, ниже кривой, заданной как функция  $g(x)$ . Список координат точки – первый аргумент функции **isUnder**, функция  $g(x)$  – второй аргумент функции **isUnder**. В качестве примера взять  $g(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ ; координаты точки — вещественные числа, получаемые с помощью генератора псевдослучайных чисел в диапазоне  $x \in [x_{min}, x_{max}]$ ,  $y \in [y_{min}, y_{max}]$  ( $x_{min} = x_{min} = -3$ ,  $x_{max} = x_{max} = 3$ ). Провести вычисления для других параметров задачи: функции  $g(x)$  и значений  $x_{min}$ ,  $x_{max}$ ,  $y_{min}$ ,  $y_{max}$ .

### Задание №18

Написать функции, вычисляющие дрейфовую скорость ( $v$ ) и подвижность ( $\mu$ ) электронов в  $GaAs$ , двигающихся под воздействием электрического поля ( $E$ ) с напряженностью, изменяющейся от 0 до 10 кВ/см:

$$v = \frac{\mu_1 E (1 + BF^k)}{1 + F^k}; \quad \mu = \frac{v}{E}; \quad F = \frac{E}{E_0};$$

где:

$$E_0 = 4000 \text{ В/см}$$

$$\mu_1 = 8000 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$$

$$k = 4$$

$$B = 0.05$$

### Задание №19

Сопротивление кремния вследствие движения электронов (если пренебречь движением дырок) описывается следующей формулой:

$$\rho = \frac{1}{qn\mu},$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление в Ом · м,  $q$  — заряд электрона,  $n$  — концентрация электронов,  $\mu$  — их подвижность. Равновесная концентрация электронов в легированном кремнии описывается следующей формулой:

$$n = \frac{1}{2} \left( N + \sqrt{N^2 + 4n_i^2} \right),$$

где  $N$  — концентрация примеси с см<sup>-3</sup>,  $n_i$  — концентрация собственных носителей заряда. Для расчета подвижности  $\mu$  воспользуемся следующей упрощенной формулой:

$$\mu = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{-2.42},$$

$\mu_0 = 1330 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ ,  $T_0 = 300 \text{ К}$ . Концентрацией собственных носителей заряда в полупроводнике называют концентрацию электронов и дырок в полупроводнике, находящемся в состоянии термодинамического равновесия. Формула, описывающая зависимость концентрации собственных носителей заряда в кремнии ( $n_i$ ) от температуры может быть записана в следующем виде:

$$n_i = \left( 4M_c \left( \frac{2\pi m_0 k}{h^2} \right)^3 \right)^{1/2} \left( \frac{m_e^* m_h^*}{m_0^2} \right)^{3/4} T^{3/2} e^{-E_g/2kT},$$

Ее коэффициенты имеют следующие значения:

Коэффициент	Значение	Описание
$M_c$	6	Количество эквивалентных электронных долин в кремнии
$m_0$	$0.91095 \times 10^{-30} \text{ кг}$	Масса покоя электрона
$k$	$1.38066 \times 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$	Постоянная Больцмана
$h$	$6.62618 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$	Постоянная Планка
$m_e^*$	$0.33 m_0$	Эффективная масса электрона
$m_h^*$	$0.56 m_0$	Эффективная масса дырки

Температурная зависимость ширины запрещенной зоны в кремнии с хорошей точностью описывается формулой:

$$E_g = \left( E_{g0} - \frac{E_{g1}T^2}{T + E_{g2}} \right) q,$$

где  $E_{g0} = 1.17$  эВ,  $E_{g1} = 4.73 \times 10^{-4}$  эВ/К,  $E_{g2} = 636$  К,  $q = 1.60219 \times 10^{-19}$  Кл — заряд электрона.<sup>1</sup> Создать функцию, рассчитывающую зависимость сопротивления кремния от температуры ( $T \in [300; 500]$ ). Для расчета взять три значения концентрации легирующей примеси:  $1.0 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $1.5 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $1.0 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .

## Подстановки

### Задание №20

При помощи подстановок заменить в формуле  $ax^2 + z$  параметр  $a$  на значение 2, 55.

### Задание №21

При помощи подстановок заменить в формуле  $\frac{\sin(x^3 + 2x^2 + x + a)}{4x^3 + 3x^2 + x + b}$  переменную  $x$  значением 0, параметры  $a$ ,  $b$  численными значениями. Получить численное значение полученного выражения.

### Задание №22

При помощи подстановок заменить в формуле  $\frac{1 + a^2}{c}$  параметр  $a$  на выражение  $8 + d$ , а параметр  $c$  на выражение  $d + 4d^2$ . Затем в полученной формуле заменить выражение  $8 + d$  на  $\sin(d)$ . Затем положить параметр  $d$  равным 2 и получить численное значение выражения.

### Задание №23

Радиальное распределение плотности плазмы имеет следующий вид:

$$\exp \left( -\mu \frac{(r - r_{max})^2}{r_\delta^2} \right)$$

При помощи подстановок записать четыре варианта этой функции при следующих значениях локальных параметров ( $\mu = 1.0$ ,  $r_{max} = 0.5$ ,  $r_\delta = 0.15$ ), ( $\mu = 0.5$ ,  $r_{max} = 0.5$ ,  $r_\delta = 0.15$ ), ( $\mu = 1.0$ ,  $r_{max} = 0.3$ ,  $r_\delta = 0.15$ ) и ( $\mu = 1.0$ ,  $r_{max} = 0.5$ ,  $r_\delta = 0.1$ ).

### Задание №24

С помощью подстановок в выражении

$$\frac{\sin(x) + \sin(2x) + \cos(ax^2/2)}{2 + \sin(z)}$$

заменить тригонометрические функции первыми двумя членами разложения в ряд Тейлора, затем параметр  $a$  заменить переменной  $x$ , и потом занулить все степени переменной  $x$ , выше первой.

---

<sup>1</sup>Следует отдельно вычислить сложный коэффициент в правой части формулы для концентрации собственных носителей и изменить его размерность с  $\text{м}^{-3}$  на  $\text{см}^{-3}$ .

### Задание №25

В выражении  $x \cdot y$  с помощью списка подстановок заменить:

- $x$  на  $a + i \cdot b$ ,  $y$  на  $a - i \cdot b$ ;
- $x$  на  $c + i \cdot b$ ,  $y$  на  $c - i \cdot b$ ;
- $x$  на  $1 + i \cdot b$ ,  $y$  на  $1 - i \cdot b$ .

Полученное результирующее выражение упростить с помощью правил подстановки.